TD ondes n° 2 — Corde vibrante

1 — Résonance sur une corde vibrante [*]

On étudie les petits mouvements dans la direction $\vec{e}_z$ d'une corde métallique de longueur L, fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x=0$ et $x=L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I=I_0\cos\omega t$ et plongée dans un champ magnétique

$$\vec{B}=B_0\sin\frac{\pi x}{L}\vec{e}_y.$$

On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Montrer que le déplacement $z(x,t)$ d'un point de la corde est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{I_0B_0}{\mu}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\omega t,$$

où c est une constante à exprimer en fonction des données.

2. En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x,t)=C\sin\dfrac{\pi x}{L}\cos\omega t$.
Déterminer C pour $\omega\neq\pi c/L$.
Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\pi c/L$?

2 — Corde vibrante [*]

On considère une corde vibrante de masse linéique μ, sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe Ox : à l'ordre d'approximation considéré, le point M qui a pour coordonnées $(x,0)$ au repos passe au point de coordonnées $(x,y(x,y))$. Le déplacement $y(x,t)$ est un infiniment petit d'ordre un ainsi que l'angle $\alpha(x,t)=\dfrac{\partial y}{\partial x}$ que fait la corde au point d'abscisse x avec l'axe Ox.

1. Établir rapidement l'équation d'onde relative aux mouvements transversaux de faible amplitude.

2. La masse linéique d'une corde de guitare a pour ordre de grandeur le gramme par mètre, et sa longueur est de l'ordre du mètre.. Donner un ordre de grandeur réaliste de la tension de cette corde.

3. La corde de longueur L est fixée à ses deux extrémités en $x=0$ et $x=L$. Elle n'est soumise à aucune excitation aux dates positives, mais on lui donne une forme $y(x,t=0)=Y(x)$ à la date $t=0$ et on l'abandonne sans vitesse initiale, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t=0)=0$.
On cherche une solution de type mode propre, c'est-à-dire de la forme $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t)$.
Montrer que $f(x)$ est de la forme

$$f(x)=A\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

et que les seules pulsations possibles sont de la forme $\omega_n=n\omega_1$, avec n entier.
Exprimer la pulsation ω_1 du mode fondamental en fonction de L et c.

4. On suppose que $y(x,0)=4b\sin^3\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$.
Déterminer $y(x,t)$.

On donne $\sin^3 x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin(3x)$.

3 — Corde vibrante [*]

On applique une tension T sur une corde de longueur L, de massique linéique μ, fixée à ses extrémités $x=0$ et $x=L$.

1. Établir l'équation de d'Alembert en précisant les hypothèses effectuées, et exprimer la célérité en fonction des paramètres de la corde.

2. Soit les solutions suivantes de l'équation précédente :

2.a) $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$;

2.b) $y(x,t)=A\cos(\omega t+kx)$;

2.c) $y(x,t)=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)(C\cos kx+D\sin kx)$;

2.d) $y(x,t)=A\cos(\omega t+kx)+A\cos(\omega t-kx)$;

2.e) $y(x,t)=A\cos(\omega t+kx)+B\cos(\omega t-kx)$
avec $|A|\neq|B|$.

Interpréter physiquement chaque solution.

3. La corde est fixée à ses deux extrémités. Parmi les solutions proposées précédemment, quelle est celle qui convient? En déduire les pulsations ω possibles.

4. On suppose qu'à l'instant $t=0$, la corde est plate (pas de perturbation); la solution est d'amplitude Y. Déterminer complètement l'expression de $y(x,t)$.

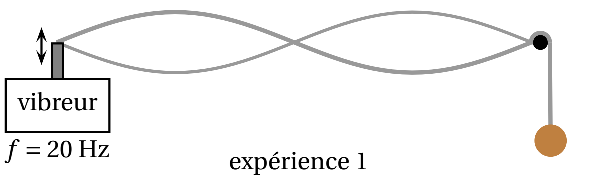
5. La tension exercée sur la corde est de 10 N. La corde mesure 2,0 m et, lorsque celle-ci est excitée à une fréquence de 10 Hz, on observe 5 nœuds de déplacement (en incluant les extrémités de la corde). Déterminer la masse linéique de la corde.

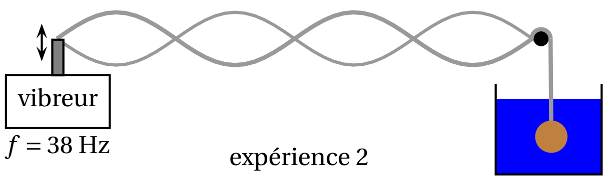
On rappelle la formule trigonométrique :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

4 — Du plomb ou de l'or ?

On réalise le montage de la corde de Melde à l'aide d'un vibreur commandé par un GBF dont on peut régler la fréquence f, d'une corde de longueur L et de masse linéique μ, à laquelle on accroche un corps de masse m. On note T la tension de la corde.





1. La célérité des ondes transversales sur la corde vibrante est de la forme $c = T^a \mu^b$. Par analyse dimensionnelle, déterminer les exposants a et b.

2. On désire savoir si la sphère est en or ou en plomb (un examen visuel ne suffit pas car elle est peinte).

Dans l'expérience 1, on observe le phénomène de résonance en ondes stationnaires représenté sur la figure pour la fréquence $f = 20$ Hz.

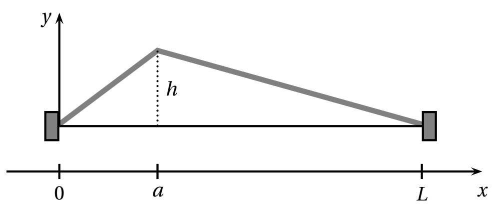
Dans l'expérience 2, on plonge la sphère dans un récipient rempli d'eau. On observe alors le phénomène de résonance comme indiqué sur la figure pour la fréquence $f' = 38$ Hz.

Masses volumiques : $\rho(\text{Pb}) = 11\,350\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\rho(\text{Au}) = 19\,300\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

La sphère est-elle en or ou en plomb ?

5 — Étude d'une corde pincée [**]

On considère une corde vibrante de longueur L, de tension T, de masse linéique μ, fixe à ses deux extrémités. Une corde pincée est écartée de sa position d'équilibre par un doigt (ou un plectre) ; la corde est ensuite lâchée avec une vitesse initiale nulle. Le contact avec le doigt est supposé ponctuel, à l'abscisse a. On adopte une description simplifiée de la forme initiale de la corde par un profil triangulaire.



1. Écrire les conditions initiales $y(x,0) = Y(x)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)$.

2. Compte tenu des conditions aux limites $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$, on cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{nc\pi t}{L} + \psi_n\right)$$

où c est la célérité.

Déterminer les constantes ψ_n.

3. Considérons la fonction $F(x)$, de période $2L$, impaire, coïncidant avec $y(x,t)$ sur l'intervalle $[0,L]$: $F(x) = y(x,t)$ pour $x \in [0,L]$.

En utilisant l'annexe, rappeler l'expression générale du développement en série de Fourier d'une fonction impaire, $2L$-périodique. Montrer que les coefficients du développement s'expriment ici en fonction du profil initial $Y(x)$ de la corde, et les calculer.

4. Discuter de la dépendance des amplitudes des harmoniques avec leur rang n.

5. Comment peut-on supprimer l'harmonique de rang n du son émis ?

6. Simplifier l'expression de $y(x,t)$ quand $a \to 0$. Que peut-on dire alors du timbre du son émis lorsque le point d'excitation de la corde est proche d'une extrémité ?

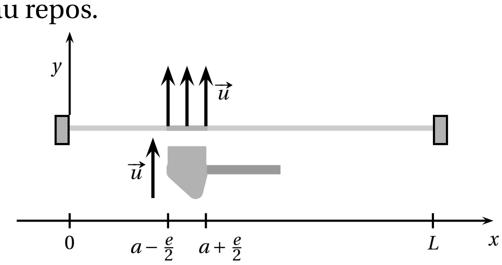
7. La *brillance* d'un son est décrite par le centre de gravité spectral défini par

$$CGS = \frac{\sum_{n=1}^{N} n b_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n}$$

pour un son constitué de N harmoniques. Un CGS bas correspond à un son mat, tandis qu'un son brillant est caractérisé par un CGS élevé. En considérant les 30 premiers harmoniques, comparer numériquement la brillance du son émis par une corde de guitare pour $a = \dfrac{L}{4}$ et pour $a = \dfrac{L}{20}$. On pourra utiliser Python pour les calculs numériques.

6 — Étude d'une corde frappée [**]

On considère une corde vibrante de longueur L, de tension T, de masse linéique μ, fixe à ses deux extrémités. Initialement, la corde est au repos dans sa situation d'équilibre. À $t = 0$, un marteau de largeur e frappe la corde à l'abscisse a, communiquant aux points de la corde avec lesquels il est en contact au moment du choc une vitesse $u\vec{e}_y$, les autres points de la corde restant au repos.



1. Écrire les conditions initiales $y(x,0)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = V(x)$.

2. Compte tenu des conditions aux limites $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$, on cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{nc\pi t}{L} + \psi_n\right)$$

où c est la célérité.

Déterminer les constantes ψ_n.

3. On suppose que $e \ll L$.

Considérons la fonction $V(x)$, de période $2L$, impaire, coïncidant avec $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ sur l'intervalle $[0,L]$:

$$F(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \quad \text{pour } x \in [0,L] .$$

En utilisant l'annexe, rappeler l'expression générale du développement en série de Fourier d'une fonction impaire, $2L$-périodique. Montrer que les coefficients du développement s'expriment ici en fonction du profil initial de vitesse $V(x)$ de la corde, et les calculer.

4. Montrer que l'on peut supprimer des harmoniques en choisissant judicieusement un paramètre. Comment supprimer l'harmonique de rang $n = 7$, dissonant ?

7 — Corde lestée [***]

On considère une corde de longueur L, fixée à des extrémités. En son milieu, on fixe une masse m_0 sur la corde. On néglige la pesanteur, et la tension de la corde est T_0 au repos. On note c la célérité des ondes transverses.

On note $y_1(x,t)$ l'élongation de la corde pour la portion $0 \leqslant x < L/2$ et $y_2(x,t)$ son élongation pour $L/2 < x \leqslant L$.

1. Compte tenu de la condition imposée en $x = 0$, quelle forme proposer pour la solution $y_1(x,t)$? Même question pour $y_2(x,t)$ compte tenu de la condition imposée en $x = L$.

2. Établir deux relations vérifiées par $y_1(x,)$ et $y_2(x,t)$ ou leurs dérivées en $x = L/2$.

Nous cherchons les modes propres de la corde lestée.

3. Montrer qu'un premier groupe de modes propres est constitué d'un sous-ensemble des modes propres de la corde vibrante non lestée.

4. Montrer qu'un second groupe de modes propres est constitué des solutions de l'équation

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \alpha\left(\frac{\omega L}{2c}\right),$$

où l'on précisera l'expression de α en fonction de paramètres du problème.

Proposer une résolution graphique.

Étudier les cas limites $m_0 \ll m$ et $m_0 \gg m$, où m est la masse de la corde.

8 — Corde vibrante dont l'extrémité est mobile[***]

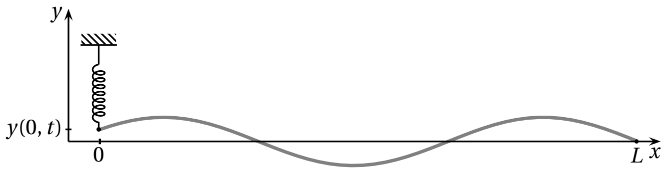
L'étude d'une corde vibrante dont les deux extrémités sont fixes ne permet pas de décrire rigoureusement un instrument à corde : la puissance sonore rayonnée par la corde elle-même est trop faible pour être perçue ; c'est le couplage de la corde avec la table d'harmonie de l'instrument, au niveau des extrémités de la corde, qui permet de produire une puissance sonore importante. Il faut donc tenir compte du mouvement des extrémités de la corde. Nous adopterons un modèle simplifié en considérant qu'une extrémité de la corde est mobile.

La corde est supposée homogène, de masse linéique μ, soumise à une tension T uniforme.

Extrémité purement élastique

On considère que la corde est fixée en $x = 0$ à un ressort de raideur K, au repos quand l'extrémité de la corde est à l'élongation $y(0,t) = 0$.

On suppose que l'autre extrémité de la corde est immobile : $y(L,t) = 0$.



On rappelle que l'élongation transversale vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} .$$

1. On étudie les modes propres de vibration de la corde en cherchant une solution de la forme

$$y(x,t) = Y(x)\cos(\omega t) .$$

Établir l'équation différentielle vérifiée par $Y(x)$. On posera $k = \omega/c$.

2. À l'aide de la condition en $x = L$, exprimer $Y(x)$ en fonction de k, L et x.

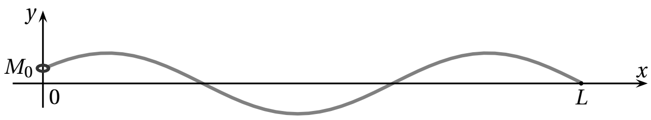
3. À l'aide de la condition en $x = 0$, établir une relation entre $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ et $y(0,t)$. En déduire une relation entre $Y'(0)$ et $Y(0)$.

4. En déduire que k vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète k_n. Établir de même l'équation vérifiée par les pulsations propres ω_n.

5. Par une représentation graphique appropriée, comparer ω_n à $n\omega_1$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité élastique ?

Extrémité purement massique

Une masse M_0 se trouve à l'extrémité $x = 0$ de la corde ; elle peut se déplacer librement le long de l'axe Oy. On néglige l'influence de la pesanteur sur la masse M_0.



Les solutions de l'équation d'onde sont cherchée de la forme $y(x,t) = Y(x)\cos(\omega t)$, où $Y(x)$ vérifie l'équation différentielle établie à la question 1.a. La condition en $x = L$, inchangée, conduit à l'expression de $Y(x)$ établie en 1.b.

6. À l'aide de la condition en $x = 0$, établir une relation entre $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ et $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0,t)$.

7. En déduire que k vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète k_n. Établir de même l'équation vérifiée par les pulsations propres ω_n. On ne cherchera pas à la résoudre.

8. Par une représentation graphique appropriée, comparer ω_n à $n\omega_1$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité massique ?

Annexe : décomposition en série de Fourier

Soit $u(t)$ un signal de période T. On peut écrire $u(t)$ comme la somme d'une série trigonométrique :

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right] \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T/2} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right.$$