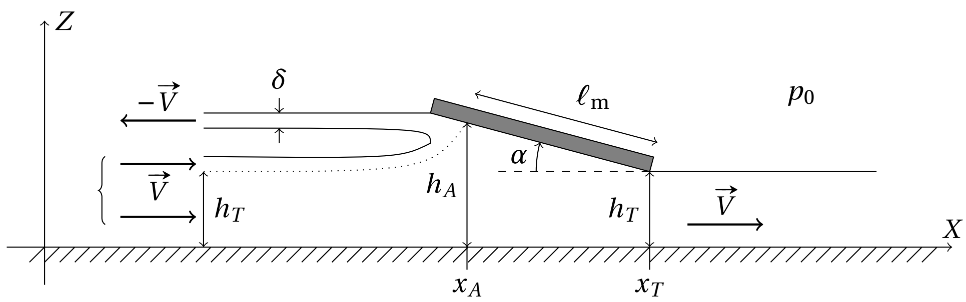
Sujet d'entraînement **Bilans (difficile)**

Physique du skimboard (Centrale PC 2011)

Le skimboard est un sport qui se pratique au bord de la plage. Ce problème s'intéresse à une pratique nommée « flat ». À marée basse, l'eau qui se retire lentement laisse des étendues où seule subsiste une mince couche d'eau. Le sportif lance une planche devant lui, court et monte dessus : il peut ainsi glisser sur plusieurs mètres. La planche est légèrement incliné, l'avant pointant vers le haut. Messieurs Tuck et Dixon, de l'Université d'Adélaïde (Australie), ont proposé le modèle suivant pour rendre compte du mouvement de la planche.
Le référentiel liée à la plage est supposé galiléen. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ. Elle est surmontée par de l'air à la pression p_0 ou par la planche. L'écoulement de l'eau est supposé plan. L'influence de la gravité est négligée dans l'étude de l'écoulement. La planche, supposée rectangulaire de largeur L, se déplace à la vitesse $-\vec{V} = -V\vec{u}_x$ constante par rapport au référentiel liée à la plage et fait un angle α avec l'horizontale (dit angle d'attaque) supposé petit dans tout le problème. Loin de la planche, l'eau est supposée au repos dans le référentiel lié à la plage.
La figure ci-dessous représente quelques paramètres du problème dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la planche. Le mouvement de la planche provoque un jet d'eau d'épaisseur δ qui se détache de l'avant de la planche.



Au-dessus de la ligne de courant en pointillé, l'eau constitue le jet. En-dessous, l'eau s'écoule vers l'arrière de la planche. Loin à l'avant de la planche, la hauteur d'eau est $h_T + \delta$ tandis qu'elle vaut h_T derrière. La surface de la planche qui n'est pas en contact avec le jet est dite « surface mouillée ». Elle est de longueur ℓ_m. La hauteur d'eau h_A désigne la hauteur du point de stagnation (défini comme l'intersection de la planche la ligne de courant en pointillé).
On notera $\vec{P}(\Sigma)|_{\mathcal{R}}$ la quantité de mouvement d'un système Σ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ et on définit $P_x(\Sigma) = \vec{P}(\Sigma)|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_x$.
Sauf indication contraire, l'étude sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la planche où l'écoulement est stationnaire.

Partie 1 — Calcul de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur la planche

Dans cette partie, on travaillera dans la région située sous la surface mouillée ($x \in [x_A; x_T]$). On suppose que la hauteur d'eau h, la pression dans l'eau p et le champ des vitesses dans l'eau $\vec{v}$ ne dépendent que de l'abscisse x du point de l'écoulement considéré. Le champ des vitesses est *a priori* bidimensionnel mais en de nombreux points de l'écoulement la composante verticale de la vitesse est négligeable devant la composante horizontale ; ainsi $\vec{v} \simeq v(x)\vec{u}_x$. On note $\vec{v}(x_A) = v_a\vec{u}_x$ où x_A est l'abscisse du point de stagnation.

1 Résultats préliminaires

1. En faisant un bilan de masse sur un système que vous expliciterez, montrer la relation $h_T V = h(x)v(x)$.

2. Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. À quelle relation entre V et $v(x)$ mène-t-elle ? Cette relation est en contradiction avec la relation précédente : lever le paradoxe.

3. Rappeler l'énoncé du théorème de Bernoulli.

➤ Dans le cadre de cet écoulement, on admet que le théorème de Bernoulli peut s'appliquer en tout point de l'écoulement et pas seulement le long d'une ligne de courant.

2 Calcul direct

4. Soit x désignant l'abscisse d'un point situé sur la surface mouillée de la planche. Montrer que

$$p(x) - p_0 = \frac{1}{2}\rho V^2 \left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}\right].$$

5. Établir une expression de $h(x)$ en fonction de α, h_T, x et x_T.

6. On suppose que la pression de l'eau au contact de la surface non mouillée de la planche est p_0. La résultante totale des forces de pression $\vec{F}$ que les fluides exercent sur la planche possède deux composantes : $\vec{F} = F_x\vec{u}_x + F_z\vec{u}_z$. On cherche leurs expressions approchées dans le cadre des faibles valeurs de l'angle α. Montrer que

$$F_z = \frac{\rho V^2}{2} L\ell_\mathrm{m}(1-\lambda)$$

où l'on donnera l'expression de λ en fonction de h_T et h_A.
Établir l'expression de F_x.

7. Soit T un point situé à l'arrière de la planche. Justifier précisément que le moment des forces de pression $\mathcal{M}$ par rapport à l'axe $(T;\vec{u}_y)$ est

$$\mathcal{M} = K\int_{x_A}^{x_T} (x_T - x)\left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}\right]\mathrm{d}x$$

où l'on exprimera K en fonction de données de l'énoncé. On ne demande pas de calculer cette intégrale.

8. Un calcul, que l'on ne demande pas de mener, permet d'établir que

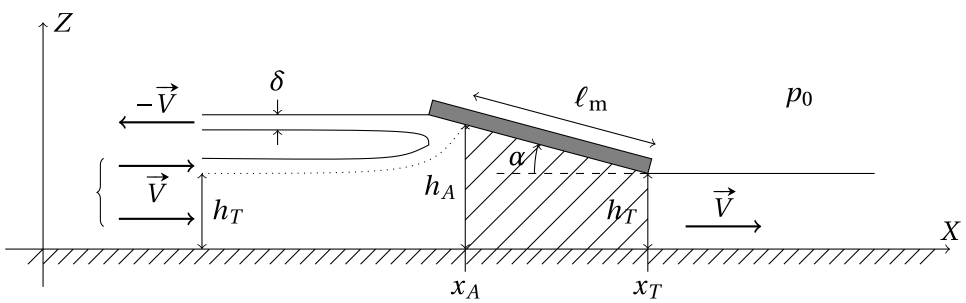
$$\mathcal{M} = \frac{1}{4}\rho V^2 L\ell_\mathrm{m}^2 f(\lambda),$$

où f est une fonction de λ. Exprimer, en fonction de ℓ_m, f et λ, la distance ℓ_p de l'axe $(T;\vec{u}_y)$ à laquelle doit se placer le sportif pour qu'il puisse être à l'équilibre dans $\mathcal{R}$ (on supposera que la planche possède une masse négligeable devant celle du sportif). On admettra que $\ell_\mathrm{p} < \ell_\mathrm{m}$.

3 Calcul par un bilan de quantité de mouvement

On se propose, par un bilan de quantité de mouvement, de retrouver la résultante des forces de pression s'exerçant sur la planche.

9. En choisissant comme système fermé Σ l'eau contenue dans le volume situé sous la planche entre les abscisses x_A et x_T (zone hachurée sur la figure suivante) et celle qui va pénétrer dans ce volume entre les dates t et $t+\mathrm{d}t$, trouver une relation liant $\left.\frac{\mathrm{d}P_x(\Sigma)}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}$, ρ, L, h_T, λ et V.



10. On note p_A la pression en $x = x_A$, soit $p_A = p(x_A)$. Montrer que la composante selon l'axe x de la résultante des forces s'exerçant sur Σ peut s'écrire $(p_A - p_0)h_A L - F_x$.

11. Retrouver les expressions de F_x et F_z établies à la question 1.1.3).

Partie 2 — Mouvement de la planche dans le référentiel terrestre

L'expression de la résultante des forces de pression sur la planche établie dans les questions précédentes en régime stationnaire persiste (approximativement) en régime non stationnaire. On note m la masse du sportif et de la planche.

12. En se plaçant dans le référentiel lié à la plage, montrer que V est solution de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -g\alpha\,.$$

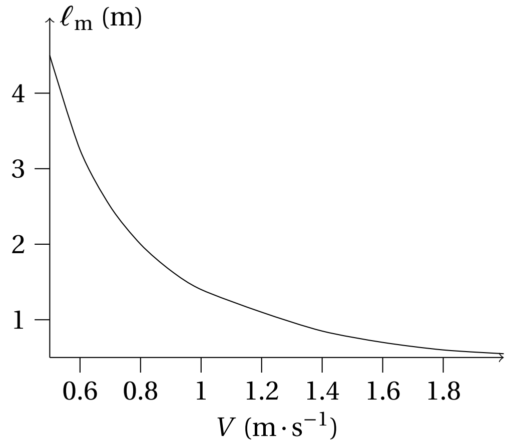
13. On suppose h_T connu.

13.a) Établir l'expression de la fonction $\ell_\mathrm{m}(V,\alpha)$. On fera intervenir les paramètres suivants : m, g, ρ, L et h_T.

13.b) Si l'angle α est constant, expliquer en une phrase pourquoi il est nécessaire que la vitesse V dépasse une valeur minimale.

13.c) Un professeur de physique a filmé son fils en train de faire du skimboard au bord de la plage. La largeur de la planche est $L = 70$ cm, sa longueur $L' = 1{,}40$ m. Il mesure que le skimboard a été lancé avec une vitesse initiale $V(t=0) = 2{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et faisait un angle constant pratiquement égal à $\alpha = 2{,}0°$.

On a tracé (figure suivante) la courbe $\ell_\mathrm{m}(V, \alpha = 2{,}0°)$ avec les paramètres du problème ($m = 35$ kg, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $h_T = 2{,}0$ cm et $\rho = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), où ℓ_m est exprimé en mètre en V en mètre par seconde. Estimer la distance parcourue par l'enfant.

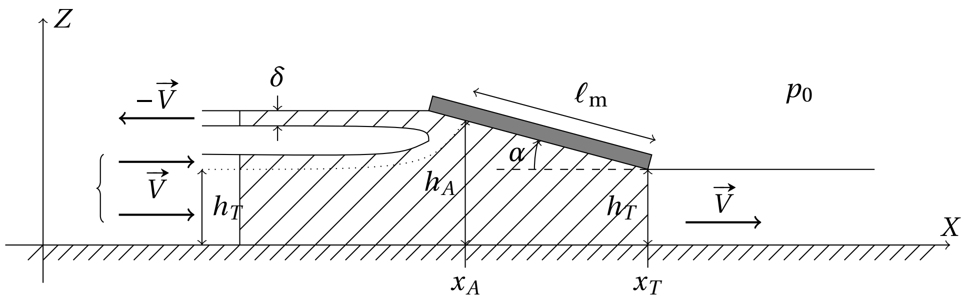


13.d) Le modèle néglige une ou plusieurs forces. Laquelle ou lesquelles ?

Partie 3 — Nécessité du jet d'eau

On se propose dans cette partie de montrer la nécessité de l'existence du jet d'eau pour assurer la consistance du modèle.

14. En choisissant comme système fermé $\overline{\Sigma}$ l'eau contenue dans le volume hachuré représentée dans la figure suivante et celle qui va pénétrer dans ce volume entre les dates t et $t+\mathrm{d}t$, trouver une relation entre $\left.\dfrac{\mathrm{d}P_x(\overline{\Sigma})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$, ρ, L, δ et V.



15. En déduire une relation entre F_z, ρ, L, δ, α et V. Conclure.

16. Donner un ordre de grandeur de δ en utilisant les données numériques de la question précédente pour une vitesse $V = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.