

## Sujet d'entraînement

## Bilans — solution

## Partie I : Mégagaf (CCINP PSI 2024)

## 2 — Vitesse d'expulsion nécessaire à l'équilibre

1. Le système {candidat + flyboard + eau contenue} est un **système ouvert** : on ne peut donc pas lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

2. En régime stationnaire les grandeurs  $v_e$ ,  $v_s$ ,  $S_e$  et  $S_s$  sont **indépendantes du temps**.

3. **Instant  $t$**  :  $\Sigma$  comprend  $\Sigma^*$  et l'eau qui va entrer entre  $t$  et  $t + dt$ .

**Instant  $t + dt$**  :  $\Sigma$  comprend  $\Sigma^*$  et l'eau qui sort entre  $t$  et  $t + dt$ .

4. Le débit volumique est défini de façon générale par

$$D_v = \iint_S v \, dS.$$

L'eau étant incompressible, le débit volumique est conservé entre la section d'entrée et les sections de sortie.

À l'entrée on a

$$D_v = S_e v_e.$$

À la sortie, on a

$$D_v = 2S_s v_s.$$

5. Notons  $\vec{p}^*$  la quantité de mouvement du système ouvert  $\Sigma^*$ , indépendante du temps pour l'écoulement stationnaire considéré.

À l'instant  $t$ , la quantité de mouvement de  $\Sigma$  est

$$\vec{p}(t) = \vec{p}^* + \delta m v_e.$$

La masse rentrant pendant  $dt$  étant

$$\delta m = \mu D_v dt,$$

on a

$$\vec{p}(t) = \vec{p}^* + \mu D_v v_e \vec{e}_z.$$

En régime stationnaire, la masse sortant pendant  $dt$  est aussi  $\delta m$ . On a donc

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}^* + \delta m \vec{v}_s,$$

soit

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}^* - \mu D_v v_s \vec{e}_z.$$

On forme

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -\mu D_v (v_s + v_e) \vec{e}_z.$$

Les forces extérieures sont :

- le poids  $-M_{\text{eau}} g \vec{e}_z$  ;
- la force  $\vec{F}_{\text{paroi}}$  exercée par les paroi sur l'eau ;
- la résultante  $\vec{F}_p$  des forces de pression sur les surfaces d'entrée et de sortie.

La pression valant  $P_0$  dans les jets libres de sortie, on a

$$\vec{F}_p = (P_e S_e + P_0 2S_s) \vec{e}_z.$$

Le bilan que quantité de mouvement s'écrit alors

$$-\mu D_v (v_s + v_e) \vec{e}_z = -M_{\text{eau}} g \vec{e}_z + \vec{F}_{\text{paroi}} + P_e S_e + 2P_0 S_s \vec{e}_z$$

D'après le principe des actions réciproques, la force exercée par l'eau sur les parois est  $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{paroi}}$ , d'où

$$F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}} g + \mu D_v (v_s + v_e),$$

soit d'après la question Q4 :

$$F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}} g + \mu D_v \left( \frac{D_v}{2S_s} + \frac{D_v}{S_e} \right).$$

On a donc

$$F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}} g + \mu D_v^2 \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2S_s} + \frac{1}{S_e}.$$

6. L'écoulement est parfait, stationnaire et incompressible. On peut appliquer le théorème de Bernoulli entre un point à l'entrée du système et un point à la sortie, le long d'une ligne de courant :

$$P_e + \mu g z_e + \frac{\mu v_e^2}{2} = P_0 + \mu g z_s + \frac{\mu v_s^2}{2}$$

avec  $z_s - z_e = H$ , soit

$$P_e = P_0 + \mu g H + \frac{\mu D_v^2}{2} \left( \frac{1}{4S_s^2} - \frac{1}{S_e^2} \right).$$

7.

$$F = P_0 (2S_s + S_e) - M_{\text{eau}} g + \mu g H S_e + \mu D_v^2 \alpha + \frac{\mu S_e}{2} \left( \frac{D_v^2}{4S_s^2} - \frac{D_v^2}{S_e^2} \right)$$

soit

$$F = P_0 (2S_s + S_e) - M_{\text{eau}} g + \mu g H S_e + \mu D_v^2 \beta$$

avec

$$\beta = \alpha + \frac{S_e}{8S_s^2} - \frac{1}{2S_e} = \frac{1}{2S_s} + \frac{1}{S_e} + \frac{S_e}{8S_s^2} - \frac{1}{2S_e}$$

soit

$$\beta = \frac{S_e}{8S_s^2} + \frac{1}{2S_e} + \frac{1}{2S_s}$$

8. En ne prenant en compte que la masse d'eau contenue dans le tube d'alimentation, on a

$$M_{\text{eau}} = \mu S_e H.$$

On en déduit l'expression simplifiée

$$F = P_0(2S_s + S_e) + \mu D_v^2 \beta.$$

9. Le système {candidat + flyboard à vide} est soumis à

- son poids  $M\vec{g}$  ;
- la force  $\vec{F}$  exercée par le jet ;
- la force  $\vec{F}_{\text{atm}}$  de pression atmosphérique s'exerçant sur la surface extérieure  $\Sigma_{\text{ext}}$  en contact avec l'atmosphère (qui n'inclut pas les sections  $S_e$  et  $2S_s$ ).

Considérons la surface fermée  $\Sigma_{\text{ext}} \cup S_e \cup 2S_s$  ; la résultante des forces de pression  $P_0$  uniforme est nulle, soit

$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{atm}} + P_0(S_e + 2S_s)\vec{e}_z.$$

Le système {candidat + flyboard à vide} est à l'équilibre si

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{atm}}$$

soit

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{F} - P_0(S_e + 2S_s)\vec{e}_z.$$

On en déduit en projetant selon  $\vec{e}_z$

$$0 = -Mg + P_0(2S_s + S_e) + \mu D_v^2 \beta - P_0(S_e + 2S_s) \\ = -Mg + \mu D_v^2 \beta.$$

Le débit volumique correspondant est donc

$$D_{v,\text{eq}} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu\beta}}.$$

► L'expression de  $\beta$  obtenue à la question 7 peut s'écrire

$$\beta = \frac{S_e^2 + 4S_s^2 + 4S_e S_s}{8S_s^2 S_e} = \frac{(S_e + 2S_s)^2}{8S_s^2 S_e}.$$

On a donc bien  $\beta > 0$  (il figure dans une racine carrée dans le résultat établi ici).

10. On a d'une part

$$D_v = v_e S_e$$

d'où

$$v_e = \frac{6 \times 10^{-2}}{80 \times 10^{-4}} = \frac{60}{8}$$

soit

$$v_e = 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

D'autre part

$$D_v = 2v_s S_s$$

d'où

$$v_s = \frac{6 \times 10^{-2}}{2 \times 25 \times 10^{-4}} = \frac{60}{5}$$

soit

$$v_s = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

### 3 — Puissance de la pompe

#### 1 Non prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

11. Si on ne prend pas en compte la perte de charge dans le tuyau, on peut utiliser le résultat de la question 6, soit

$$\Delta P = \mu g H + \frac{\mu D_v^2}{2} \left( \frac{1}{4S_s^2} - \frac{1}{S_e^2} \right) \\ = 10^3 \times 10 \times 5 \\ + \frac{10^3 \times (6 \times 10^{-2})^2}{2} \left( \frac{1}{4 \times (25 \times 10^{-4})^2} - \frac{1}{(80 \times 10^{-4})^2} \right) \\ \approx 5 \times 10^4 + 2(4 \times 10^4 - 2 \times 10^4) = 9 \times 10^4 \text{ Pa} = 0,9 \text{ bar}.$$

On a donc

$$\Delta P = 0,9 \text{ bar}.$$

#### 2 Prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

12. D'après la relation de Bernoulli, l'analyse dimensionnelle donne

$$[\Delta P_c] = [\mu v^2] = [\mu v_e^a] \left[ \frac{\ell \varepsilon^b}{d^2} \right]$$

On a donc en identifiant

$$a = 2 \quad \text{et} \quad b = 1.$$

13. La puissance des forces de pression est donnée par

$$P_{\text{pression}} = (P_e + \Delta P_c - P_0) D_v.$$

On a donc

$$P_{\text{pompe}} = (P_e + \Delta P_c - P_0) D_v.$$

## 1 — Préliminaire

1. Le système  $\Sigma^*$  constitué du fluide entre l'entrée E et la sortie S est un système ouvert.

On construit un système fermé  $\Sigma$  associé :

- à l'instant  $t$ ,  $\Sigma$  est constitué du fluide dans  $\Sigma^*$  et de la masse  $\delta m_e$  de fluide qui rentre dans  $\Sigma^*$  entre  $t$  et  $t + dt$ ;
- à l'instant  $t + dt$ ,  $\Sigma$  est constitué du fluide dans  $\Sigma^*$  et de la masse  $\delta m_s$  de fluide qui sort dans  $\Sigma^*$  entre  $t$  et  $t + dt$ .

La masse de  $\Sigma^*$  est constante en régime stationnaire. La conservation de la masse entre  $t$  et  $t + dt$  pour le système fermé s'écrit

$$m(\Sigma^*) + \delta m_e = m(\Sigma^*) + \delta m_s$$

d'où  $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$ , avec  $\delta m = D_m dt$  où  $D_m$  est le débit massique.

L'énergie interne du système fermé est

$$U_\Sigma(t) = U_{\Sigma^*} + \delta U_e = U_{\Sigma^*} + u_e D_m dt$$

et

$$U_\Sigma(t + dt) = U_{\Sigma^*} + \delta U_s = U_{\Sigma^*} + u_s D_m dt.$$

Sa variation est donc

$$dU = D_m(u_s - u_e) dt.$$

Le premier principe appliqué au système fermé s'écrit

$$dU = \delta W + \delta Q.$$

Le travail reçu s'écrit en décomposant le travail des forces de pression en amont et en aval (travail de transvasement)

$$\delta W = +p_e S_e v_e dt - p_s S_s v_s dt + \delta W_u$$

d'où

$$D_m(u_s - u_e) dt = p_e S_e v_e dt - p_s S_s v_s dt + \delta W_u + \delta Q$$

On peut écrire

$$\delta m = D_m dt = \mu_e S_e v_e dt = \mu_s S_s v_s dt$$

d'où

$$D_m(u_s - u_e) dt + \left( \frac{p_s}{\mu_s} - \frac{p_e}{\mu_e} \right) D_m dt = \delta W_u + \delta Q.$$

On fait apparaître le travail utile massique  $w_u$  et le transfert thermique massique  $q$  avec

$$\delta W_u = w_u D_m dt \quad \text{et} \quad \delta Q = q D_m dt.$$

On obtient alors

$$\left( u_s + \frac{p_s}{\mu_s} \right) - \left( u_e + \frac{p_e}{\mu_e} \right) = w_u + q,$$

soit en introduisant l'enthalpie massique  $h = u + \frac{p}{\mu}$  :

$$h_s - h_e = w_u + q.$$

## 2 — Cycle de Hirn

2. Partant d'un liquide juste saturant, la compression se fera dans le domaine du liquide. On nous donne la variation d'entropie pour une phase condensée :

$$\Delta S = C \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

La compression étant isentropique, on a  $\Delta S = 0$ , d'où  $T_1 = T_0$ .

Pour une phase condensée, on a  $\Delta h = c_p \Delta T$ , soit

$$h_1 - h_0 = c_p(T_1 - T_0).$$

Comme  $T_1 = T_0$ , on a

$$h_1 = h_0.$$

Pour un liquide, une évolution isentropique peut donc être considérée comme isenthalpique; son évolution dans le diagramme des frigoristes est donc un **segment vertical**.

3. Courbes dans le diagramme des frigoristes :

La « courbe en cloche » est la courbe de saturation, sous laquelle se trouve le domaine diphasé. Sa branche de gauche est la courbe d'ébullition (liquide saturant), sa branche de droite est la courbe de rosée (vapeur saturante).

Par construction, les droites verticales sont les isenthalpes, tandis que les droites horizontales sont les isobares.

Les courbes en traits plein dans le domaine vapeur sont les isothermes.

Les courbes en tirets sont les isentropes.

Dans le domaine diphasé, les isothermes sont horizontales, tandis qu'elles sont verticales dans le domaine liquide.

**Construction du cycle**

L'état 0 est sur la courbe d'ébullition à la pression 0,04 bar.

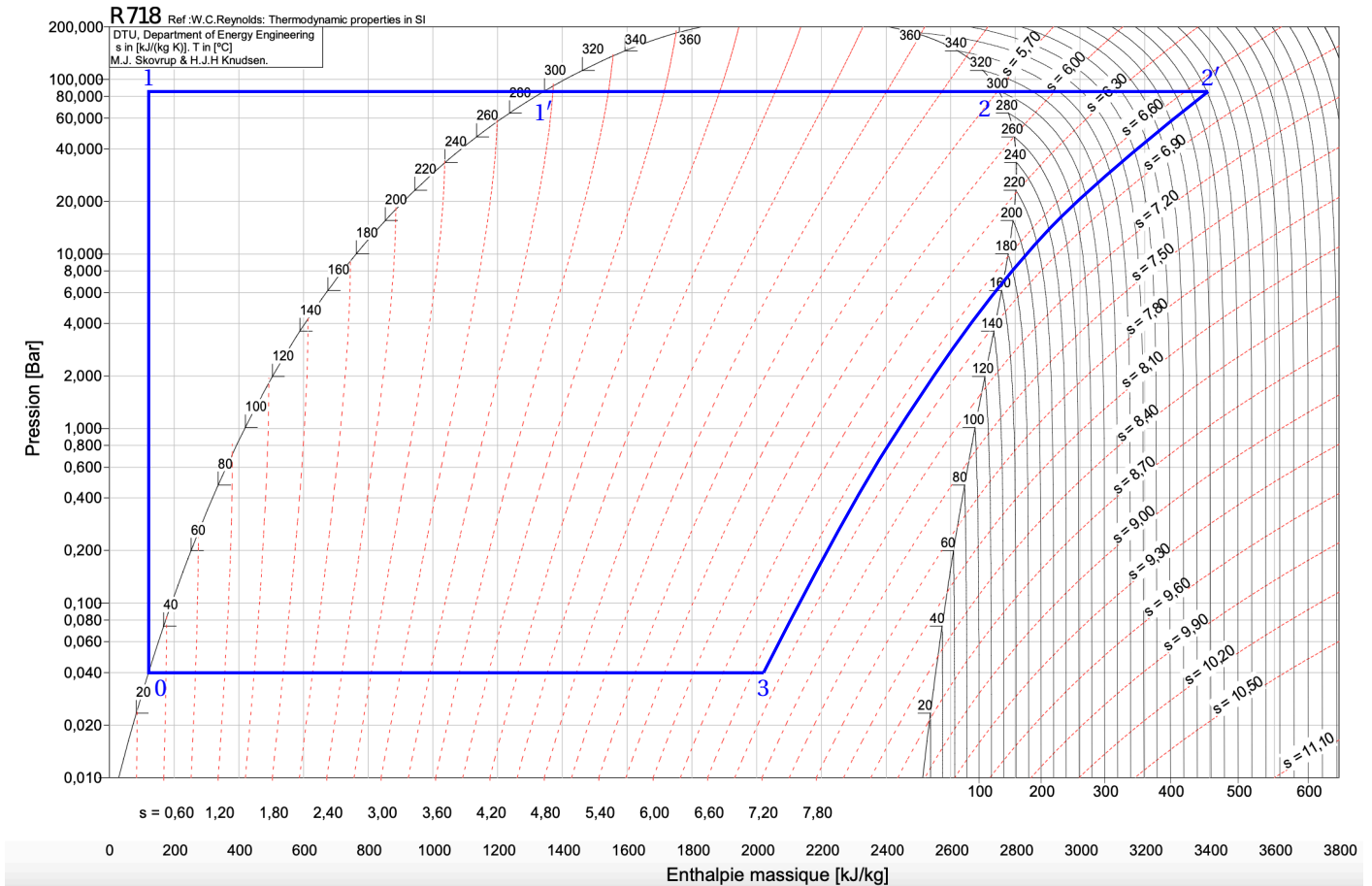
L'évolution 0 → 1 dans la pompe est une isenthalpe verticale d'après la question précédente, jusqu'à la pression 85,8 bar (état 1).

La transformation 1 → 1' → 2 → 2' est isobare. L'état 1' est sur la courbe d'ébullition et l'état 2 sur la courbe de rosée. L'évolution se poursuit jusqu'au point 2' sur l'iso-

therme 500 °C.

L'évolution 2' → 3 suit une courbe isentropique, jusqu'à la pression initiale de 0,04 bar.

On revient au point 0 par une isobare (dans le condenseur).



4. Le titre massique se calcule par la règle des moments, avec les enthalpies massiques ou les entropies massiques.

L'entropie massique étant donnée pour l'état 2' et l'évolution 2' → 3 étant isentropique, on a donc la valeur précise de l'entropie massique pour l'état 3. Nous aurons donc le titre massique en vapeur à l'état 3 avec la plus grande précision en utilisant la règle des moments avec les entropies massiques :

$$x_3 = \frac{s_3 - s_0}{s_V - s_0}$$

où  $s_V$  est l'entropie massique du point de l'isobare à 0,040 bar sur la courbe de rosée.

On a

$$s_3 = s_{2'} = 6,68 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On donne

$$s_0 = 0,42 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad s_V = 8,47 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On en déduit

$$x_3 = \frac{6,68 - 0,42}{8,47 - 0,42}$$

1. L'application numérique a été faite en gardant la valeur non arrondie de  $x_3$ .

soit  $x_3 = 0,78$ .

On en déduit alors l'enthalpie massique au point 3 :

$$h_3 = x_3 h_V + (1 - x_3) h_0 = 0,78 \times 2554 + (1 - 0,78) \times 121$$

soit  $h_3 = 2013 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

5. L'efficacité du cycle est définie par

$$\eta = \frac{\text{énergie coûteuse}}{\text{énergie utile}}.$$

Ici, l'énergie utile est le travail cédé par le fluide à la turbine (étape 2' → 3), soit

$$w_{\text{utile}} = h_{2'} - h_3.$$

L'énergie coûteuse est l'énergie thermique cédée par la source chaude, soit

$$q_{2' \rightarrow 1} = h_{2'} - h_1.$$

On a donc

$$\eta = \frac{h_{2'} - h_3}{h_{2'} - h_1}.$$

D'après les données de l'énoncé et la question précédente, comme  $h_1 = h_0$ , on a

$$\eta = \frac{3391 - 2013}{3391 - 121}$$

soit  $\eta = 0,42$ .

6. Le premier principe s'écrit

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f.$$

Le cycle de Carnot étant réversible, le second principe s'écrit

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}.$$

L'efficacité est

$$\eta_C = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

soit

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

La température maximale est  $T_c = 500^\circ\text{C} = 773\text{ K}$ .

La température minimale est  $T_f = 29^\circ\text{C} = 302\text{ K}$ .

On a donc  $\eta_C = 0,61$ .

L'efficacité du cycle réel est inférieure à celle du cycle de Carnot en raison des irréversibilités des transferts thermiques (la température du fluide n'est pas égale à celle des sources; les transferts thermiques correspondants sont donc irréversibles).

On peut calculer le rendement de la machine :

$$\rho = \frac{\eta}{\eta_C}$$

soit  $\rho = 0,69$ .

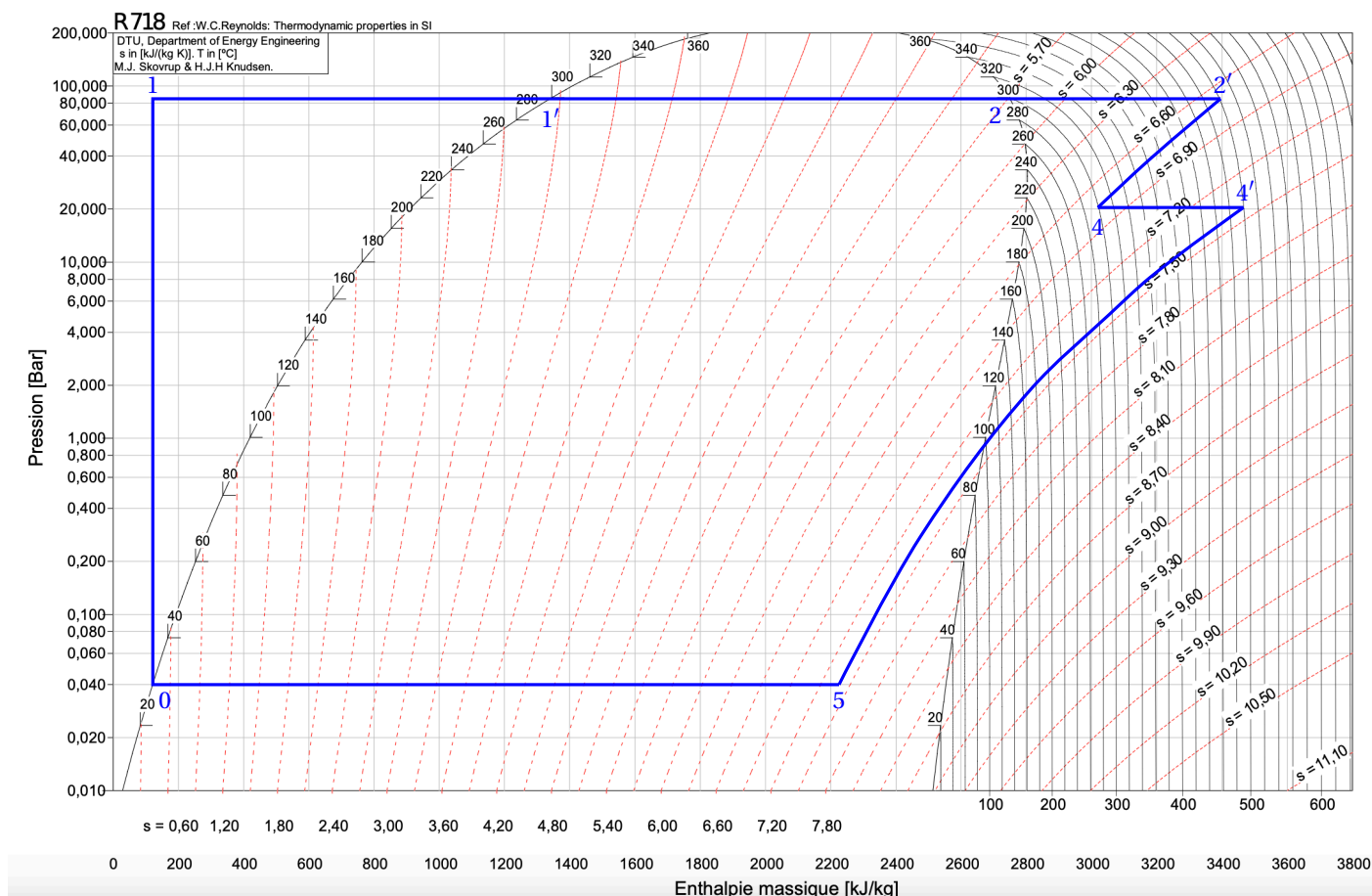
### 3 — Cycle à double surchauffe

7. La partie  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1' \rightarrow 2 \rightarrow 2'$  est inchangée par rapport au cycle précédent.

La détente isentropique dans la turbine HP suite la même courbe que l'état  $2 \rightarrow 3$  précédente, mais s'arrête au point 4 sur l'isotherme  $T_4 = 300^\circ\text{C}$ .

L'étape  $4 \rightarrow 4'$  est une surchauffe isobare, donc un segment horizontal jusqu'à l'isotherme  $T_{4'} = 500^\circ\text{C}$ .

On suit ensuite une détente isentropique  $4' \rightarrow 5$  dans la turbine BP jusqu'à la pression 0,40 bar.



► Avec un tel cycle, il semble difficile de dire que  $x_5 \approx 1$ . On obtient cependant un mélange plus riche en vapeur pour le cycle avec double surchauffe (on trouve  $x_5 0,91$ ). Pour obtenir  $x_5 \approx 1$ , il faudrait devenir sur certaines des hypothèses relatives au fonctionnement. Par exemple, considérer des évolutions irréversibles dans les turbines, ce qui entraîne une valeur supérieure de  $h_5$ .

Le travail utile récupéré est celui échangé au niveau des deux turbines, soit pour le travail reçu par l'extérieur :

$$w_{\text{récup}} = -w_{2' \rightarrow 4} - w_{4' \rightarrow 5} = h_{2'} - h_4 + h_{4'} - h_5.$$

On lit  $h_5 = 2220 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $h_4 = 3020 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $h_{4'} = 3460 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

On donne  $h_{2'} = 3391 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . On calcule alors

$$w_{\text{récup}} = 1611 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

L'énergie « coûteuse » est celle dépensée dans les étapes de chauffe  $1 \rightarrow 2'$  et de surchauffe  $4 \rightarrow 4'$  soit

$$q_{\text{coût}} = h_{2'} - h_1 + h_{4'} - h_4 = 3391 - 121 + 3460 - 3020 = 3710 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

L'efficacité vaut alors

$$\eta = \frac{w_{\text{récup}}}{q_{\text{coût}}} = \frac{1611}{3710}$$

soi  $\eta = 0,43$ .

L'augmentation de l'efficacité due à la double surchauffe est minime ; l'intérêt de l'opération est d'éviter d'endommager la turbine avec des gouttes d'eau.

## 4 — Cycle réel d'une tranche nucléaire

8. Les différents éléments ne sont pas traversés par le même débit massique.

Dans un échangeur thermique, le premier principe industriel s'écrit

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{\text{th}},$$

où  $\mathcal{P}_{\text{th}}$  est la puissance thermique reçue par le fluide.

Dans une turbine adiabatique, le premier principe industriel s'écrit

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u,$$

où  $\mathcal{P}_u$  est la puissance mécanique utile reçue par le fluide.

La puissance thermique « coûteuse » est celle fournie à l'eau du circuit secondaire par l'eau du circuit primaire dans les échangeurs principaux. D'après le tableau, le débit massique y est

$$D_m = 5412,1 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{5412,1 \times 10^3}{3600} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'enthalpie massique vaut  $h_e = 941,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  en entrée et  $h_s = 2788,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  en sortie, d'où

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = D_m(h_s - h_e) = \frac{5412,1 \times 10^3}{3600} (2788,4 - 941,7) = 2,78 \times 10^6 \text{ kW} = 2,78 \text{ GW}.$$

La puissance mécanique utile est celle échangée dans les turbines. Il faut tenir compte des différents débit sortant de chaque turbine.

### Turbine haute pression HP

Elle est alimentée par le débit massique entrant

$$D_{m,\text{HP}} = 5001,9 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{5001,9 \times 10^3}{3600} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

avec une enthalpie massique  $h_{e,\text{HP}} = 2787,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Il faut ensuite considérer les sorties vers les éléments R4, R5 et R6, ainsi que l'échappement de la turbine HP.

Le premier principe industriel s'écrit alors

$$D_{m,\text{HP}} h_{e,\text{HP}} - D_{m,\text{R4}} h_{\text{R4}} - D_{m,\text{R5}} h_{\text{R5}} - D_{m,\text{R6}} h_{\text{R6}} - D_{m,\text{echap,HP}} h_{\text{echap,HP}} = \mathcal{P}_{\text{récup,HP}}$$

Avec le tableau fourni, on calcule

$$\mathcal{P}_{\text{récup,HP}} = [5001,9 \times 2787,1 - 402,1 \times 2562,8 - 208,4 \times 2622,6 - 214,3 \times 2682,5 - 4177,1 \times 2562,8] \frac{1000}{3600}$$

soit

$$\mathcal{P}_{\text{récup,HP}} = 301 \text{ kW} = 0,301 \text{ GW}.$$

On fait de même avec la turbine basse pression, les échangeurs concernés étant R1, R2 et R3 :

$$D_{\text{m,BP}} h_{\text{e,BP}} - D_{\text{m,R1}} h_{\text{R1}} - D_{\text{m,R2}} h_{\text{R2}} - D_{\text{m,R3}} h_{\text{R3}} - D_{\text{m,echap,BP}} h_{\text{echap,BP}} = \mathcal{P}_{\text{récup,BP}}$$

Avec le tableau fourni, on calcule

$$\mathcal{P}_{\text{récup,BP}} = [3704,0 \times 2970,4 - 134,2 \times 2377,8 - 235,4 \times 2538,9 - 281,4 \times 2731,5 - 3053,0 \times 2242,2] \frac{1000}{3600}$$

soit

$$\mathcal{P}_{\text{récup,BP}} = 687 \text{ kW} = 0,687 \text{ GW}.$$

La puissance mécanique utile récupérée vaut donc

$$\mathcal{P}_{\text{récup}} = \mathcal{P}_{\text{récup,HP}} + \mathcal{P}_{\text{récup,BP}} = 0,988 \text{ GW}.$$

L'efficacité est du cycle est alors donnée par

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{récup}}}{\mathcal{P}_{\text{th}}} = \frac{0,687}{2,78}$$

soit  $\eta = 0,36$  .

La puissance utile disponible aux bornes de l'alternateur vaut donc  $\mathcal{P}_{\text{u}} = 988 \text{ MW}$ .