TD ondes n° 1 — Équation de d'Alembert

1 — Onde progressive ? [*]

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui représentent une onde progressive ; préciser alors la célérité de l'onde et représenter son allure spatiale à un instant t fixé.

1. $y(x,t) = A\sin(ax^2 - bt)$.

2. $y(x,t) = A\cosh(ax + bt)$.

3. $y(x,t) = A\,\mathrm{e}^{-b(ax-t)^2}$.

4. $y(x,t) = A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\alpha x - bt)$.

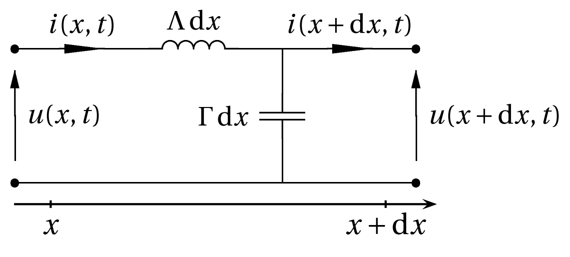
5. $y(x,t) = A\cos(\omega t + \phi)\sin(kx + \psi)$.

6. $y(x,t) = A\cos(x + bt)\sin(x - at)$.

---

2 — Ligne à constantes réparties [*]

Un câble coaxial, constitué de deux conducteurs concentriques séparés par un isolant, est caractérisé par une inductance par unité de longueur Λ, appelée inductance linéique, exprimée en $\mathrm{H\cdot m^{-1}}$, et par une capacité par unité de longueur Γ, appelée capacité linéique, exprimée en $\mathrm{F\cdot m^{-1}}$. On adopte une modélisation à l'aide d'une ligne à constantes réparties : les caractéristiques électriques d'un élément de longueur $\mathrm{d}x$ de la ligne sont représentées par des dipôles électriques. Le schéma électrique équivalent est le suivant :



1. Établir les équations couplées reliant $u(x,t)$ et $i(x,t)$ et les linéariser.

2. Montrer que la tension et l'intensité vérifient l'équation de d'Alembert, avec une célérité que l'on exprimera en fonction des caractéristiques de la ligne.

---

3 — Ondes dans un bassin profond [**]

On étudie la propagation selon Ox d'ondes de faible amplitude dans un bassin de largeur L selon $\vec{e}_y$, infini selon $\vec{e}_x$, dont le fond est contenu dans le plan $z = 0$; au repos, la surface libre de l'eau est horizontale, à la cote $z_0 = h$.

En présence d'une onde, la surface libre en un point d'abscisse x est de la forme $z = h + \xi(x,t)$, où $|\xi| \ll h$, et on note P_0 la pression atmosphérique uniforme. Le bassin est supposé suffisamment profond pour que l'écoulement puisse être considéré comme unidimensionnel avec un champ des vitesses $\vec{v} = v(x,t)\vec{e}_x$. Les grandeurs $v(x,t)$ et $\xi(x,t)$ sont supposées *a priori* infiniment petites de même ordre, et on limite tous les calculs à l'ordre 1.

En outre, l'écoulement est supposé parfait, incompressible et homogène de masse volumique μ, dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

1. En faisant un bilan de masse pour le système ouvert et fixe constitué du volume compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, établir la relation

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -h\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Établir l'expression de la pression $P(x,t)$ en fonction de $\xi(x,t)$, z, h, μ, g et P_0. En déduire la relation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

3. En déduire l'équation de propagation dont est solution $v(x,t)$ et la célérité c des ondes correspondantes.

---

4 — Onde sur une barre [**]

Une barre de masse volumique ρ, de section S et de module d'Young E est le siège d'une onde de déformation longitudinale entraînant le déplacement de la section située à l'abscisse x d'une longueur $u(x,t)$. La force de traction entraînant un allongement $\mathrm{d}l$ de la barre est donnée par

$$\mathrm{d}F = ES\frac{\mathrm{d}l}{l}.$$

En étudiant la section de barre située entre x et $x + \mathrm{d}x$, trouver l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ et donner la nature des solutions, ainsi que la vitesse de propagation de l'onde.

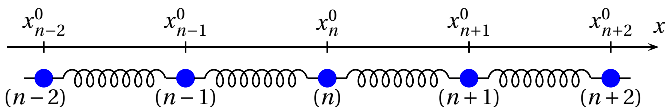
5 — Chaîne d'atomes [***]

On modélise une tige solide par une chaîne infinie d'oscillateurs, selon un axe Ox, constituée de masses m identiques, reliées deux à deux par un ressort de raideur k et de longueur au repos a. Les masses, qui modélisent les atomes d'un cristal, se déplacent sans frottement le long de l'axe Ox. Au repos, elles sont distantes de a.
On a donc une description discrète du milieu :

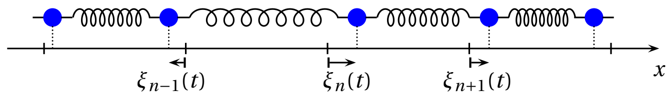
— la masse numéro n a pour abscisse $x_n^0 = na$ quand elle est au repos;

— elle a pour abscisse $x_n(t) = x_n^0 + \xi_n(t) = na + \xi_n(t)$ en présence de l'onde.

La grandeur algébrique $\xi_n(t)$ repère donc l'écart de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre. Sur la figure suivante, on a par exemple $\xi_{n-1}(t) < 0$, $\xi_n(t) > 0$ et $\xi_{n+1}(t) > 0$.



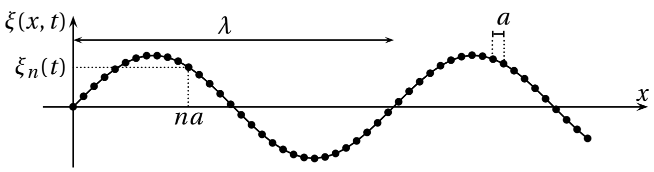
Système à l'équilibre



Système hors équilibre

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse (n), établir une relation de récurrence reliant $\dfrac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2}$ à $\xi_{n-1}(t)$, $\xi_n(t)$ et $\xi_{n+1}(t)$.

Nous allons mener l'étude dans le cadre de l'*approximation des milieux continus*, valable quand la distance entre chaque masse est très petite devant la longueur d'onde de l'onde considérée : $a \ll \lambda$. À l'échelle de la longueur d'onde λ, la chaîne est vue comme un milieu continu, comme le suggère la figure suivante.



Dans le cadre de cette approximation, nous pouvons remplacer la description discrète $\{\xi_n(t)\}_n$ de l'état de la chaîne d'oscillateurs par une fonction continu de l'espace et du temps $\xi(n,t)$, qui interpole la position des masses. Cette fonction $\xi(x,t)$, qui décrit de façon continue l'écart des masses à leur position d'équilibre, doit satisfaire aux propriétés suivantes :

— elle est de classe $\mathscr{C}^2$;

— elle coïncide avec l'écart à l'équilibre de la masse (n) quand $x = na$, soit $\xi(na,t) = \xi_n(t)$.

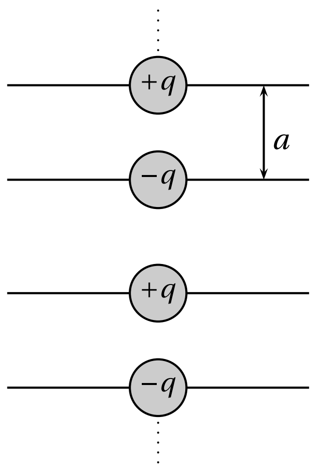
2. La distance a étant considérée comme un « infiniment petit », en effectuant un développement de Taylor[1] à l'ordre 2 de $\xi_{n+1}(t)$ et $\xi_{n-1}(t)$, montrer que la relation de récurrence établir précédent conduit à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

où la célérité c sera exprimée en fonction de k, a et m.

6 — Boules chargées [***]

On considère une chaîne infinie de boules chargées qui ne peuvent se déplacer que sur les fils horizontaux.



Donner l'équation d'onde :

— si chaque boule n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisines;

— si chaque boule interagit avec toutes les autres (une infinité).

1. On remarquera que $\xi_{n+1}(t) = \xi(x_n^0 + a, t) = \xi(x_n^0, t)$.