Sujet d'entraînement — Bilans (difficile) — solution

Physique du skimboard

Partie 1 — Calcul de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur la planche

1 Résultats préliminaires

1. Considérons comme système :

— à l'instant t, le fluide compris entre x et x_T, avec $x_A \leqslant x \leqslant x_T$, auquel on ajoute la masse δm_1 de fluide qui franchit la section située en x pendant dt;

— à l'instant $t+dt$ le fluide compris entre x et x_T, avec $x_A \leqslant x \leqslant x_T$, auquel on ajoute la masse δm_2 de fluide qui franchit la section située en x_T pendant dt.

Ce système est fermé par construction.

En régime stationnaire, la masse de la partie commune (comprise entre x et x_T) reste constante :

$$m_{\text{com}}(t) = m_{\text{com}}(t+dt).$$

La masse totale du système fermé est

$$m(t) = m_{\text{com}}(t) + \delta m_1$$

et

$$m(t+dt) = m_{\text{com}}(t+dt) + \delta m_2$$

Comme $m(t) = m(t+dt)$ par construction (système fermé), on en déduit $\delta m_1 = \delta m_2$.

On a $\delta m_1 = Lh(x)v(x)\,dt$ et $\delta m_2 = Lh_T V\,dt$ et . On en déduit

$$\boxed{h_T V = h(x)v(x)}. \qquad (1)$$

2. L'équation locale de la conservation de la masse s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0}. \qquad (2)$$

En régime stationnaire, $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. L'eau étant un liquide incompressible, ρ est constante et l'équation (2) se ramène à

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0.$$

Avec un champ des vitesses unidimensionnel de la forme $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$, on en déduit

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

et $v(x)$ est indépendant de x : $v(x) = v(x_T)$, soit

$$\boxed{v(x) = V}. \qquad (3)$$

La relation (3) est en contradiction avec la relation (1) ; cela conduirait à $h(x) = h_T$.

Considérer un champ des vitesses sans composante verticale ($\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$) n'est qu'une approximation, qui peut entraîner des incohérences :

— un tel champ des vitesses est incompatible avec les conditions aux limites imposées sous la planche : $v(x)\vec{u}_x$ n'est pas tangent à la planche, or il faut que la composante normale à la planche du champ des vitesses soit nulle;

— on ne peut négliger la composante verticale du champ des vitesses lorsque l'on écrit la conservation de la masse localement. Il faut considérer

$$\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_z\vec{u}_z.$$

Le bilan s'écrit

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

En ordre de grandeur

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

L'échelle de longueur caractéristique selon x est ℓ_m, et selon z, $h_A - h_T$. On a donc

$$\frac{v_x}{\ell_m} \sim \frac{v_z}{h_A - h_T}.$$

La composante verticale de la vitesse a pour ordre de grandeur

$$v_z \sim \frac{h_A - h_T}{\ell_m} v_x \sim \alpha v_x.$$

Comme $\alpha \ll 1$, on a bien $v_z \ll v_x$, mais le terme en v_z ne peut être négligé dans le bilan de matière local :

$$\boxed{v_z \ll v_x \quad \text{mais} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} \sim \frac{\partial v_x}{\partial x}}.$$

3. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, d'un fluide incompressible homogène on a, en négligeant la pesanteur[1] :

$$\boxed{\frac{p(x)}{\rho} + \frac{v^2(x)}{2} = C(\mathcal{L})} \qquad (4)$$

cette expression étant constante le long d'une ligne de courant.

1. « L'influence de la gravité est négligée dans l'étude de l'écoulement » *dixit* l'énoncé.

2 Calcul direct

4. En considérant en particulier l'écoulement en x_T, la relation (4) s'écrit

$$\frac{p(x)}{\rho}+\frac{v^2(x)}{2}=\frac{p_0}{\rho}+\frac{V^2}{2}\,.$$

On a donc

$$p(x)-p_0=\rho\frac{V^2}{2}-\rho\frac{v^2(x)}{2}=\rho\frac{V^2}{2}-\rho\frac{h_T^2}{h^2(x)}\frac{V^2}{2}$$

en utilisant (1), d'où

$$\boxed{p(x)-p_0=\frac{1}{2}\rho V^2\left[1-\frac{h_T^2}{h^2(x)}\right]}\,. \qquad (5)$$

5. Comme $\alpha \ll 1$, on a $\dfrac{h(x)-h_T}{x-x_T}=\tan\alpha\sim\alpha$ d'où

$$\boxed{h(x)=h_T-\alpha(x-x_T)} \qquad (6)$$

6. La surface non mouillée est soumise à la même pression p_0 sur chacun de ses côtés; la résultante des forces de pression s'exerçant sur cette partie de la planche est donc nulle.

La surface mouillée est soumise à la pression de l'air p_0 sur sa face supérieure, et à la pression $p(x)$ sur sa face inférieure. En notant $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la plaque, dirigé vers le haut, la résultante des forces de pression s'exerçant sur la plaque s'écrit donc

$$\vec{F}=\iint[p(x)-p_0]\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$$

soit en prenant $\mathrm{d}S=L\,\mathrm{d}\ell$:

$$\vec{F}=\int_{x_A}^{x_T}[p(x)-p_0]L\,\mathrm{d}\ell\,\vec{n}\,.$$

La composante verticale est donnée par

$$F_z=\vec{F}\cdot\vec{u}_z=F\cos\alpha\,.$$

On remarque que $\mathrm{d}\ell\cos\alpha=\mathrm{d}x$. En utilisant la relation (5), on a, en menant les calculs au premier ordre en α :

$$\begin{aligned}F_z&=\frac{\rho V^2}{2}L\int_{x_A}^{x_T}\left(1-\frac{h_T^2}{[h_T-\alpha(x-x_T)]^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\rho V^2}{2}L\int_{x_A}^{x_T}\left(1-\left[1-\frac{\alpha}{h_T}(x-x_T)\right]^{-2}\right)\mathrm{d}x\\&\sim\frac{\rho V^2}{2}L\int_{x_A}^{x_T}\left(1-\left[1-\frac{2\alpha}{h_T}(x-x_T)\right]\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\rho V^2L}{2}\frac{2\alpha}{h_T}\int_{x_A}^{x_T}(x-x_T)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

soit

$$F_z=-\frac{\rho V^2L}{2}\frac{2\alpha}{h_T}\left[\frac{(x-x_T)^2}{2}\right]_{x_A}^{x_T}=\frac{\rho V^2L}{2}\frac{\alpha}{h_T}(x_T-x_A)^2$$

Au premier ordre en α, on a

$$x_T-x_A=\ell_\mathrm{m}\cos\alpha\sim\ell_\mathrm{m}$$

et

$$\alpha\sim\frac{h_A-h_T}{\ell_\mathrm{m}}$$

d'où

$$F_z=\frac{\rho V^2L}{2}\alpha\frac{\ell_\mathrm{m}^2}{h_T} \qquad (7)$$

que l'on écrit au premier ordre[2] en α :

$$F_z=\frac{\rho V^2L}{2}\alpha\frac{\ell_\mathrm{m}^2}{h_A-\alpha\ell_\mathrm{m}}\sim\frac{\rho V^2L}{2}\alpha\frac{\ell_\mathrm{m}^2}{h_A}\,,$$

soit

$$F_z=\frac{\rho V^2L}{2}\frac{h_A-h_T}{\ell_\mathrm{m}}\frac{\ell_\mathrm{m}^2}{h_A}\,.$$

On a donc

$$\boxed{F_z=\frac{\rho V^2}{2}L\ell_\mathrm{m}(1-\lambda)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\lambda=\frac{h_T}{h_A}} \qquad (8)$$

La composante horizontale des forces de pression s'écrit

$$F_x=F_z\tan\alpha\sim\alpha F_z$$

soit avec l'expression de α établie en **5.** :

$$F_x=\frac{h_A-h_T}{\ell_\mathrm{m}}\frac{\rho V^2}{2}L\ell_\mathrm{m}(1-\lambda)$$

d'où comme $\lambda=h_\mathrm{T}/h_\mathrm{A}$:

$$\boxed{F_x=\frac{\rho V^2}{2}Lh_A(1-\lambda)^2}\,. \qquad (9)$$

On peut aussi calculer l'intégrale en utilisant (6), soit $\mathrm{d}h=-\alpha\,\mathrm{d}x$, d'où

$$\begin{aligned}F_z&=\frac{\rho V^2}{2}L\int_{x_A}^{x_T}\left(1-\frac{h_T^2}{h^2}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\rho V^2}{2\alpha}L\int_{h_A}^{h_T}\left(1-\frac{h_T^2}{h^2}\right)\mathrm{d}h\\&=\frac{\rho V^2}{2\alpha}L\left[h_A-h_T+h_T^2\left(\frac{1}{h_A}-\frac{1}{h_T}\right)\right]\\&=\frac{\rho V^2}{2\alpha}L\left[h_A-h_T-\frac{h_T}{h_A}(h_A-h_T)\right]\\&=\frac{\rho V^2}{2\alpha}L\frac{h_A-h_T}{\alpha}\left[1-\frac{h_T}{h_A}\right]=\frac{\rho V^2}{2\alpha}L\ell_\mathrm{m}(1-\lambda)\end{aligned}$$

2. On a $\alpha\frac{\ell_\mathrm{m}^2}{h_A-\alpha\ell_\mathrm{m}}=\alpha\frac{\ell_\mathrm{m}^2}{h_A}\frac{1}{1-\alpha\frac{\ell_\mathrm{m}}{h_A}}\sim\alpha\frac{\ell_\mathrm{m}^2}{h_A}\left(1+\alpha\frac{\ell_\mathrm{m}}{h_A}\right)$

7. Le moment élémentaire en T de la résultante $\mathrm{d}\vec{F}$ des forces de pression s'exerçant sur la bande $L\,\mathrm{d}x$ située en M d'abscisse x est

$$\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{TM} \wedge \mathrm{d}\vec{F} = -(x - x_T)\,\mathrm{d}F\,\vec{u}_y$$

soit en projection selon $\vec{u}_y$:

$$\mathrm{d}\mathcal{M} = (x_T - x)\,\mathrm{d}F = (x_T - x)[p(x) - p_0]L\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant (5), on en déduit

$$\mathcal{M} = \frac{\rho V^2 L}{2}\int_{x_A}^{x_T}(x_T - x)\left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}\right]\mathrm{d}x.$$

On a donc

$$\boxed{\mathcal{M} = K\int_{x_A}^{x_T}(x_T - x)\left[1 - \frac{h_T^2}{h^2(x)}\right]\mathrm{d}x} \qquad (10)$$

avec

$$\boxed{K = \frac{\rho V^2 L}{2}}.$$

8. La plaque est soumise au poids du sportif et aux forces de pression. L'équilibre de la plaque s'écrit

$$m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}.$$

En projection selon $\vec{u}_z$, on obtient

$$-mg + F_z = 0.$$

La somme des moments étant nulle à l'équilibre, le poids du sportif s'appliquant à la distance ℓ_p du bord, on a

$$0 = -mg\ell_\mathrm{p} + \mathcal{M}.$$

On a donc

$$\ell_\mathrm{p} = \frac{\mathcal{M}}{mg} = \frac{\mathcal{M}}{F_z} = \frac{\rho V^2 L \ell_\mathrm{m}^2 f(\lambda)}{4}\frac{2}{\rho V^2 L \ell_\mathrm{m}(1-\lambda)}$$

d'où

$$\boxed{\ell_\mathrm{p} = \ell_\mathrm{m}\frac{f(\lambda)}{2(1-\lambda)}}. \qquad (11)$$

3 Calcul par un bilan de quantité de mouvement

9. Choisissons comme système fermé Σ l'eau contenue dans le volume situé sous la planche entre les abscisses x_A et x_T et celle qui va pénétrer dans ce volume entre les dates t et $t + \mathrm{d}t$.

La quantité de mouvement selon $\vec{u}_x$ aux instants t et $t + \mathrm{d}t$ est

$$P_x(t) = P_{x,\mathrm{com}}(t) + \delta m v(x_A)$$

et

$$P_x(t + \mathrm{d}t) = P_{x,\mathrm{com}}(t + \mathrm{d}t) + \delta m v(x_T)$$

en notant $P_{x,\mathrm{com}}$ la quantité de mouvement de la partie située entre les abscisses x_A et x_T. L'écoulement étant stationnaire, on a

$$P_{x,\mathrm{com}}(t) = P_{x,\mathrm{com}}(t + \mathrm{d}t).$$

De plus, $v(x_T) = V$ et $v(x_A) = V\dfrac{h_T}{h_A}$ d'après (1).

La masse qui entre à l'abscisse x_A (ou qui sort à l'abscisse x_T) pendant $\mathrm{d}t$ vaut

$$\delta m = \rho L h_T V\,\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$P_x(t + \mathrm{d}t) - P_x(t) = \rho L h_T V\,\mathrm{d}t\left(1 - \frac{h_T}{h_A}\right)V$$

soit avec $\lambda = h_T/h_A$:

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}P_x(\Sigma)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \rho L h_T(1-\lambda)V^2}. \qquad (12)$$

10. L'eau contenue dans le système Σ est soumise :

— sur sa face d'entrée en x_A aux forces de pression $\vec{F}_{x_A} = +p_A h_A L\vec{u}_x$;

— sur sa face de sortie en x_T aux forces de pression $\vec{F}_{x_T} = -p_0 h_T L\vec{u}_x$;

— sur sa face inférieure, à la force exercée par le sol $\vec{F}_\mathrm{sol} = F_\mathrm{sol}\vec{u}_z$ (verticale car le fluide est parfait) ;

— sur la surface de la plaque, à la force opposée à la force de pression que le fluide exerce sur la plaque (actions réciproques)

$$\vec{F}_\mathrm{plaque} = -\int_{x_A}^{x_T} p(x)L\,\mathrm{d}x\,\vec{n}$$

dont la projection selon $\vec{u}_x$ s'écrit

$$F_{x,\mathrm{plaque}} = \alpha F_\mathrm{plaque} = -\alpha\int_{x_A}^{x_T} p(x)L\,\mathrm{d}x.$$

On a donc

$$F_{x,\Sigma} = p_A h_A L - p_0 h_T L - \alpha\int_{x_A}^{x_T} p(x)L\,\mathrm{d}x$$

On a calculé

$$F_x = \int_{x_A}^{x_T}[p(x) - p_0]L\,\mathrm{d}x\alpha$$

donc

$$\begin{aligned}-\alpha\int_{x_A}^{x_T} p(x)L\,\mathrm{d}x &= -F_x - p_0 L\alpha\int_{x_A}^{x_T}\mathrm{d}x\\ &= -F_x - p_0 L\alpha(x_T - x_A) = -F_x - p_0 L(h_A - h_T)\end{aligned}$$

car $\alpha = \dfrac{h_A - h_T}{x_T - x_A}$. On a donc

$$F_{x,\mathrm{plaque}} = -F_x - p_0 L(h_A - h_T)$$

et la résultante des actions s'exerçant sur le système Σ a pour composante horizontale

$$F_{x,\Sigma} = p_A h_A L - p_0 h_T L - F_x - p_0 L(h_A - h_T)v$$

soit

$$\boxed{F_{x,\Sigma} = (p_A - p_0)h_A L - F_x}. \qquad (13)$$

11. Le théorème de la résultante cinétique appliqué à Σ s'écrit, en projection selon $\vec{u}_y$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_x(\Sigma)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = F_{x,\Sigma}$$

soit avec (12) et (13) :

$$\rho L h_T(1-\lambda)V^2 = (p_A - p_0)h_A L - F_x$$

d'où

$$F_x = (p_A - p_0)h_A L - \rho L h_T(1-\lambda)V^2 .$$

Comme d'après (5) on a

$$p_A - p_0 + \frac{\rho V^2}{2}\left(1 - \frac{h_T^2}{h_A^2}\right) = \frac{\rho V^2}{2}\left(1-\lambda^2\right)$$

on en déduit

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\rho V^2}{2} h_A L - \rho L V^2 h_T(1-\lambda) \\ &= \frac{\rho V^2}{2} h_A L - \rho L V^2 h_A \lambda(1-\lambda) \\ &= \frac{\rho V^2}{2} h_A L\left[1-\lambda^2 - 2\lambda(1-\lambda)\right] \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{F_x = \frac{\rho V^2}{2} h_A L(1-\lambda)^2} .$$

On retrouve alors $F_z = \dfrac{F_x}{\alpha}$.

Partie 2 — Mouvement de la planche dans le référentiel terrestre

12. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au système {planche+sportif}. Sa vitesse dans le référentiel terrestre étant $-V\vec{u}_x$, on a

$$-m\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + \vec{F} .$$

La projection selon $\vec{u}_z$ conduit à

$$0 = -mg + F_z ,$$

d'où $F_z = mg$.
La projection selon $\vec{u}_x$ conduit à

$$-m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F_x .$$

Comme $F_x = \alpha F_z$, on a

$$-m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \alpha F_z = \alpha m g .$$

La vitesse est donc solution de l'équation

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -g\alpha} . \qquad (14)$$

13.a) On a montré avec la relation (7) que

$$F_z = \frac{\rho V^2 L}{2}\alpha\frac{\ell_{\mathrm{m}}^2}{h_T} .$$

Comme $F_z = mg$, on a alors

$$mg = \frac{\rho\alpha V^2 L}{2}\frac{\ell_{\mathrm{m}}^2}{h_T}$$

d'où

$$\boxed{\ell_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V}\sqrt{\frac{2mgh_T}{\alpha\rho L}}} . \qquad (15)$$

13.b) On doit avoir $\ell_{\mathrm{m}} < L'$, longueur de la planche, d'où d'après (15)

$$\boxed{V > V_{\min} = \frac{1}{L'}\sqrt{\frac{2mgh_{\mathrm{T}}}{\alpha\rho L}}} . \qquad (16)$$

13.c) L'équation (14) s'intègre en

$$V(t) = -\alpha g t + V(0) .$$

La vitesse de la planche s'annule donc à l'instant t_{f} donné par

$$t_{\mathrm{f}} = \frac{V(0)}{\alpha g} .$$

Intégrons une nouvelle fois l'équation du mouvement :

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V(0)t + x(0) .$$

La distance parcourue à l'instant t_{f} vaut alors

$$D = x(t_{\mathrm{f}}) - x(0) = V(0)t_{\mathrm{f}} - \frac{\alpha g}{2}t_{\mathrm{f}}^2 = \frac{V^2(0)}{2\alpha g} .$$

On calcule $\boxed{D = 10{,}4\ \mathrm{m}}$.

13.d) L'ensemble {planche+sportif} est plongé dans deux fluides : l'eau et l'air. Le modèle néglige principalement la résistance due à l'air (force de traînée visqueuse), et la traînée due à l'eau sur la planche.

Partie 3 — Nécessité du jet d'eau

14. Considérons le jet d'entrée au-dessus de la ligne de courant en pointillés, qui ressort vers l'avant. L'eau étant incompressible, l'écoulement permanent et le module de la vitesse identique dans les deux branches du jet, ces dernières ont même section δ. La hauteur totale du flot entrant dans le référentiel $\mathcal{R}$ est donc $h_T+\delta$.
Notons $P_{x,\mathrm{com}}$ la quantité de mouvement selon $\vec{u}_x$ de l'eau contenue dans le volume hachuré ; l'écoulement étant stationnaire, cette grandeur est constante.
La quantité de mouvement selon $\vec{u}_x$ du système fermé à l'instant t vaut donc

$$P_x(t) = P_{x,\mathrm{com}} + \rho L(h_T+\delta)V\,\mathrm{d}t \cdot V .$$

À l'instant $t + \mathrm{d}t$, elle vaut

$$P_x(t+\mathrm{d}t) = P_{x,\mathrm{com}} + \rho L h_T V\,\mathrm{d}t \cdot V - \rho L \delta V\,\mathrm{d}t \cdot V\,.$$

On a donc

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_x(\overline{\Sigma})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{P_x(t+\mathrm{d}t) - P_x(t)}{\mathrm{d}t}$$

soit

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}P_x(\overline{\Sigma})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = -2\delta\rho L V^2}\,. \tag{17}$$

15. On a

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_x(\overline{\Sigma})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = -F_x = -\alpha F_z$$

d'où avec (17)

$$\boxed{F_z = \frac{2\delta\rho L V^2}{\alpha}}\,. \tag{18}$$

Il faut que la force F_z soit non nulle pour que la planche soit portée par l'eau, ce qui impose $\boxed{\delta \neq 0}$: le jet d'eau est nécessaire.

16. On calcule

$$\delta = \frac{m\alpha g}{2\rho L V^2}$$

d'où $\boxed{\delta \approx 2\text{ mm}}$.