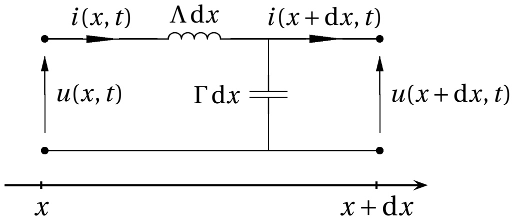
TD ondes n° 1 Équation de d'Alembert — solution

2 — Ligne à constantes réparties [*]

Schéma :



1. La tension aux bornes de l'inductance s'écrit

$$u(x,t) - u(x+\mathrm{d}x,t) = \Lambda\,\mathrm{d}x\frac{\partial i(x,t)}{\partial t},$$

soit à l'ordre le plus bas :

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \Lambda\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}.$$

Le courant traversant le condensateur est donné par la loi des nœuds :

$$i(x,t) - i(x+\mathrm{d}x,t) = \Gamma\,\mathrm{d}x\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t},$$

soit à l'ordre le plus bas :

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = \Gamma\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}.$$

On obtient un système de deux équations couplées en $u(x,t)$ et $i(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \end{cases}$$

2. Pour obtenir l'équation vérifiée par $u(x,t)$, il faut éliminer $i(x,t)$ en utilisant la propriété

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t\partial x}.$$

En dérivant la première équation par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\Lambda\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x\partial t}.$$

En dérivant la seconde par rapport à t, on obtient :

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t\partial x} = -\Gamma\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

On en déduit alors :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\Gamma\Lambda}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}.$$

De même, dériver la première équation par rapport à t conduit à

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x} = -\Lambda\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}.$$

Dériver la seconde par rapport à x conduit à

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = -\Gamma\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}.$$

D'après le théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 ux,t)}{\partial x\partial t} = \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t\partial x}$; on en déduit l'équation vérifiée par l'intensité :

$$\boxed{\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\Gamma\Lambda}\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2}}.$$

La tension et l'intensité vérifient l'équation de d'Alembert.

La célérité correspondante est $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}}$.

---

3 — Ondes dans un bassin profond [**]

1. On considère la tranche de fluide comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$ à l'instant t, et on mène les calculs au premier ordre. La hauteur de cette tranche est $h+\xi(x,t)$ au premier ordre (ξ est un infiniment petit du premier ordre). La masse de la tranche de fluide est donc

$$\mathrm{d}m = \mu L\mathrm{d}x[h+\xi(x,t)].$$

Pendant $\mathrm{d}t$, comme $\xi(x,t)$ dépend du temps, elle varie de [1]

$$\mathrm{d}^2 m = \mu L\mathrm{d}x\frac{\partial\xi}{\partial t}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminons l'expression de cette variation de masse à l'aide d'un bilan.

Il entre pendant $\mathrm{d}t$, à l'abscisse x, la masse

$$\delta^2 m_x = \mu v(x,t)L[h+\xi - x,t)]\,\mathrm{d}t \approx \mu v(x,t)Lh\,\mathrm{d}t.$$

Il sort pendant $\mathrm{d}t$, à l'abscisse $x+\mathrm{d}x$, la masse

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 m_{x+\mathrm{d}x} &= \mu v(x+\mathrm{d}x,t)[h+\xi(x+\mathrm{d}x,t)]\,\mathrm{d}t \\ &\approx \mu v(x+\mathrm{d}x,t)Lh\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le bilan s'écrit

$$\mathrm{d}^2 m = \delta^2 m_x - \delta^2 m_{x+\mathrm{d}x}$$

soit

$$\mu L\,\mathrm{d}x\frac{\partial\xi}{\partial t}\,\mathrm{d}t = -\mu Lh\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial\xi}{\partial t} = -h\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

1. On a en effet $\mathrm{d}\xi = \dfrac{\partial\xi}{\partial t}\,\mathrm{d}t$.

2. Les calculs étant menés au premier ordre, on peut négliger l'accélération convective $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ dans l'équation d'Euler, qui s'écrit

$$\mu\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g}\,.$$

En projetant sur $\vec{e}_z$, on obtient

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g\,,$$

d'où en intégrant

$$P(M,t) = -\mu g z + \alpha(x,t)$$

où $\alpha(x,t)$ est la « constante » d'intégration (constante par rapport à z, donc *a priori* fonction de x).
La surface libre est à la cote $h+\xi(x,t)$, et la pression y vaut P_0 :

$$P(h+\xi(x,t),t) = P_0 + -\mu g h - \mu g\xi(x,t) + \alpha(x,t)\,,$$

d'où $\alpha(x,t) = P_0 + \mu g h + \mu g\xi(x,t)$. Le champ des pressions est donc donné par

$$\boxed{P(M,t) = P_0 + \mu g(h-z) + \mu g\xi(x,t)}\,.$$

Projetons l'équation d'Euler linéarisée sur $\vec{e}_x$:

$$\mu\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

soit avec l'expression de $P(M,t)$ établie précédemment

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial\xi}{\partial x}}\,.$$

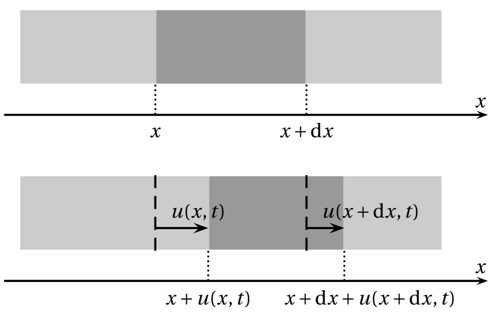
3. En dérivant la relation précédent par rapport à t, il vient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -g\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t} = gh\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

On retrouve l'équation de d'Alembert décrivant la propagation d'une onde à la célérité $\boxed{c=\sqrt{gh}}$.

4 — Onde sur une barre

On considère la tranche comprise au repos entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$, de masse $\mathrm{d}m = \rho S\,\mathrm{d}x$. En présence de l'onde, elle se trouve située entre les abscisses $x+u(x,t)$ et $x+\mathrm{d}x+u(x+\mathrm{d}x,t)$.



L'allongement de la tranche considérée est

$$u(x+\mathrm{d}x,t) - u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Sa longueur au repos étant $\mathrm{d}x$, son allongement relatif est

$$\frac{u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,.$$

À une force de traction $F>0$ correspond un allongement relatif $\dfrac{\partial u}{\partial x}>0$; la force de traction s'écrit alors :

$$\mathrm{d}F(x,t) = ES\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,.$$

La tranche comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$ est soumise à :

$$\mathrm{d}F(x+\mathrm{d}x,t) - \mathrm{d}F(x,t) = \frac{\partial \mathrm{d}F}{\partial x}\,\mathrm{d}x = ES\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

L'abscisse du centre de gravité de la tranche est

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{[x+\mathrm{d}x+u(x,t)]+[x+u(x,t)]}{2} \\ &= x + \frac{\mathrm{d}x}{2} + \frac{u(x,t)+u(x+\mathrm{d}x,t)}{2} \\ &= x + \frac{\mathrm{d}x}{2} + u(x,t) \end{aligned}$$

au premier ordre.
Son accélération vaut donc $\ddot{x}_G = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ et le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tranche considérée s'écrit :

$$\rho S\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}\,.$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert, dont la solution peut s'écrire $u(x,t) = Af(c-xt) + Bg(x+ct)$, la célérité des ondes progressives étant donnée par

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}\,.$$

5 — Chaîne d'atomes

1. La masse (n) est soumise d'une part à l'action du ressort « de droite ». Sa longueur étant :

$$\begin{aligned} L_\mathrm{d} = x_{n+1}(t) - x_n(t) &= x^0_{n+1} + \xi_{n+1}(t) - x^0_n - \xi_n(t) \\ &= a + \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t) \end{aligned}$$

cette action vaut

$$\vec{T}_\mathrm{d} = k[L_\mathrm{d} - a]\,\vec{\mathrm{e}}_x = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)]\,\vec{\mathrm{e}}_x .$$

La même masse est soumise d'autre part à l'action du ressort « de gauche », de longueur :

$$\begin{aligned} L_\mathrm{g} = x_n(t) - x_{n-1}(t) &= x^0_n + \xi_n(t) - x^0_{n-1} - \xi_{n-1}(t) \\ &= a + \xi_n(t) - \xi_{n-1}(t) . \end{aligned}$$

Cette action vaut donc

$$\vec{T}_\mathrm{g} = -k[L_\mathrm{g} - a]\,\vec{\mathrm{e}}_x = -k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)]\,\vec{\mathrm{e}}_x .$$

L'accélération de la masse (n) étant

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_x = \frac{\mathrm{d}^2 \xi_n}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_x ,$$

appliquons à celle-ci le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe Ox :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \xi_n}{\mathrm{d}t^2} = k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)] .$$

2. Un développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de x_0^n permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}(t) = \xi(x^0_n + a, t) &= \xi(x^0_n, t) + a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &= \xi_n(t) + a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_{n-1}(t) = \xi(x^0_n - a, t) &= \xi(x^0_n, t) - a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &= \xi_n(t) - a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} . \end{aligned}$$

À l'ordre le plus bas non nul, il reste

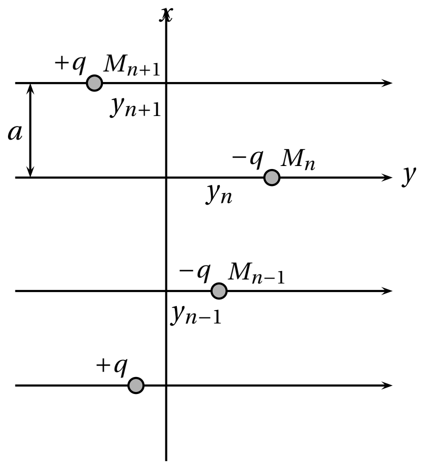
$$k[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)] - k[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)] = a^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{ka^2}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0} .$$

6 — Boules chargées

Dans un premier temps, il faut paramétrer le système pour décrire les mouvement des boules :



On repère par $y_n(t)$ la position horizontale de la boule de rang n à l'instant t.
Sur la figure, on a $y_{n-1}(t) < 0$, $y_n(t) > 0$ et $y_{n+1}(t) > 0$.

1er cas : chaque boule n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisines

La boule en M_n subit de la part de la boule en M_{n+1} la force électrostatique

$$\vec{F}_{n+1\to n} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_{n+1}M_n}}{(M_{n+1}M_n)^3} ,$$

et de la part de la boule en M_{n-1} la force

$$\vec{F}_{n-1\to n} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_{n-1}M_n}}{(M_{n-1}M_n)^3} ,$$

En notant $\vec{R}$ la réaction du fil sur la boule de rang n (normale à $\vec{e}_x$ en considérant qu'il n'y a pas de frottement) et m sa masse, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x = \vec{F}_{n+1\to n} + \vec{F}_{n-1\to n} + \vec{R} .$$

En projetant selon $\vec{e}_x$, on obtient

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_n}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y_n - y_{n+1}}{(M_{n+1}M_n)^3} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y_n - y_{n-1}}{(M_{n-1}M_n)^3}$$

Afin de simplifier l'étude, nous allons envisager des mouvements de faible amplitude, soit $|x_n| \ll a$. On a alors

$$M_{n+1}M_n \approx a \quad \text{et} \quad M_{n-1}M_n \approx a$$

et l'équation du mouvement devient

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_n}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[y_n(t) - y_{n+1}(t) + y_n(t) - y_{n-1}(t)\right]$$

soit

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_n}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[2y_n(t) - y_{n+1}(t) - y_{n-1}(t)\right] .$$

Nous allons considérer que la longueur d'onde λ du phénomène est grande devant a, ce qui fait que y_n varie faiblement entre deux boules voisines.

Cela permet de passer à la limite continue, en introduisant une fonction $y(x,t)$, de classe $\mathcal{C}^2$, qui coïncide avec $y_n(t)$ pour $x = na$.
En développant à l'ordre deux, on a

$$y(x+a,t) = y(x,t) + a\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

soit en $x = na$

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + a\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

De même

$$y(x-a,t) = y(x,t) - a\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

soit en $x = na$

$$y_{n-1}(t) = y_n(t) - a\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On en déduit

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) = 2y_n(t) + a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[-a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

soit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 ma}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On obtient l'équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 ma}}}.$$

2e cas : chaque boule n'interagit avec toutes les autres

Compte tenu de l'alternance des signes des charges, on a

$$\vec{F}_{n+2\to n} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_{n+2}M_n}}{(M_{n+2}M_n)^3}.$$

On peut généraliser pour une boule de rang $n+p$:

$$\vec{F}_{n+p\to n} = (-1)^p\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_{n+p}M_n}}{(M_{n+2}M_n)^3}.$$

Dans le cas de mouvements de faible amplitude, on a $M_{n+p}M_n \approx pa$; la projection de la force précédente selon $\vec{e}_x$ s'écrit

$$F_{x,n+p\to n} = (-1)^p\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3 p^3}(y_n - y_{n+p}).$$

La résultante des forces subie par la boule n selon $\vec{e}_x$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}F_x &= \sum_{p=1}^{\infty} F_{x,n+p\to n} + F_{x,n-p\to n}\\ &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{2y_n - y_{n+p} - y_{n-p}}{p^3}.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on peut développer

$$y(x+ap,t) = y(x,t) + ap\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2p^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

soit en $x = na$

$$y_{n+p}(t) = y_n(t) + ap\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2p^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

De même

$$y(x-ap,t) = y(x,t) - ap\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2p^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

soit en $x = na$

$$y_{n-p}(t) = y_n(t) - ap\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2p^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On a donc

$$y_{n+p}(t) + y_{n-p}(t) = 2y_n(t) + a^2p^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

d'où

$$\begin{aligned}F_x &= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{a^2p^2}{p^3}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\\ &= (-1)\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\end{aligned}$$

On reconnaît la série harmonique alternée

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p} = -\ln 2,$$

d'où

$$F_x = \frac{q^2\ln 2}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Le principe de la dynamique appliqué à la boule de rang n s'écrit

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q^2\ln 2}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On obtient l'équation de d'Alembert avec une célérité différente du cas précédent :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c'^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{c' = \frac{c\ln 2}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 ma}} = c\ln 2}.$$