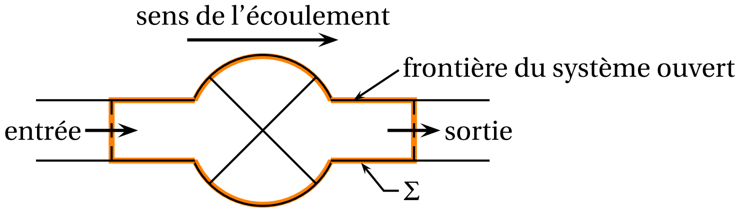
Méthode d'étude d'un système ouvert

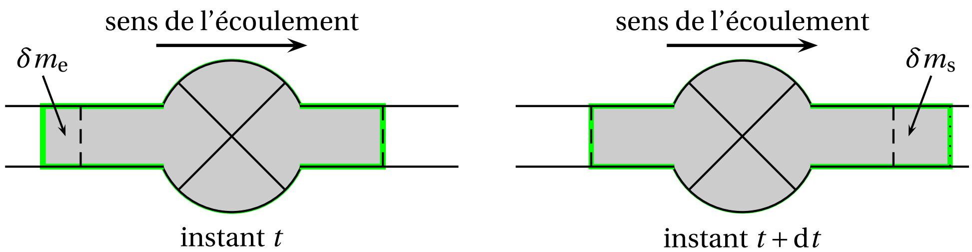
On considère un système ouvert Σ, traversé par un écoulement unidimensionnel : les grandeurs intensives sont uniformes sur la section d'entrée (repérées alors par l'indice « e ») et sur la section de sortie (repérées alors par l'indice « s »). L'écoulement est stationnaire : les grandeurs intensives ne dépendent pas du temps en tout point fixe du système.



Le système fermé Σ^* est construit à partir du système ouvert Σ, on lui ajoutant :

— à l'instant t la masse δm_e qui entre dans Σ entre t et $t+\mathrm{d}t$;

— à l'instant $t+\mathrm{d}t$ la masse δm_s qui sort de Σ entre t et $t+\mathrm{d}t$.



➤ En régime stationnaire, on a $\boxed{\delta m_\mathrm{e} = \delta m_\mathrm{s} = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t}$, où D_m est le débit massique traversant le système.

Bilan de masse en régime stationnaire

En régime stationnaire, le débit massique est conservé entre l'entrée et la sortie :

$$\delta m_\mathrm{e} = \delta m_\mathrm{s} = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t\,.$$

Variation d'une grandeur extensive en régime stationnaire

Soit Y une grandeur extensive et y la grandeur massique (intensive) associée.

En régime stationnaire, la variation $\mathrm{d}Y_{\Sigma^*} = Y_{\Sigma^*}(t+\mathrm{d}t) - Y_{\Sigma^*}(t)$ de Y pour le système fermé $\mathrm{d}\Sigma^*$ pendant la durée $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\mathrm{d}Y_{\Sigma^*} = \Delta y\, D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t\,,$$

où $\Delta y = y_\mathrm{s} - y_\mathrm{e}$ est la différence entre la grandeur massique à l'entrée et à la sortie du système ouvert Σ.

➤ La variation $\mathrm{d}Y_{\Sigma^*}$ est infinitésimale, car prise entre deux instants infiniment proches.

➤ La différence Δy n'est *a priori* pas infinitésimale, la grandeur massique pouvant varier de façon importante entre l'entrée et la sortie du système Σ.

➤ On relie ainsi la variation ΔY_{Σ^*} relative à un système fermé à la différence de grandeurs d'*entrée* et de *sortie*, deux notions caractéristiques d'un système ouvert.

Bilans thermodynamiques

Bilan d'énergie : premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire

Pendant $\mathrm{d}t$, le fluide intérieur à Σ peut recevoir le travail indiqué (ou travail utile) δW_i si l'élément de machine comporte des pièces mobiles[1]. Le système étant traversée par une masse δm pendant $\mathrm{d}t$, on définit le **travail indiqué massique** w_i par $\boxed{\delta W_\mathrm{i} = w_\mathrm{i}\delta m}$.
Le fluide intérieur à Σ recevant le transfert thermique δQ pendant $\mathrm{d}t$, on définit le **transfert thermique massique** q par $\boxed{\delta Q = q\delta m}$.

- Attention : w_u et q sont des grandeurs massiques, relatives à l'unité de masse traversant le système ouvert, pas à l'unité de masse contenue dans le système.

> Le premier principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit
>
> $$\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} + \Delta(gz) = w_\mathrm{u} + q\,,$$
>
> où h est l'enthalpie massique, e_c l'énergie cinétique massique, et Oz la verticale ascendante.

- Les termes de cette équations sont en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.
- $\Delta h = h_\mathrm{s} - h_\mathrm{e}$ représente la variation d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie du système ouvert.

> En terme de puissance, le premier principe s'écrit
>
> $$D_\mathrm{m}\left[h_\mathrm{s} - h_\mathrm{e} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} - \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + g(z_\mathrm{s} - z_\mathrm{e})\right] = \mathcal{P}_\mathrm{th} + \mathcal{P}_\mathrm{i}\,.$$

- Le premier principe ne fait apparaître que les travaux des forces extérieures, pas des forces intérieures de viscosité : **les pertes de charge n'apparaissent pas dans le premier principe**.

Quelques éléments usuels

En règle générale, Δe_c et $\Delta(gz)$ son négligeables pour les éléments usuels.

Détendeur : permet de diminuer la pression par perte de charge ; $\boxed{\Delta h = 0}$.

Compresseur, pompe : permet d'augmenter mécaniquement la pression du fluide ; $\boxed{\Delta h = w_\mathrm{i} > 0}$.

Turbine : permet d'extraire un travail mécanique du fluide ; $\boxed{\Delta h = w_\mathrm{i} < 0}$.

Échangeur thermique : réalise un transfert thermique entre le fluide et l'extérieur ; $\boxed{\Delta h = q}$, avec $q < 0$ pour un condenseur et $q > 0$ pour un évoporateur.

Bilan d'entropie : second principe pour un système ouvert en régime stationnaire

> Le second principe pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit
>
> $$\Delta s = s_\text{reçu} + s_\text{créé}\,.$$

- Le terme $\Delta s = s_\mathrm{s} - s_\mathrm{e}$ représente la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie du système ouvert.
- L'entropie reçue par le système traversé par la masse δm de fluide pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit $\delta S_\text{reçu} = s_\text{reçu}\delta m$, où $s_\text{reçu}$ est l'**entropie échangée par unité de masse traversant le système**, en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.
- L'entropie créée au sein du système traversé par la masse δm de fluide pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit $\delta S_\text{créé} = s_\text{créé}\delta m$, où $s_\text{créé}$ est l'**entropie créée par unité de masse traversant le système**, en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.
- Dans le cas d'une évolution adiabatique, on a $s_\text{reçu} = 0$.
- Dans le cas d'une évolution réversible, on a $s_\text{créé} = 0$.
- Pour un transfert thermique avec une source de chaleur, on a $s_\text{reçu} = \dfrac{q}{T_\text{ext}}$.

1. Le travail des forces de pression n'est pas comptabilité comme travail utile ; on l'appelle aussi « travail de transvasement » ; c'est lui qui assure l'écoulement du fluide.

Diagramme enthalpique (dit diagramme des frigoristes ou diagramme de Mollier)

Principe général

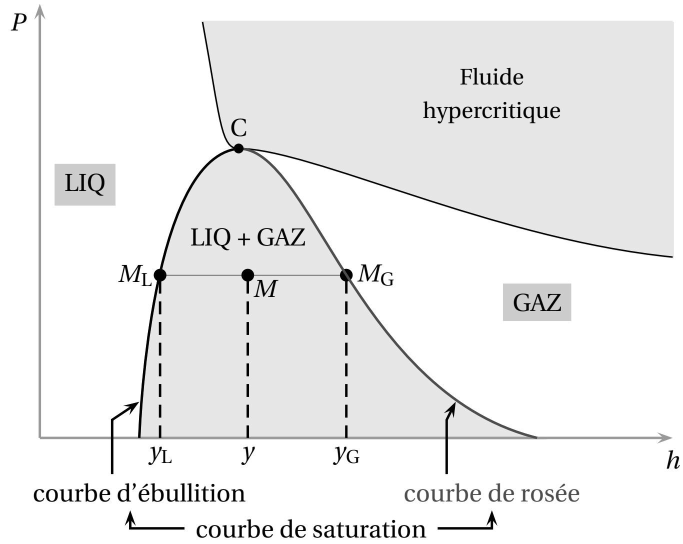
On représente l'ensemble des états du fluide sur un diagramme plan, la pression P étant en ordonnée et l'enthalpie massique h en abscisse.

- La pression est usuellement représentée en échelle logarithmique.

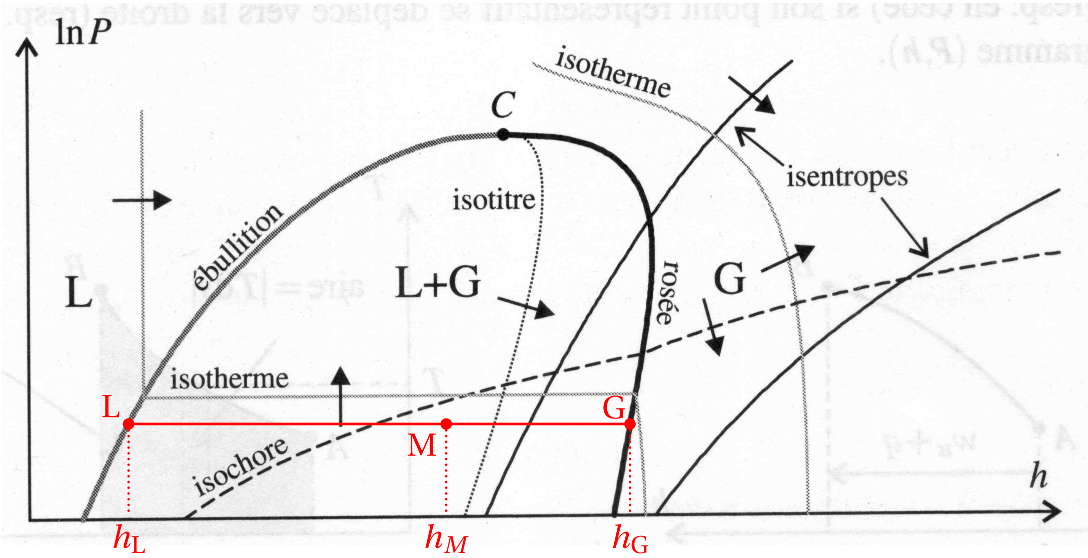
La courbe de saturation délimite la zone du diagramme dans laquelle le fluide est diphasé (liquide + vapeur) : elle est constituée de la courbe d'ébullition et de la courbe de rosée, qui se rejoignent au point critique C.

- Que ce soit P ou T qui est représentée en ordonnée, tout segment horizontal $M_L M_G$ dans la zone diphasée est à la fois une isotherme et une isobare.
- Le titre massique en vapeur dans la zone diphasée est donné par la **règle des moments** :

$$\boxed{x = \frac{h(M) - h_L}{h_G - h_L} = \frac{M_L M}{M_L M_G}}.$$



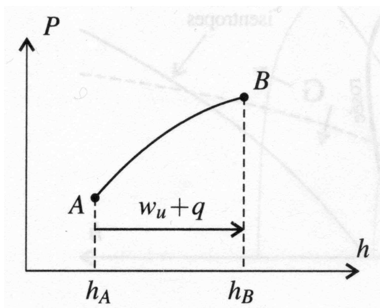
On représente la pression P, en échelle logarithmique le plus souvent, en fonction de l'enthalpie massique h. Les flèches indiquent la direction dans laquelle la grandeur constante sur la courbe augmente.



Entre les points A et B à l'entrée et à la sortie du système, la différence des abscisses donne directement la somme du travail utile massique w_u et du transfert thermique massique q reçu par le fluide :

$$h_B - h_A = w_u + q.$$

- Une détente isenthalpique (Joule-Thomson) dans un détendeur est représentée par un segment vertical descendant.



- En dernière page de ce document, on donne le diagramme « officiel » du tétrafluoroéthane, fluide réfrigérant de code R134a.

Bilan macroscopique d'énergie mécanique

Écriture générale

La variation d'énergie mécanique du système fermé associé au système ouvert s'écrit

$$\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \left[\Delta e_\mathrm{c} + \Delta(gz)\right]\delta m = \left[\Delta e_\mathrm{c} + \Delta(gz)\right] D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas d'un fluide incompressible où $\mu_\mathrm{e} = \mu_\mathrm{s} = \mu$, le travail des forces de pression en amont et en aval, appelé **travail de transvasement** s'écrit

$$\delta W_\mathrm{p} = +P_\mathrm{e} S_\mathrm{e} v_\mathrm{e}\,\mathrm{d}t - P_\mathrm{s} S_\mathrm{s} v_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu} - \frac{P_\mathrm{s}}{\mu}\right) D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$$

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit $\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \delta W_\mathrm{p} + \delta W_\mathrm{i} + \delta W_\mathrm{visc}$

Pour un système ouvert en régime stationnaire, le bilan d'énergie mécanique s'écrit

$$D_\mathrm{m}\left[\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right)\right] = \mathcal{P}_\mathrm{i} + \mathcal{P}_\mathrm{visc}$$

— $\mathcal{P}_\mathrm{i}$ est la puissance indiquée due aux pièces mobiles ;

— $\mathcal{P}_\mathrm{visc}$ est la puissance des forces intérieures de viscosité (au sein du fluide).

En terme de travail par unité de masse traversante, le bilan d'énergie mécanique s'écrit

$$\boxed{\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right) = w_\mathrm{u} + w_\mathrm{visc}}\,.$$

➤ En terme de hauteur, le bilan s'écrit $\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\mu g} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2g} + z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu g} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2g} + z_\mathrm{e}\right) = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{i}}{D_\mathrm{m} g} + \frac{\mathcal{P}_\mathrm{visc}}{D_\mathrm{m} g}$.

Il traduit la variation de la **charge de l'écoulement** $H = \frac{P}{\mu g} + \frac{v^2}{2g} + z$.

➤ Dans le cas d'un écoulement sans puissance indiquée, on a $\mathcal{P}_\mathrm{i} < 0$d, d'où

$$\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\mu g} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2g} + z_\mathrm{s}\right) = \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu g} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2g} + z_\mathrm{e}\right) - \Delta H$$

où $\Delta H > 0$ est la perte de charge.

➤ Les pertes de charges régulières, réparties tout au long de la conduite, sont proportionnelles à sa longueur L. Elles sont données par la loi de Poiseuille pour un écoulement laminaire, ou par le diagramme de Moody pour un écoulement quelconque. Pour une conduite horizontale, la chute de pression correspondante est $\Delta P_\text{rég} = \mu g \Delta H_\text{rég}$.

➤ Les pertes de charge singulières sont localisées au niveau des singularités de la canalisation (coude, élargissement, rétrécissement). Pour une conduite horizontale, la chute de pression correspondante est $\Delta P_\mathrm{sing} = \mu g \Delta H_\mathrm{sing}$.

➤ Dans une conduite donnée, la perte de charge totale est $\Delta P_\mathrm{tot} = \Delta P_\mathrm{reg} + \Delta P_\mathrm{sing}$.

Cas de l'écoulement parfait incompressible

Pour un écoulement parfait incompressible, on a $\mathcal{P}_\mathrm{visc} = 0$. Le bilan s'écrit alors

$$\boxed{D_\mathrm{m}\left[\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\mu} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right)\right] = \mathcal{P}_\mathrm{i}}\,.$$

➤ Cette relation est aussi appelée **théorème de Bernoulli généralisé**.

Relation de Bernoulli

Hypothèses

Dans un référentiel galiléen, pour un écoulement parfait stationnaire, incompressible et homogène d'un fluide soumis uniquement aux forces de pression et de pesanteur, la relation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{P}{\mu}+\frac{v^2}{2}+gz=C(\mathcal{L})$$

constante le long d'une ligne de courant $\mathcal{L}$, où Oz est la verticale ascendante.

- Un écoulement est parfait si on néglige tous les phénomènes diffusifs : viscosité, échanges thermiques. L'évolution du fluide est donc isentropique (adiabatique réversible).
- À nombre de Reynolds élevé, on peut considérer un écoulement parfait en se plaçant en dehors de la couche limite.
- La relation de Bernoulli traduit la **conservation de l'énergie** d'une particule de fluide au cours de l'écoulement :

$$\underbrace{\frac{p}{\mu}}_{\substack{\text{énergie potentielle}\\ \text{massique}\\ \text{des forces de pression}}}+\underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\substack{\text{énergie cinétique}\\ \text{massique}}}+\underbrace{gz}_{\substack{\text{énergie potentielle}\\ \text{massique de pesanteur}}}=C(\mathcal{L})$$

Applications de la relation de Bernoulli

Effet Venturi

Dans une conduite horizontale, on a $\frac{P}{\mu}+\frac{v^2}{2}=$ cte. Si la conduite est de section variable, la conservation du débit volumique s'écrit $D_v=Sv$: si la section diminue, la vitesse augmente et la pression diminue.

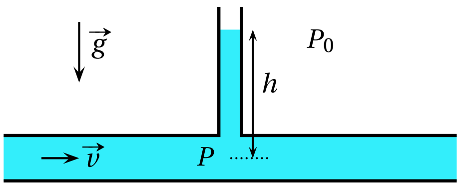
Dans une conduite de section variable, les zones de faibles section, donc de grande vitesse, sont des zones de faible pression.

- Si la pression diminue jusqu'à la pression de vapeur saturante, il se forme des bulles de vapeur qui implosent violemment : c'est le phénomène de **cavitation**.

Prise de pression statique

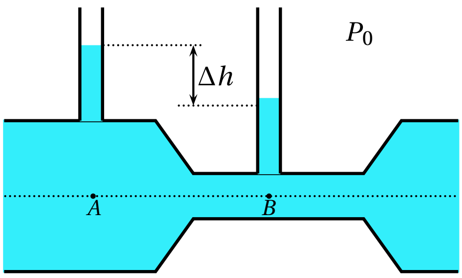
Une prise de section statique consiste en un tube placé verticalement sur la paroi d'un conduite. On observe une montée du liquide dans le tube jusqu'à une hauteur h, reliée à la pression dans la conduite par

$$h=\frac{P-P_0}{\mu g}.$$



Débitmètre de Venturi

On note S_A, v_A et P_A la section, la vitesse et la pression en A, et S_B, v_B et P_B ces même grandeurs en B.
Débit conservé : $S_A v_A = S_B v_B$.
Répartition hydrostatique verticale de la pression : $P_A-P_B=\mu g\Delta h$.
Bernoulli : $\frac{P_A}{\mu}+\frac{v_A^2}{2}=\frac{P_B}{\mu}+\frac{v_B^2}{2}$.
On en déduit $D_v=\frac{S_A S_B}{\sqrt{S_A^2-S_B^2}}\sqrt{2g\Delta h}$: on déduit D_v de la mesure de Δh.

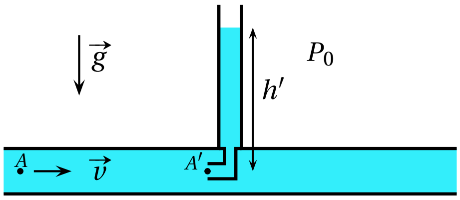


Prise de pression dynamique

Une prise de section dynamique consiste en un tube placé verticalement sur la paroi d'un conduite, dont l'orifice d'entrée fait face à l'écoulement.

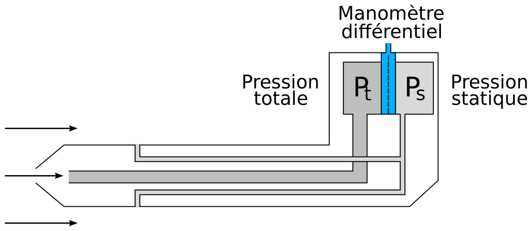
Le point A' est un point d'arrêt : $v_{A'} = 0$. Bernoulli : $P_{A'} = P + \mu\dfrac{v^2}{2}$, où P est la pression dans la conduite (en A).

Avec $P_{A'} = P_0 + \mu g h'$ on a $h' = \dfrac{P - P_0}{\mu g} + \dfrac{v^2}{2g}$



Tube de Pitot

Un tube de Pitot est constitué d'une prise de pression statique et d'une prise de pression dynamique.
La prise de pression statique mesure la pression $P_s = P$, pression dans le fluide.
La prise de pression dynamique mesure la pression dynamique $P_t = P + \mu\dfrac{v^2}{2}$.



Le manomètre différentiel retourne la différence des deux pressions mesurées, qui permet d'accéder à la vitesse du fluide : $P_t - P_s = \mu\dfrac{v^2}{2}$.

Bilans dynamiques

Bilan de quantité de mouvement

Étant donné un système fermé $\mathscr{S}$, le théorème de la résultante cinétique s'écrit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$

$$\frac{\vec{P}(t+\mathrm{d}t) - \vec{P}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

où $\vec{F}_{\text{ext}}$ est la résultante des forces **extérieures** s'appliquant sur le système, $\vec{P}(t)$ sa quantité de mouvement à l'instant t et $\vec{P}(t+\mathrm{d}t)$ à l'instant $t+\mathrm{d}t$.

- Seules les actions extérieures interviennent. On peut éliminer une action inconnue en définissant un système qui la rend intérieure.
- La résultante des forces de pression uniforme sur une surface fermée est nulle : $\boxed{-\oiint_{M\in\Sigma} p_0\,\mathrm{d}\vec{S}_M = \vec{0}}$.
- On considère la pression atmosphérique comme uniforme sur des dimensions « à taille humaine ».

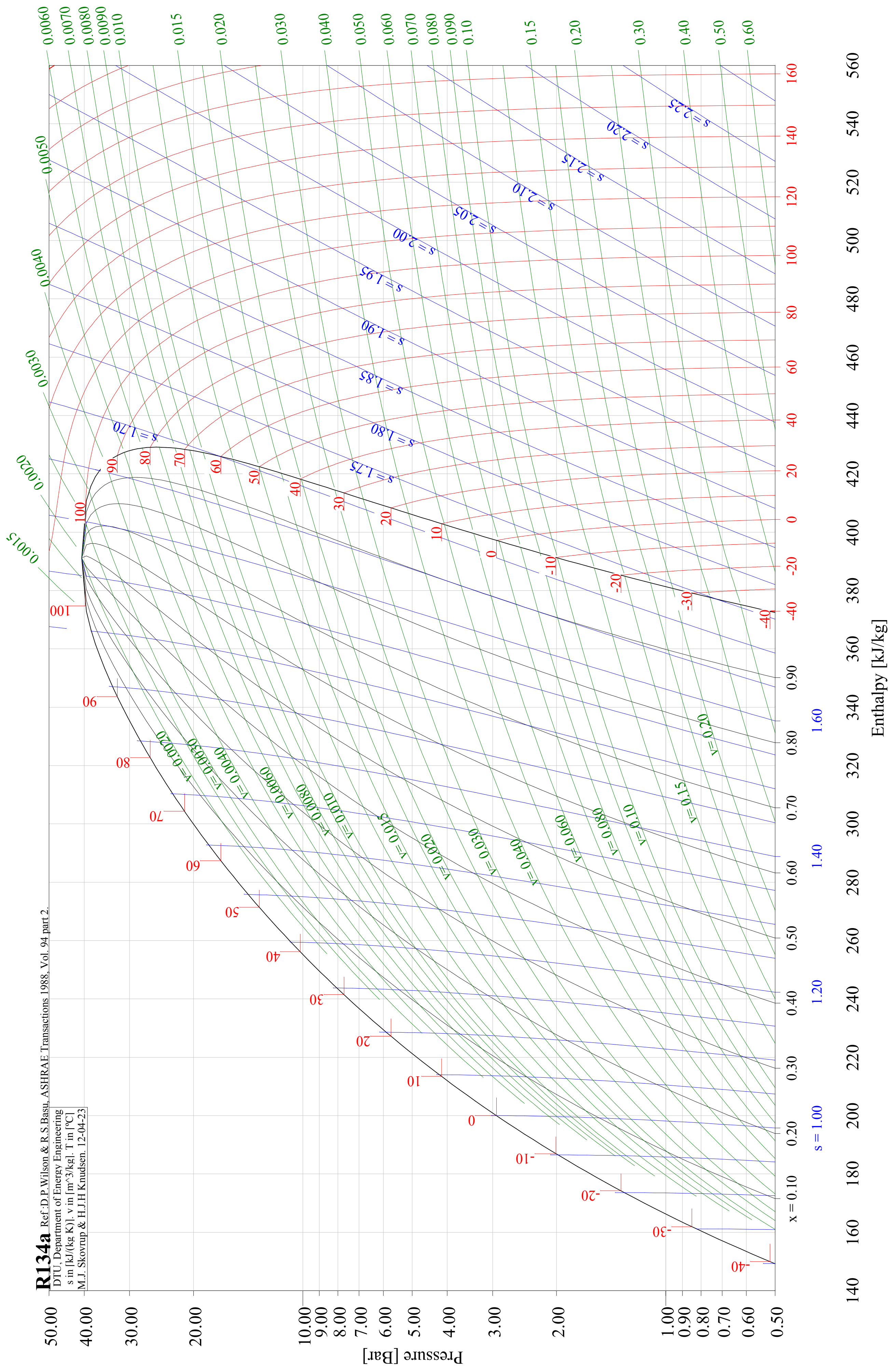
Bilan de moment cinétique

Étant donné un système fermé $\mathscr{S}$, le théorème du moment cinétique s'écrit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$

$$\frac{\vec{L}_O(t+\mathrm{d}t) - \vec{L}_O(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathscr{M}}_{\text{ext}}(O)$$

où O est un point fixe dans le référentiel d'étude.

- Seules les actions extérieures interviennent. On peut éliminer une action inconnue en définissant un système qui la rende intérieure.
- Le moment résultant en un point O des forces de pression uniforme sur une surface fermée est nul.


R134a
Ref :D.P.Wilson & R.S.Basu, ASHRAE Transactions 1988, Vol. 94 part 2.
DTU, Department of Energy Engineering
s in [kJ/(kg K)]. v in [m^3/kg]. T in [°C]
M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen. 12-04-23
Enthalpy [kJ/kg]
Pressure [Bar]