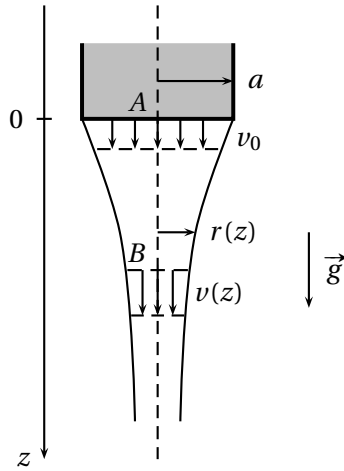


TD bilans

Bilans d'énergie et bilans dynamiques — solution

3 — Rétrécissement d'un jet liquide



On considère un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible dans le champ de pesanteur : on peut donc appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et B sur une même ligne de courant. L'axe Oz étant descendant, il faut écrire

$$\frac{P(A)}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + 0 = \frac{P(B)}{\rho} + \frac{v^2(z)}{2} - gz.$$

Le jet étant libre, on a $P(A) = P(B) = P_0$, d'où

$$v^2(z) = v_0^2 + 2gz,$$

soit

$$v(z) = v_0 \sqrt{1 + \frac{2gz}{v_0^2}}.$$

La conservation du débit volumique entre la sortie et la cote z s'écrit

$$Q = \pi a^2 v_0 = \pi r^2(z) v(z).$$

On en déduit

$$r(z) = \frac{a}{\left(1 + \frac{2gz}{v_0^2}\right)^{1/4}}.$$

4 — Phénomène de cavitation

1. On applique la relation de Bernoulli sur la ligne de courant joignant les points A et B :

$$P(A) + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P(B) + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2.$$

À la surface libre, on a $P(A) = P_0$. Le point B étant dans un jet libre, $P(B) = P_0$. La hauteur d'eau étant

constante, on a $v_A = 0$. Avec $z_A = H$ et $z_B = 0$, on en déduit la vitesse $v = v_B$ de sortie :

$$v = \sqrt{2gH}.$$

On calcule $v = 56,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le débit volumique vaut

$$D_v = \pi \frac{D^2}{4} v.$$

On calcule $D_v = 4,0 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 4000 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. On applique la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant joignant les points A et C :

$$P_0 + \rho g H = P(z) + \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g z.$$

La section de la conduite étant identique en B et en C, on en déduit

$$v_C^2 = v_B^2 = 2gH,$$

d'où

$$P(z) = P_0 - \rho g z.$$

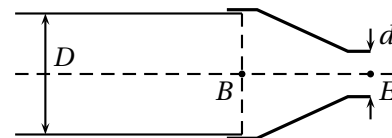
La pression décroît quand on s'élève dans la conduite. Le phénomène de cavitation se produit pour

$$P(z_c) = P_0 - \rho g z_c = P_{\text{sat}},$$

soit pour

$$z_c = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g} = 9,8 \text{ m}.$$

3. Pour remédier à ce problème (pouvant provoquer la rupture de la conduite), on visse à l'extrémité aval une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie $d < D$, avec $d = 15 \text{ cm}$.



3.a) Le point E étant au niveau de la sortie, donc d'un jet libre, l'application de la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant joignant les points A et E conduit de même à

$$v_E = \sqrt{2gH}.$$

Le débit volumique s'écrit

$$D_v = \pi \frac{d^2}{4} v_E = 1,0 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

3.b) La conservation du débit volumique entre les sections B et E donne $v_C D^2 = v_B D^2 = v_E d^2$, d'où

$$v_C = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gH}.$$

La relation de Bernoulli appliquée le long de la ligne de courant joignant les points A et C s'écrit alors

$$\begin{aligned} P_0 + \rho g H &= P(z) + \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g z \\ &= P(z) + \rho g H \left(\frac{d}{D}\right)^4 + \rho g z \end{aligned}$$

d'où

$$P(z) = P_0 - \rho g z + \rho g H \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

La pression vaut P_{sat} à l'altitude

$$z_{\text{sat}} = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g} + H \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = 160 \text{ m},$$

hauteur inaccessible dans la conduite. L'embout a permis débiter la cavitation en réduisant la vitesse dans la conduite.

5 — Débit d'un siphon

1. On écrit la relation de Bernoulli entre un point de la surface libre et un point du jet libre de sortie :

$$\frac{P_0}{\mu} + 0 + 0 = \frac{P_0}{\mu} - gH + \frac{v^2}{2}$$

d'où

$$v = \sqrt{2gH}.$$

2. La vitesse v est constante dans la conduite de section constante (conservation du débit volumique de l'eau incompressible); la relation de Bernoulli entre le point M et un point du jet de sortie s'écrit

$$\frac{P(M)}{\mu} + gh + \frac{v^2}{2} = \frac{P_0}{2} - gH + \frac{v^2}{2},$$

d'où

$$P(M) = P_0 - \mu g(H + h).$$

On doit avoir $P(M) > 0$, d'où

$$H < \frac{P_0}{\mu g} - h.$$

► Rigoureusement, on devrait écrire $P(M) > P_{\text{sat}}$, mais $P_{\text{sat}} \ll P_0$ d'où l'approximation effectuée.

3. La vitesse maximale est obtenue pour

$$H_{\text{max}} = \frac{P_0}{\mu g} - h,$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{2 \left(\frac{P_0}{\mu} - gh \right)}$$

Le débit maximal correspondant est

$$D_{\text{max}} = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2 \left(\frac{P_0}{\mu} - gh \right)}.$$

On calcule

$$D_{\text{max}} = 8,7 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 87 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La cote de la sortie du siphon vaut alors

$$H_{\text{max}} = 6,2 \text{ m}.$$

7 — Vidange

On note Oz la verticale ascendante.

On considère en première approximation l'écoulement comme stationnaire en négligeant la vitesse des points de la surface libre, en supposant $S_0 \gg \sigma$. La relation de Bernoulli entre un point de la surface libre et un point du jet libre en sortie s'écrit alors

$$\frac{P_0}{\mu} + 0 + gz = \frac{P_0}{\mu} + \frac{v^2}{2} + 0$$

d'où la vitesse de sortie

$$v = \sqrt{2gz}.$$

Dans un second temps, nous allons prendre en compte la vitesse $-\frac{dz}{dt}$ des points de la surface libre pour écrire la conservation du débit volumique (liquide incompressible) entre la surface libre et l'orifice de sortie :

$$D_v = -S(z) \frac{dz}{dt} = \sigma v$$

d'où

$$z^{\alpha-1/2} dz = -\frac{\sigma}{S_0} \sqrt{2gz_0^\alpha} dt.$$

Le temps de vidange entre les altitudes z_1 et $z_2 < z_1$ vérifie alors

$$\int_{z_1}^{z_2} z^{\alpha-1/2} dz = -\frac{\sigma}{S_0} \sqrt{2gz_0^\alpha} T,$$

soit

$$\left[\frac{z^{\alpha+1/2}}{\alpha+1/2} \right]_{z_1}^{z_2} = -\frac{\sigma}{S_0} \sqrt{2gz_0^\alpha} T.$$

On a alors

$$T = \frac{S_0}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{1}{(1+2\alpha)} [z_1^{\alpha+1/2} - z_2^{\alpha+1/2}].$$

On a alors

$$T = K(z_1 - z_2) \quad \text{pour} \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\text{avec } K = \frac{S_0}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{1}{(1 + 2\alpha)z_0^\alpha}.$$

- On peut répondre directement à la deuxième question avec moins de calculs, à partir de la relation issue de la conservation du débit volumique

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\sigma}{S_0} \frac{\sqrt{2g}}{z_0^\alpha} z^{1/2-\alpha}.$$

Il faut $\frac{dz}{dt} = \text{cte}$ pour avec une hauteur variant de façon affine avec le temps, soit $\alpha = 1/2$ pour que la dérivée précédente ne dépende plus de z .

8 — Contracté du jet

1. La relation de Bernoulli s'applique pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène. On considère une ligne de courant entre la surface libre et l'orifice de sortie (jet libre à la pression P_0). On obtient la formule de Torricelli $v = \sqrt{2gH}$.

Pour $H = 1,0 \text{ m}$, on a $v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1}$ soit $v = 4,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Trajectoire balistique, correspondant à $\vec{a} = \vec{g}$. Base Ox vers la droite, Oy ascendant, origine en bas à droite du récipient.

On a $\ddot{x} = 0$, soit $\dot{x} = v$ et $x(t) = vt$. D'autre part $\ddot{y} = -g$, soit $\dot{y} = -gt$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ (vitesse initiale horizontale).

On élimine le temps, d'où $y(x) = -\frac{g}{2v^2}x^2 + h$. On a

$$y(L) = 0, \text{ d'où } L = v\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

On calcule la vitesse correspondant à la mesure :

$$v = L\sqrt{\frac{g}{2h}} = 4,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On retrouve bien la vitesse obtenue précédemment.

3. Le débit volumique est $Q = v'\sigma = \frac{V}{T}$, d'où $v' = \frac{V}{\sigma T}$.

$$\text{Avec } \sigma = \pi \frac{d^2}{4}, \text{ on a } v' = \frac{4V}{\pi d^2 T}.$$

On calcule $v' = \frac{4 \times 10 \times 10^{-3}}{\pi \times (1,5 \times 10^{-2})^2 \times 27}$, soit $v' = 2,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4. v' est la vitesse au niveau de l'orifice de sortie, tandis que v est la vitesse dans le jet libre (pression P_0). On a $v > v'$ si la section σ_ℓ du jet libre est plus petite que la section σ de l'orifice : on observe en effet une contraction du jet au niveau de la sortie. La conservation du débit volumique donne le coefficient de contraction du jet :

$$\alpha = \frac{\sigma_\ell}{\sigma} = \frac{v'}{v} = 0,48.$$

9 — Perte de charge singulière

1. La pression p_1 s'exerce sur les deux faces en amont : la section S_1 et la partie droite d'aire $S_2 - S_1$ en contact avec la zone morte, soit sur la surface totale $S_1 + (S_2 - S_1) = S_2$. La pression p_2 s'exerce sur la section S_2 en aval. Le bilan total des forces s'exerçant sur le fluide est donc

$$\vec{F} = S_2(p_1 - p_2)\vec{e}_x.$$

2. Le débit massique, conservé, s'écrit

$$D_m = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2.$$

3. On construit un système fermé :

- à l'instant t , il est constitué du fluide entre les sections S_1 et S_2 du schéma, ainsi que de la masse $dm = D_m dt$ de fluide qui franchit la section amont pendant dt , à la vitesse v_1 ;
- à l'instant $t + dt$, il est constitué du fluide entre les sections S_1 et S_2 du schéma, ainsi que de la masse $dm = D_m dt$ qui franchit la section aval pendant dt , à la vitesse v_2 .

Écrivons la quantité de mouvement de ce système à l'instant t , soit

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^*(t) + dm v_1 \vec{e}_x$$

et à l'instant $t + dt$, soit

$$\vec{P}(t + dt) = \vec{P}^*(t + dt) + dm v_2 \vec{e}_x.$$

L'écoulement étant stationnaire, la quantité de mouvement de la partie de fluide comprise entre les sections amont et aval, fixes, vérifie $\vec{P}^*(t + dt) = \vec{P}^*(t)$. On a donc

$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = D_m(v_2 - v_1)\vec{e}_x dt,$$

d'où

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = D_m(v_2 - v_1)\vec{e}_x.$$

Le principe de la résultante dynamique s'écrit

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{F}$$

soit en projection selon $\vec{e}_x$:

$$D_m(v_2 - v_1) = S_2(p_1 - p_2).$$

4. On a donc

$$p_2 = p_1 + \frac{D_m}{S_2}(v_1 - v_2) = p_1 + \rho v_2(v_1 - v_2)$$

soit

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + v_2(v_1 - v_2).$$

On remarque que

$$v_1^2 - v_2^2 - (v_2 - v_1)^2 = -2v_2^2 + 2v_1v_2 = 2v_2(v_1 - v_2),$$

d'où

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2 - v_2^2 - (v_2 - v_1)^2}{2}.$$

La relation de Bernoulli conduirait à

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2}.$$

Le théorème de Bernoulli est valable pour un écoulement parfait. On peut l'utiliser dans le cas d'un écoulement réel si les effets de la viscosité sont confinés dans une couche limite de faible épaisseur. On observe ici un décollement de la couche limite au niveau du changement de section, entraînant l'apparition d'une zone « morte » où la viscosité ne peut plus être négligée. On ne peut donc utiliser le théorème de Bernoulli.

5. En terme de pression, la relation obtenue s'écrit

$$p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho(v_2 - v_1)^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \Delta p$$

où la perte de charge est donnée par

$$\Delta p = \frac{\rho(v_2 - v_1)^2}{2}.$$

Comme $S_1 v_1 = S_2 v_2$, on en déduit $\Delta p = \alpha \frac{\rho v_1^2}{2}$, avec

$$\alpha = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2.$$

10 — Homogénéisation d'un écoulement

1. Les forces tangentielles de viscosité homogénéisent l'écoulement, par diffusion de quantité de mouvement.

2. Deux inconnues p_3 et v_3 : il faut faire un bilan de masse et un bilan de quantité de mouvement.

Bilan de masse :

$$m(t) + \delta m_1 + \delta m_2 = m(t + dt) + \delta m_3$$

avec

$$\delta m_1 = \mu \frac{S}{2} v_0 dt,$$

$$\delta m_2 = \mu \frac{S}{2} \frac{v_0}{2} dt$$

et

$$\delta m_3 = \mu S v_3 dt.$$

La conservation de la masse conduit à

$$\mu \frac{S}{2} v_0 dt + \mu \frac{S}{2} \frac{v_0}{2} dt = \mu S v_3 dt$$

d'où

$$v_3 = \frac{3v_0}{4}.$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\delta m_1 v_1 + \delta m_2 v_2 = \delta m_3 v_3$$

d'où

$$\mu \frac{S}{2} v_0^2 dt + \mu \frac{S}{2} \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 dt = \mu S v_3^2 dt$$

soit

$$\frac{5}{8} \mu S v_0^2 = \frac{P}{16} \mu S v_0^2$$

d'où

$$\frac{Dp_x}{Dt} = -\frac{1}{16} \mu S v_0^2.$$

Le poids et les forces de pression latérales sont sans effet dans la direction Ox ; il reste les forces de pression en amont et en aval :

$$-\frac{1}{16} \mu S v_0^2 = -p_3 S + p_0 \frac{S}{2} + p_0 \frac{S}{2}$$

d'où

$$p_3 = p_0 + \frac{1}{16} \mu v_0^2.$$

3. On a

$$E_c(t) = E_c^0 + \frac{1}{2} \delta m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \delta m_2 v_2^2$$

soit

$$E_c(t) = E_c^0 + \frac{9}{32} \mu S v_0^3 dt$$

et

$$E_c(t + dt) = E_c^0 + \frac{1}{2} \delta m_3 v_3^2 = E_c^0 + \frac{27}{128} \mu S v_0^3 dt.$$

On a donc, avec $v_3 = 3v_0/4$:

$$\frac{DE_c}{Dt} = -\frac{9}{128} \mu S v_0^3.$$

Le poids et les forces de pression latérales ont une puissance nulle (forces normales au déplacement) ; la puissance des forces de viscosité sur les parois est nulle car la vitesse du fluide est nulle sur les parois fixes. Il reste la puissance des forces de pression en amont et en aval :

$$\frac{DE_c}{Dt} = -\frac{9}{128} \mu S v_0^3 = -p_3 S v_3 + p_0 \frac{S}{2} v_0 + p_0 \frac{S}{2} \frac{v_0}{2} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

d'où

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{9}{128}\mu S v_0^3 + \frac{3}{4}S v_0(p_3 - p_0) = \mu S v_0^3 \left(\frac{3}{64} - \frac{9}{128} \right).$$

On a donc

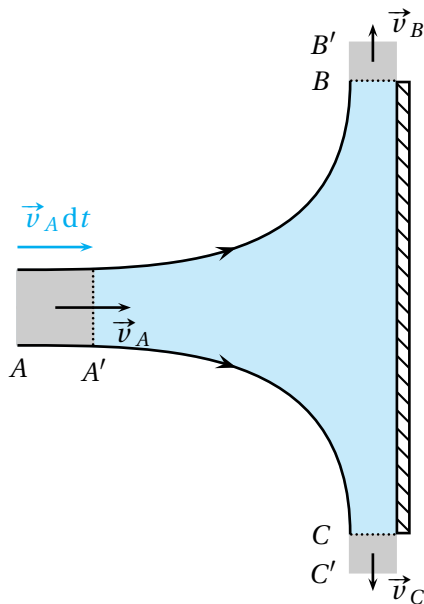
$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{3}{128}\mu S v_0^3 < 0.$$

Les forces intérieures de viscosité sont donc dissipatives.

11 — Action d'un jet sur une plaque

On considère le système fermé, représenté ainsi de profil :

- ABC à l'instant t ;
- $A'B'C'$ à l'instant $t + dt$.



À l'instant t , il comporte, outre la partie commune, la masse δm de fluide qui va entrer de t à $t + dt$, à la vitesse uniforme $\vec{v}_A$.

À l'instant $t + dt$, il comporte, outre la partie commune, la masse δm qui sort de t à $t + dt$ (même masse que précédemment du fait de la stationnarité de l'écoulement); cette partie de fluide a la forme d'un anneau, la vitesse étant radiale. Elle admet l'axe de la plaque comme axe de symétrie.

La partie commune entre t et $t + dt$ est donc $A'BC$, siège d'un écoulement stationnaire. Les grandeurs relatives à cette partie sont donc indépendantes du temps.

La quantité de mouvement à l'instant t est

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{A'BC} + \delta m \vec{v}_A.$$

À l'instant $t + dt$, elle vaut

$$\vec{P}(t + dt) = \vec{P}_{A'BC} + \delta \vec{P}$$

Du fait de la symétrie radiale du fluide sortant de la plaque, la quantité de mouvement $\delta \vec{P}$ du fluide qui sort de la plaque est globalement nulle : on peut regrouper deux à deux des masses élémentaires radialement opposées; leurs vitesses étant opposées, on a avec la notation de la figure

$$\delta m_B \vec{v}_B + \delta m_C \vec{v}_C = \vec{0}.$$

La variation de la quantité de mouvement vaut donc

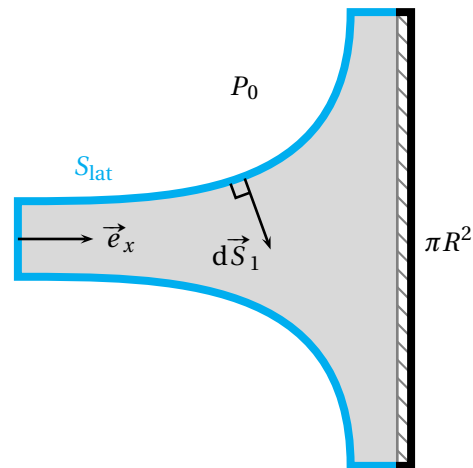
$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = -\delta \vec{v}_A = -D_m \vec{v}_A dt = -\rho S v_A \vec{v}_A dt,$$

d'où

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = -\rho S v_A \vec{v}_A.$$

Le système est soumis à :

- la force $\vec{F}_{\text{air}}$ de pression de l'air sur la surface latérale S_{lat} ;
- la force $\vec{F}_{\text{plaque/jet}}$ de la part de la plaque.



La pression de l'air P_0 étant uniforme, sa résultante sur une surface fermée est nulle. On complète alors la surface latérale par la surface plane πR^2 (en noir sur la figure), et la résultante des forces de pression sur la surface fermée ainsi construite s'écrit

$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{air}} - P_0 \pi R^2 \vec{e}_x$$

d'où

$$\vec{F}_{\text{air}} = P_0 \pi R^2 \vec{e}_x,$$

et le bilan s'écrit

$$-\rho S v_A^2 \vec{e}_x = P_0 \pi R^2 \vec{e}_x + \vec{F}_{\text{plaque/jet}}.$$

On en déduit la force du jet sur la plaque

$$\vec{F}_{\text{jet/plaque}} = \rho S v_A^2 \vec{e}_x + P_0 \pi R^2 \vec{e}_x.$$

12 — Décollage d'une fusée

1. Se reporter au cours. On effectue un bilan de quantité de mouvement sur la fusée :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{dv}{dt} \vec{e}_z - Qu \vec{e}_z.$$

La loi de la dynamique s'écrit

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -m(t)g \vec{e}_z$$

soit

$$m \frac{dv}{dt} \vec{e}_z = -m(t)g \vec{e}_z + Qu \vec{e}_z.$$

On interprète cette expression en introduisant une « force de poussée » $\vec{\Pi}$ telle que

$$m(t) \frac{dv}{dt} \vec{e}_z = -m(t)g \vec{e}_z + \vec{\Pi}$$

avec $\vec{\Pi} = Qu \vec{e}_z$.

2. Le fusée décolle si à $t = 0$ on a

$$\frac{dv}{dt} > 0$$

soit si

$$-m(0)g + Qu > 0.$$

Avec $m(0) = m_0 + m_c$, on en déduit $Q > Q_{\min}$, avec

$$Q_{\min} = (m_0 + m_c) \frac{g}{u}.$$

3. On a établi

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t)g + Qu.$$

Avec $m(t) = m_0 + m_c - Qt$, on en déduit

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{Qu}{m_0 + m_c - Qt} \quad (1)$$

d'où en séparant les variables

$$dv = -g dt + u \frac{Q dt}{m_0 + m_c - Qt}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} v(t) &= -gt + u \int_0^t \frac{Q dt}{m_0 + m_c - Qt} \\ &= -gt - u \int_0^t \frac{d(m_0 + m_c - Qt)}{m_0 + m_c - Qt} \end{aligned}$$

soit

$$v(t) = -gt - u \ln \left(\frac{m_0 + m_c - Qt}{m_0 + m_c} \right).$$

D'après (1) si $Q > Q_{\min}$, on a $\frac{dv}{dt} > 0$: la vitesse est une fonction croissante du temps. La vitesse maximale est

alors atteinte à l'instant t_m où tout le carburant a été brûlé, soit $Qt_m = m_c$. On a alors

$$v_{\max} = -gt_{\max} - u \ln \frac{m_0}{m_0 + m_c}$$

soit

$$v_{\max} = -\frac{m_c g}{Q} + u \ln \left(1 + \frac{m_c}{m_0} \right).$$

En prenant $Q = Q_{\min} = (m_0 + m_c) \frac{g}{u}$, on calcule

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -\frac{m_c}{m_0 + m_c} u + u \ln \frac{m_0}{m_0 + m_c} \\ &= u \left[\ln \left(1 + \frac{m_c}{m_0} \right) - \frac{m_c}{m_0 + m_c} \right] \end{aligned}$$

soit $v_{\max} = 7,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En prenant $1,2Q_{\min}$, on trouve $v_{\max} = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

13 — Lance à incendie

Considérons le système ouvert Σ^* compris entre la section de diamètre D_1 à l'entrée de l'embout et la section de diamètre D_2 à la sortie de l'embout, **incluant l'embout**.

On lui associe le système fermé Σ défini ainsi :

$\Sigma(t)$: le système Σ^* et la masse δm qui rentre dans le système pendant dt ;

$\Sigma(t+dt)$: le système Σ^* et la masse δm qui sort du système pendant dt .

➤ Ces deux masses sont égales car le régime est stationnaire.

Les vitesses d'entrée et de sortie se déduisent de la conservation du débit volumique (l'eau est incompressible) :

$$V_1 = \frac{Q}{S_1} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{Q}{S_2}.$$

En considérant le fluide parfait, on peut écrire la relation de Bernoulli entre la section d'entrée à la pression P_1 et la section de sortie à la pression P_2 :

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}.$$

Le jet de sortie étant libre, on a $P_2 = P_0$, pression atmosphérique. On a donc

$$P_1 = P_0 + \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2).$$

Formons la quantité de mouvement du système fermé aux instants t et $t+dt$, en notant $\vec{P}_{\Sigma^*}$ la quantité de mouvement constante du système ouvert. On note $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire dans le sens de l'écoulement

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{\Sigma^*} + \delta m V_1 \vec{u}_x = \vec{P}_{\Sigma^*} + \rho Q V_1 dt \vec{u}_x$$

et

$$\vec{P}(t+dt) = \vec{P}_{\Sigma^*} + \delta m V_2 \vec{u}_x = \vec{P}_{\Sigma^*} + \mu Q V_2 dt \vec{u}_x$$

On a donc

$$\frac{\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t)}{dt} = \mu Q (V_2 - V_1) \vec{u}_x.$$

Les forces extérieures sont :

- la force de pression $\vec{F}_{P_1}$ sur la section d'entrée;
- la force de pression $\vec{F}_{ext}$ exercée par l'air sur l'embout;
- la force de pression $\vec{F}_{P_2}$ sur la section de sortie;
- la réaction $\vec{R}$ du pas de vis.

On a

$$\vec{F}_{P_1} = P_1 S_1 \vec{u}_x.$$

La surface latérale et la section de sortie sont soumises à la pression extérieure P_0 uniforme. En complétant par la section d'entrée fictivement soumise à cette même pression P_0 afin de former une surface fermée, on peut donc écrire

$$P_0 S_1 \vec{u}_x + \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{P_2} = \vec{0}$$

d'où

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{P_2} = -P_0 S_1 \vec{u}_x.$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée au système fermé s'écrit

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{P_1} + \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{P_2} + \vec{F}_e$$

soit

$$\mu Q (V_2 - V_1) \vec{u}_x = (P_1 - P_0) S_1 \vec{u}_x + \vec{R}.$$

On a donc

$$\vec{R} = \mu Q (V_2 - V_1) \vec{u}_x - (P_1 - P_0) S_1 \vec{u}_x.$$

En exprimant V_1 et V_2 en fonction du débit volumique, et $P_1 - P_0$ à l'aide de la relation de Bernoulli, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \mu Q^2 \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right) \vec{u}_x - \frac{\mu Q^2}{2} S_1 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \vec{u}_x \\ &= \frac{\mu Q^2}{2} \left[2 \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right) - S_1 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \right] \vec{u}_x \\ &= \frac{\mu Q^2}{2} \left[2 \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right) - S_1 \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right) \left(\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_1} \right) \right] \vec{u}_x \\ &= \frac{\mu Q^2}{2} \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right) \left[2 - \frac{S_1}{S_2} - 1 \right] \vec{u}_x \\ &= \frac{\mu Q^2}{2} \frac{S_1 - S_2}{S_1 S_2} \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) \vec{u}_x \end{aligned}$$

soit

$$\vec{R} = -\frac{\mu Q^2}{2} \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2} \vec{u}_x.$$

Le pas de vis exerce sur l'embout une action « vers l'arrière », opposée au sens de l'écoulement.

Le pas de vis doit donc résister à l'action opposée, soit

$$F = \frac{\mu Q^2}{2} \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2}.$$

Avec $S_1 = \pi D_1^2/4$ et $S_2 = \pi D_2^2/4$, on calcule $F = 720 \text{ N}$

Variante

On peut choisir comme système l'eau comprise entre les sections S_1 et S_2 (sans inclure l'embout).

Le bilan de la quantité de mouvement est inchangé et conduit à

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \mu Q (V_2 - V_1) \vec{u}_x.$$

L'eau est soumise à :

- la force de pression $P_1 S_1 \vec{u}_x$ en entrée;
- la force de pression $-P_0 S_2 \vec{u}_x$ en sortie;
- la force $\vec{F}_{embout/eau}$ de la part de l'embout.

On a

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = P_1 S_1 \vec{u}_x - P_0 S_2 \vec{u}_x + \vec{F}_{embout/eau},$$

On en déduit

$$\vec{F}_{embout/eau} = \mu Q (V_2 - V_1) \vec{u}_x - P_1 S_1 \vec{u}_x + P_0 S_2 \vec{u}_x.$$

L'embout seul (sans inclure l'eau qu'il contient) est soumis à :

- la force $\vec{F}_{eau/embout}$ due à l'eau qu'il contient;
- la force $\vec{F}_{air}$ de pression de l'air extérieur;
- la réaction $\vec{R}$ du pas de vis.

L'embout étant fixe, on peut écrire

$$\vec{F}_{eau/embout} + \vec{F}_{air} + \vec{R} = \vec{0}.$$

En fermant la surface latérale de l'embout par les sections S_1 et S_2 soumises (hypothétiquement) à la pression uniforme P_0 , on a pour cette surface fermée

$$\vec{F}_{air} + P_0 S_1 \vec{u}_x - P_0 S_2 \vec{u}_x = \vec{0},$$

d'où

$$\vec{F}_{air} = +P_0 (S_2 - S_1) \vec{u}_x.$$

On a donc

$$\vec{R} = -\vec{F}_{eau/embout} - \vec{F}_{air} = \vec{F}_{embout/eau} - P_0 (S_2 - S_1) \vec{u}_x$$

soit

$$\vec{R} = \mu Q (V_2 - V_1) \vec{u}_x - P_1 S_1 \vec{u}_x + P_0 S_2 \vec{u}_x - P_0 (S_2 - S_1) \vec{u}_x$$

et on retrouve l'expression obtenue par la première méthode

$$\vec{R} = \mu Q (V_2 - V_1) \vec{u}_x - (P_1 - P_0) S_1 \vec{u}_x.$$

Le reste de la résolution est identique à ce qui a été fait précédemment.

15 — Récipient percé

1. Se reporter à la démonstration faite en cours. La hauteur de liquide au dessus de l'orifice est $H - h$, d'où

$$v = \sqrt{2g(H-h)}.$$

2. Le jet libre est soumis à la pesanteur. Chaque particule de fluide a la même trajectoire qu'une masse ponctuelle en chute libre : $m\vec{a} = m\vec{g}$.

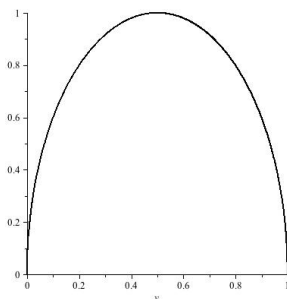
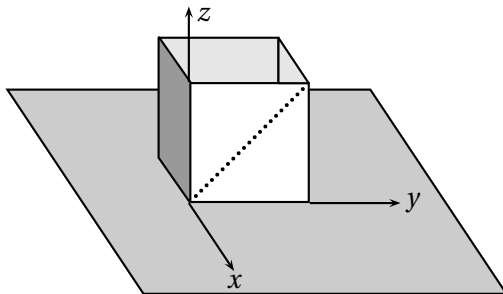
Selon un axe Ox horizontal, on a $m\frac{dv_x}{dt} = 0$, d'où $v_x = \sqrt{2g(H-h)}$, vitesse initiale.

Selon l'axe Oz vertical descendant, on a $\frac{dv_z}{dt} = g$, d'où $v_z(t) = gt$ (le jet étant horizontal en sortie du récipient), et $z(t) = \frac{gt^2}{2}$. Le jet touche le support à

l'instant t_f tel que $z(t_f) = h$, soit $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. La distance au récipient est alors

$$L(h) = x(t_f) = v_x \cdot t_f = \sqrt{2g(H-h)} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

soit $L(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$.



La hauteur d'un point d'abscisse y est $h = y$. Le lieu des points d'impact sur le plan a donc pour équation

$$x = 2\sqrt{y(H-y)}.$$

Le maximum a lieu pour $y = H/2$ et vaut $x_{\max} = H$.

17 — Étude d'une éolienne

1. L'air étant considéré comme un fluide incompressible, le débit volumique est constant à travers toute section d'un tube de courant :

$$Sv = S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

2. Comme on ne tient pas compte de la pesanteur, le théorème de Bernoulli s'écrit

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{Cte}$$

Entre les sections S_1 et S_A , on obtient

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2},$$

d'où

$$p_A = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v^2)$$

Entre les sections S_B et S_2 , on obtient

$$\frac{p_B}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_2^2}{2},$$

d'où

$$p_B = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v^2)$$

3. Soit dm la masse qui entre en A pendant dt et qui sort en B pendant dt .

La quantité de mouvement du système fermé compris entre S_A et S_B à l'instant t s'écrit :

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{AB}(t) + dm\vec{v}$$

et

$$\vec{P}(t+dt) = \vec{P}_{AB}(t+dt) + dm\vec{v}.$$

L'écoulement étant permanent :

$$\vec{P}_{AB}(t+dt) = \vec{P}_{AB}(t).$$

On a donc

$$d\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = \vec{0},$$

soit $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$.

Le théorème de la résultante dynamique s'écrit

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_H$$

où $\vec{F}_A$ est la force exercée sur la surface S_A par l'air situé avant l'hélice, $\vec{F}_B$ est la force exercée sur la surface S_B par l'air situé après l'hélice, et $\vec{F}_H$ la force exercée par l'hélice sur la tranche de gaz.

On a donc $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_H = \vec{0}$.

Comme $\vec{F}_A = p_A S \vec{e}_z$ et $\vec{F}_B = -p_B S \vec{e}_z$, la force $\vec{F} = -\vec{F}_H$ exercée par l'air sur l'hélice est donnée par

$$\vec{F} = (p_A - p_B) S \vec{e}_z.$$

Avec les expressions de p_A et p_B obtenues précédemment, on en déduit hélice s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{\mu S}{2} (v_1^2 - v_2^2) \vec{e}_z,$$

Comme $v_1 > v_2$, cette force est dirigée selon $\vec{e}_z$.

4. On répète le même raisonnement pour le gaz compris entre S_1 et S_2 :

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{12}(t) + dm \vec{v}_1$$

et

$$\vec{P}(t+dt) = \vec{P}_{12}(t+dt) + dm \vec{v}_2$$

avec $\vec{P}_{12}(t+dt) = \vec{P}_{12}(t)$ en régime permanent. On en déduit, comme $dm = D_m dt$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Le système est délimité par une surface fermée soumise à la pression uniforme P_0 . La résultante des forces de pression est donc nulle. Il reste la force exercée par l'hélice $\vec{F}_H = -\vec{F}$. On en déduit

$$\vec{F} = -D_m (v_2 - v_1) \vec{e}_z.$$

5. Comme $D_m = \mu S v$, on a

$$\frac{\mu S}{2} (v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = -\mu S v (v_2 - v_1)$$

d'où

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

6. Effectuons un bilan d'énergie cinétique pour le système compris entre S_1 et S_2 :

$$E_c(t) = E_{c,12}(t) + \frac{1}{2} dm v_1^2$$

et

$$E_c(t+dt) = E_{c,12}(t+dt) + \frac{1}{2} dm v_2^2.$$

En régime permanent $E_{c,12}(t+dt) = E_{c,12}(t)$. Comme $dm = \mu S v$, on a

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\mu S v}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

La puissance des forces de pression s'écrit

$$P_p = P_0 S_1 v_1 - P_0 S_2 v_2 = 0$$

d'après la conservation du débit volumique ($S_1 v_1 = S_2 v_2$). En notant P_H la puissance fournie par l'hélice à l'air :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_H + P_p = P_H$$

$$\frac{\mu S v}{2} (v_2^2 - v_1^2) = P_H.$$

La puissance reçue par l'hélice vaut $P = -P_H$, soit

$$P = \frac{\mu S v}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{\mu S}{2} \frac{v_1 + v_2}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{\mu S}{4} v_1^3 (1+x)(1-x^2).$$

On a

$$P = \frac{\mu S v_1^3}{4} (1+x)(1-x^2).$$

7. La puissance est maximale pour

$$\frac{dP}{dx} = 0 = \frac{\mu S v_1^3}{4} (1-2x-3x^2)$$

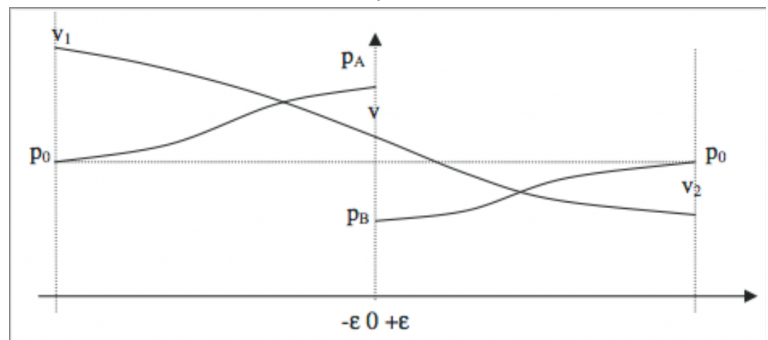
soit pour $x = -1$ qui n'est pas à retenir physiquement ($x > 0$) et pour $x = \frac{1}{3}$.

La puissance P est maximale pour $x = 1/3$.

On a alors

$$P_{\max} = \frac{8\mu S v_1^3}{27}.$$

8. Allure des courbes $v(z)$ et $p(z)$:



Au niveau de l'éolienne, la pression subit une discontinuité, tandis que la vitesse est continue.

9. L'énergie cinétique δE_c qui traverse la section S pendant dt est celle des particules contenues dans le volume $d\tau = S \times v_1 dt$, soit

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \mu d\tau v_1^2 = \frac{\mu S v_1}{2} v_1^2 dt$$

Le débit $\dot{E}_c = dE_c/dt$ s'écrit donc

$$\dot{E}_c = \frac{\mu S v_1^3}{2}.$$

Le rendement théorique vaut $r_{th} = P/\dot{E}_c$, soit

$$r_{th} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{2}.$$

10. On calcule $P_{\max} = 940 \text{ W}$ et $r_{th} = 0,59$.

11. Si $P_{\text{réel}} = P_{\max}$, alors $C_p = 0,59$.

Si $P_{\text{réel}} = 400 \text{ W}$, alors $C_p = 0,25$.