TD ondes n° 2 — Corde vibrante — solution

1 — Résonance sur une corde vibrante

1. Un élément de la corde $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est soumis, en plus de la tension à chaque extrémité, à la force de Laplace $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{L}$. Au premier ordre, on a $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x$, et

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{L} = I\mathrm{d}x\,\vec{e}_x \wedge B\,\vec{e}_y = I_0B_0\cos\omega t\sin\frac{\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\,\vec{e}_z.$$

Notons T la tension de la corde.
Le principe de la dynamique appliqué à cet élément de corde de masse $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}x$ s'écrit, en projection sur $\vec{e}_z$:

$$\mu\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = I_0B_0\cos\omega t\sin\frac{\pi x}{L}\,\mathrm{d}x + T\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

On a donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{I_0B_0}{\mu}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\omega t},$$

avec $\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$.

2. On remplace $z(x,t)$ par l'expression proposée dans l'équation différentielle, et on obtient

$$\boxed{C = \frac{I_0}{B_0}\mu\frac{1}{\frac{c^2\pi^2}{L^2} - \omega^2}} \quad \text{pour } \omega \neq \frac{\pi c}{L}.$$

Lorsque $\omega \to \frac{\pi c}{L}$, qui est la pulsation du mode fondamental, on a $C \to \infty$: on observe un phénomène de résonance. Dans la pratique, l'amplitude n'est pas infinie!

2 — Corde vibrante

1. Notons T la tension de la corde, considérée comme uniforme (résultat obtenu en projetant le PFD selon Ox).
Le principe fondamental de la dynamique pour un élément de corde compris entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ s'écrit

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{e}_y = -\vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+\mathrm{d}x,t). \qquad (1)$$

Projetons (1) selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned}\mu\mathrm{d}\ell\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -T\sin\alpha(x,t) + T\sin\alpha(x+\mathrm{d}x,t)\\ &\simeq -T\alpha(x,t) + T\alpha(x+\mathrm{d}x,t)\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{d}\ell \simeq \mathrm{d}x$, on a

$$\mu\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T\frac{\partial\alpha}{\partial x}\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \alpha(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

On en déduit

$$\boxed{c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \qquad (2)$$

avec

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}.$$

L'équation (2) est appelée **équation de d'Alembert**.

2. Soit L la longueur de la corde d'une guitare. Le mode fondamental est tel que

$$\Lambda = 2L = \frac{c}{f} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

La tension vaut donc $T = 4L^2f^2\mu$.
On donne $\mu \approx 1\ \mathrm{g\cdot m^{-1}}$.
La longueur a pour ordre de grandeur $L \approx 1$ m; la fréquence a pour ordre de grandeur $f \approx 10^2$ Hz. On en déduit $T \approx 4\times 1\times 100^2\times 10^{-3} = 400$ N.
En ordre de grandeur $\boxed{T \approx 10^2\ \mathrm{N}}$.

3. Écrivons que $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ est solution de (2) :

$$c^2f''(x) + \omega^2 f(x) = 0,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}f(x) = 0$$

dont la solution générale est de la forme

$$f(x) = A\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right).$$

La condition $y(0,t) = 0$, $\forall t$ s'écrit $f(0) = 0 = B$. Finalement :

$$\boxed{f(x) = A\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)}.$$

La condition $y(L,t) = 0$, $\forall t$ s'écrit

$$A\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0.$$

Comme $A \neq 0$, on a $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$, d'où $\frac{\omega L}{c} = n\pi$.
Les seules pulsations possibles sont de la forme

$$\boxed{\omega_n = n\omega_1} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_1 = \frac{c\pi}{L}}.$$

4. La condition initiale se linéarise en

$$y(x,0) = 3b\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - b\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right). \qquad (3)$$

La solution générale du mouvement est une superposition des modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right),$$

la condition initiale s'écrivant alors

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En identifiant avec(3), on en déduit que seuls les harmoniques $n=1$ et $n=3$ sont présents :

$$A_1\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A_3\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) = 3b\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - b\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

valable $\forall x$, d'où $A_1 = 3b$ et $A_3 = -b$. On en déduit

$$y(x,t) = 3b\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{c\pi t}{L}\right) - b\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{3c\pi t}{L}\right).$$

➤ Cette onde n'est ni stationnaire, ni progressive.

3 — Corde vibrante

1. Question de cours : établir

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}.$$

2. Toutes les solutions sont harmoniques.

Dans l'ordre :

(1) onde progressive dans le sens x croissants ;

(2) onde progressive dans le sens x décroissants ;

(3) onde stationnaire ;

(4) et (5) superposition de deux ondes progressives de sens opposés.

On remarquera que le 4e cas est en fait une onde stationnaire :

$$y_4(x,t) = A[\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx)] = 2A\cos(\omega t)\cos(kx)$$

Le cas (5) n'est ni une onde progressive, ni une onde stationnaire.

3. Les conditions aux limites sont

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\,; \quad \forall t.$$

Elles ne peuvent être vérifiées que par une onde stationnaire (présence de deux nœuds de vibration) ; seules les solutions y_3 et y_4 peuvent donc *a priori* convenir.

Si on considère la solution $y_4(x,t)$, la condition en $x=0$ s'écrit $2A\cos(\omega t) = 0$, $\forall t$, d'où $A = 0$ et $y_4(x,t) = 0$. Cette solution ne peut convenir.

La solution $y_3(x,t)$ donne d'une part :

$$y_3(0,t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]C = 0$$

d'où $C = 0$. D'autre part :

$$y_3(L,t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]D\sin(kL) = 0.$$

On a donc soit $D = 0$, ce qui entraîne $y_3(x,t) = 0$ qui est exclus, soit $\sin(kL) = 0$. On a donc $kL = n\pi$, avec $n \in \mathbf{N}$.

De la relation de dispersion $\omega = kc$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; on déduit :

$$\boxed{\omega_n = n\frac{c\pi}{L}\text{ , avec } n \in \mathbf{N}}.$$

4. D'après la question précédente,

$$y_3(x,t) = D[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\sin(kx).$$

La condition initiale s'écrit :

$$y_3(x,0) = 0 = AD\sin(kx)\ , \forall x.$$

On a donc soit $D = 0$, soit $A = 0$.

Le premier cas est exclus car on aurait $y_3(x,t) = 0$.

On a donc $A = 0$, ce qui donne

$$y_3(x,t) = DB\sin(\omega t)\sin(kx).$$

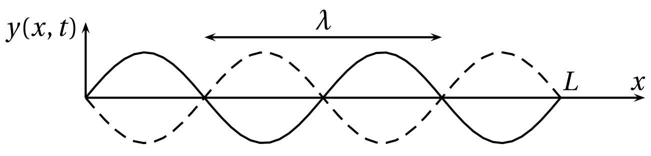
L'amplitude de la solution étant $Y = DB$, la solution de l'équation différentielle est donc

$$\boxed{y_3(x,t) = Y\sin(\omega t)\sin(kx)},$$

avec

$$k_n = n\frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = n\frac{c\pi}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

5. L'observation de 5 nœuds de déplacement correspond à 4 fuseaux.



La longueur d'un fuseau étant $\lambda/2$, on a donc $L = 2\lambda$. Comme $\lambda = \dfrac{c}{f}$, où f est la fréquence, on en déduit, compte tenu de l'expression de la célérité c :

$$L = \frac{2}{f}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

d'où :

$$\mu = \frac{4T}{L^2 f^2} = \frac{4\times 10}{2^2\times 10^2} = 0{,}10\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\,.$$

La corde a pour masse linéique $\boxed{\mu = 100\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$.

---

4 — Du plomb ou de l'or ?

1. Effectuer l'analyse dimensionnelle… On retrouve $a = 1/2$ et $b = -1/2$.

2. Dans la 1re expérience, la tension de la corde est $T = mg = \rho V g$ en notant ρ la masse volumique de la boule et V son volume. On obtient ce résultat en écrivant que la somme des forces appliquées la boule est nulle à l'équilibre : elle est soumise à son poids et à la tension de la corde.

On observe deux fuseaux, donc la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{c}{f}$ vaut $\lambda = L$, soit

$$L = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{\rho V g}{\mu}}\,.?$$

Dans la 2e expérience, la boule est soumise à la tension de la corde, à son poids, et à la poussée d'Archimède (résultante des forces de pression de fluide).

On en déduit la tension de la corde est $T = mp - \Pi_{\mathrm{a}}$ où $\Pi_{\mathrm{a}} = \rho_{\mathrm{e}} V g$ est la poussée d'Archimède, en notant ρ_{e} la masse volumique de l'eau.

On observe 4 fuseaux, donc $L = 2\lambda'$, d'où la longueur d'onde

$$\lambda' = \frac{L}{2} = \frac{1}{f'}\sqrt{\frac{(\rho-\rho_{\mathrm{e}})Vg}{\mu}}\,.$$

On en déduit

$$4 = \frac{f'^2}{f^2}\,\frac{\rho}{\rho-\rho_{\mathrm{e}}}$$

soit

$$(4f^2 - f'^2)\rho = 4f^2\rho_{\mathrm{e}}\,.$$

On a donc

$$\rho = \frac{4f^2}{4f^2 - f'^2}\,\rho_{\mathrm{e}}\,.$$

On calcule $\rho = 10{,}3\rho_{\mathrm{e}} = 10{,}3\times 10^3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

La boule est — hélas — en plomb !

5 — Étude d'une corde pincée

1. La condition initiale portant sur la position de la corde s'écrit :

$$\boxed{y(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{a}x & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \frac{h(L-x)}{L-a} & \text{pour } a < x \leqslant L \end{cases}}\,.$$

La condition initiale portant sur la vitesse s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0}\,.$$

2. La vitesse de chaque point de la corde est donnée par :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} y_{0n}\frac{nc\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{nc\pi t}{L}+\psi_n\right)\,.$$

La condition initiale correspondante s'écrit alors :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} y_{0n}\frac{nc\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\psi_n = 0 \quad \forall x\,.$$

On en déduit $\sin\psi_n = 0$; on peut donc choisir $\boxed{\psi_n = 0}$, $\forall n$. On a alors :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)\,. \tag{4}$$

3. Le développement en série de Fourier d'une fonction impaire de période $2L$ s'écrit :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n\frac{x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)\sin\left(2\pi n\frac{x}{2L}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0,L]$, la fonction F coïncide par définition à l'élongation initiale : $F(x) = y(x,0)$; on a donc :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\left[\int_0^a \frac{h}{a}x\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x \right.\\ &\qquad \left. + \int_a^L \frac{h(L-x)}{L-a}\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{2}{L}\left[\frac{h}{a}\int_0^a x\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x \right.\\ &\qquad \left. + \frac{h}{L-a}\int_a^L (L-x)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x\right]\,. \end{aligned}$$

Posons $k = \dfrac{n\pi}{L}$; les intégrales se calculent en intégrant par parties :

$$\int_0^a x\sin kx\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_0^a + \frac{1}{k}\int_0^a \cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{a}{k}\cos(ka) + \frac{1}{k^2}\left[\sin(kx)\right]_0^a = -\frac{a}{k}\cos(ka) + \frac{1}{k^2}\sin(ka)$$

et

$$\int_a^L (L-x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{L-x}{k}\cos(kx)\right]_a^L - \frac{1}{k}\int_a^L \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{L-a}{k}\cos(ka) - \frac{1}{k^2}\Big[\sin(kx)\Big]_a^L = \frac{L-a}{k}\cos(ka) + \frac{\sin(ka)}{k^2}$$

car $\sin(kL) = 0$ d'après les conditions aux limites. On a donc :

$$b_n = \frac{2}{L}\left[-\frac{h}{k}\cos(ka) + \frac{h}{ak^2}\sin(ka) + \frac{h}{k}\cos(ka) + \frac{h}{k^2(L-a)}\sin(ka)\right] = \frac{2h}{k^2 a(L-a)}\sin(ka)$$

soit en remplaçant k par son expression :

$$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 a(L-a)}\sin\left(n\pi\frac{a}{L}\right).$$

La fonction F se décompose sur $\mathbb{R}$ en :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right).$$

Comme $y(x,0) = F(x)$ sur $[0,L]$, on peut écrire :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right).$$

Or, d'après l'expression (4) établie à la question précédente :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En identifiant les deux dernières égalités, on peut en déduire $y_{0n} = b_n$. En remplaçant b_n par son expression, on en déduit le développement de la solution de l'équation d'onde :

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 a(L-a)}\sin\left(n\pi\frac{a}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)}.$$

4. L'amplitude de l'harmonique de rang n est :

$$b_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 a(L-a)}\sin\left(n\pi\frac{a}{L}\right).$$

Les amplitudes des harmoniques décroissent donc en $1/n^2$; elles sont rapidement très faibles quand n augmente. Le son ne sera pas très riche en harmoniques, c'est-à-dire pas très brillant à l'écoute.

5. L'amplitude de l'harmonique de rang n est proportionnelle à $\sin\left(n\pi\frac{a}{L}\right)$. Elle est nulle si le point d'excitation de la corde a une abscisse a telle que $\sin\left(n\pi\frac{a}{L}\right) = 0$, soit $a = \frac{pL}{n}$, avec p entier. L'endroit où l'on excite la corde influe donc sur le timbre du son émis.

6. Lorsque a est très petit ($a \ll L$), on a $\sin\frac{n\pi a}{L} \sim \frac{n\pi a}{L}$ et $L-a \sim L$, et l'expression de b_n se simplifie en

$$b_n \sim \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 aL}n\pi\frac{a}{L},$$

soit :

$$\boxed{b_n = \frac{2h}{n\pi}}.$$

L'amplitude des harmoniques ne décroît plus qu'en $1/n$: le son émis est plus riche en harmoniques.

7. L'amplitude de l'harmonique de rang n varie comme

$$b_n = \frac{B}{n^2}\sin\left(n\pi\frac{a}{L}\right).$$

On peut calculer le CGS pour les 30 premiers harmoniques avec Python par exemple, en utilisant l'expression

$$\frac{\sum_{n=1}^{30}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\mathrm{Pi}a}{L}\right)}{\sum_{n=1}^{30}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\mathrm{Pi}a}{L}\right)}.$$

Pour une attaque de la corde à $a = \frac{L}{4}$, on trouve $CGS = 1{,}18$; pour $a = \frac{L}{20}$, on obtient $CGS = 3{,}37$. Le son est plus brillant si on pince la corde en un point proche de son extrémité.

---

6 — Étude d'une corde frappée

1. La corde étant initialement au repos, on en déduit $\boxed{y(x,0) = 0}$, $\forall x \in [0,L]$.

Les vitesses des points de la corde sont donnés à $t = 0$ par :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant x < a \\ u & \text{pour } a \leqslant x < a+e \\ 0 & \text{pour } a+e \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

2. La condition portant sur $y(x,0)$ s'écrit :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\psi_n) = 0\,, \quad \forall x \in [0,L]$$

d'où $\cos(\psi_n) = 0$, $\forall n$. Le choix $\boxed{\psi_n = -\frac{\pi}{2}}$ convient.

Comme $\cos\left(\frac{nc\pi t}{L} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)$, la solution de l'équation de d'Alembert est cherchée sous la forme :

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)}. \qquad (5)$$

3. Le développement en série de Fourier d'une fonction impaire de période $2L$ s'écrit :

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \qquad (6)$$

avec :

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^{L} V(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} V(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x\,.$$

Sur l'intervalle $[0, L]$, la fonction V coïncide par définition à la vitesse initiale : $V(x) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$; on a donc :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{a-\frac{e}{2}}^{a+\frac{e}{2}} u \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x\,.$$

Comme $e \ll L$, la fonction $\sin\left(n\pi \dfrac{x}{L}\right)$, de période $2L$, varie très peu sur un intervalle de largeur e ; on peut donc considérer que pour $a - \dfrac{e}{2} \leqslant x \leqslant a + \dfrac{e}{2}$, elle vaut $\sin\left(n\pi \dfrac{x}{L}\right) \simeq \sin\left(\dfrac{n\pi a}{L}\right)$. On en déduit :

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L} ue \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}\,.$$

D'après (5) :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{L} y_{0n} \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{L} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,.$$

Comme par construction $V(x) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$, en identifiant avec le développement (6) on obtient :

$$b_n = \frac{2ue}{L} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = \frac{nc\pi}{L} y_{0n}$$

d'où l'amplitude de l'harmonique de rang n :

$$\boxed{y_{0n} = \frac{2ue}{nc\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}\,.$$

La solution de l'équation de d'Alembert vérifiant les conditions initiales s'écrit alors :

$$\boxed{y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ue}{nc\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)}\,.$$

Les amplitudes des harmoniques décroissent en $1/n$, plus lentement que dans le cas d'une corde pincée (se reporter à l'exercice précédent, où l'on a établi une décroissance en $1/n^2$). **Le son d'un piano est plus riche en harmoniques que le son d'un clavecin (instrument à cordes pincées)**.

4. L'amplitude de l'harmonique de rang n, donnée par

$$y_{0n} = \frac{2ue}{nc\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

est nulle si a, position du point d'impact du marteau sur la corde, est tel que $\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = 0$, soit $\frac{n\pi a}{L} = p\pi$, avec p entier. Il faut donc que

$$\boxed{a_p = p\frac{L}{n} \quad \text{avec } p \text{ entier, } 1 \leqslant p \leqslant n-1}\,.$$

On supprimera l'harmonique de rang $n = 7$ en choisissant $\dfrac{7\pi a}{L} = p\pi$, soit

$$a = p\frac{L}{7}\,.$$

Comme $0 < a < L$, 6 positions conviennent, de $p = 1$ à $p = 6$.

Le modèle étudié ici est très simplifié. Le spectre du son ne dépend pas seulement de la position du point d'impact, mais aussi du poids et de la forme du marteau, du diamètre de la corde, de la durée du contact entre le marteau et la corde. Dans la pratique, la position du marteau n'est pas calculée de façon à éteindre des harmoniques, mais de façon à obtenir la sonorité voulue. En général, a/L varie de $1/12$ à $1/17$ pour un piano moderne.

---

7 — Corde lestée

1. On impose un nœud de vibration en $x = 0$; on cherche donc une solution en onde stationnaire, telle que la partie spatiale soit nulle pour $x = 0$. On écrit donc

$$y_1(x, t) = Y_1 \sin(kx) \cos(\omega t + \psi_1)\,.$$

On impose de même un nœud de vibration en $x = L$; on cherche donc une solution en onde stationnaire, telle que la partie spatiale soit nulle pour $x = L$. On écrit donc

$$y_2(x, t) = Y_2 \sin[k(L - x)] \cos(\omega t + \psi_2)\,.$$

2. On écrit d'une part la continuité de la corde en son milieu, soit

$$y_1\left(\frac{L}{2}, t\right) = y_2\left(\frac{L}{2}, t\right)\,. \qquad (7)$$

On écrit le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m_0, en projection selon Oy :

$$m_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}(L/2, t) = T_{2y} + T_{1y}$$

où la projection selon Oy de la force de tension exercée par la partie droite de la corde est

$$T_{2y} = T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2, t)$$

et celle exercée par la partie gauche

$$T_{1y} = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2, t)\,.$$

On a donc

$$m_0 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}(L/2, t) = T_0 \left[\frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2, t) - \frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2, t) \right]. \quad (8)$$

3. Avec les expressions de $y_1(x, t)$ et $y_2(x, t)$ établies à la question 1, la relation (7) s'écrit

$$Y_1 \sin\left(\frac{kL}{2}\right)\cos(\omega t + \psi_1) = Y_2 \sin\left(\frac{kL}{2}\right)\cos(\omega t + \psi_2) \quad \forall t\,.$$

Cette relation peut être vérifiée si

$$\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0$$

c'est-à-dire si $\dfrac{kL}{2} = n\pi$.

Les modes propres $k_n = n\dfrac{2\pi}{L}$ conviennent.

Les modes propres de la corde non lestée sont $k_n = n\dfrac{\pi}{L}$. Le sous-ensemble qui convient ici est constitué des **modes propres pairs de la corde non lestée**.

➤ Ces modes propres présentent un nœud de vibration au milieu, là où est présente la masse m_0. Cette masse restant immobile pour ces modes, elle ne perturbe pas le mouvement de la corde, et ces modes continuent de pouvoir être observés.

4. Si $\sin(kL/2) \neq 0$, la relation de continuité s'écrit

$$Y_1 \cos(\omega t + \psi_1) = Y_2 \cos(\omega t + \psi_2) \quad \forall t\,.$$

On a donc $\psi_1 = \psi_2$ et $Y_1 = Y_2$. Notons ψ_0 le déphasage commune et Y_0 l'amplitude commune. On a donc

$$y_1(x, t) = Y_0 \sin(kx)\cos(\omega t + \psi_0)$$

et

$$y_2(x, t) = Y_0 \sin[k(L - x)]\cos(\omega t + \psi_0)\,.$$

On a donc

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(L/2) = kY_0 \cos(kL/2)\cos(\omega t + \psi_0)$$

et

$$\frac{\partial y_2}{\partial x}(L/2) = -kY_0 \cos(kL/2)\cos(\omega t + \psi_0)\,.$$

La relation (8) s'écrit, après simplification par $\cos(\omega t + \psi_0)$ car la relation doit être vérifiée pour tout t

$$-\omega^2 m_0 Y_0 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = -2kY_0 T_0 \cos\left(\frac{kL}{2}\right),$$

soit

$$\omega^2 m_0 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 2kT_0 \cos\left(\frac{kL}{2}\right).$$

On en déduit avec $c^2 = \dfrac{T_0}{\mu}$ et $\omega = kc$

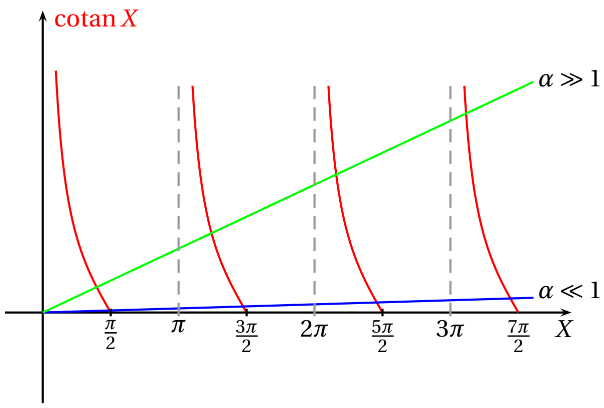
$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} = \frac{m_0\omega^2}{2kT_0} = \frac{m_0\omega c}{2T_0} = \frac{m_0\omega c}{2\mu c^2} = \frac{m_0}{\mu L}\left(\frac{\omega L}{2c}\right)$$

soit

$$\boxed{\operatorname{cotan}\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \alpha\left(\frac{\omega L}{2c}\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = \frac{m_0}{\mu L}}\,.$$

On remarque que $\alpha = \dfrac{m_0}{m}$, où $m = \mu L$ est la masse de la corde.

En posant $X = \dfrac{\omega L}{2c}$, on se ramène à la résolution de $\operatorname{cotan} X = \alpha X$. Nous pouvons faire une résolution graphique, en cherchant les intersections des graphes de $f(X) = \operatorname{cotan} X$ et $g(x) = \alpha X$.



On peut distinguer deux cas limites.

Pour $\alpha \ll 1$, soit $m_0 \ll m$, on obtient les solutions

$$X_n \approx \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \omega_n \approx (2n+1)\frac{c\pi}{L}\,.$$

On retrouve les modes impairs de la corde vibrante non lestée (la masse du lest est négligeable). Ces modes viennent en compléments des modes pairs $\omega_n = 2n\dfrac{c\pi}{L}$ trouvés précédemment.

Pour $\alpha \gg 1$, soit $m_0 \gg m$, on obtient les solutions

$$X_n \approx n\pi \quad \text{soit} \quad \omega_n \approx 2n\frac{c\pi}{L}\,.$$

On retrouve les modes pairs de la corde vibrantes, déjà déterminés précédemment : si la masse du lest est très élevée, il impose un nœud de vibration du fait de inertie (la corde ne peut le mettre en mouvement).

8 — Corde vibrante dont l'extrémité est mobile

Extrémité purement élastique

1. L'élongation vérifie l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.
Avec $y(x,t) = Y(x)\cos(\omega t)$, cette équation s'écrit $-\omega^2 Y(x)\cos(\omega t) - c^2 Y''(x)\cos(\omega t) = 0$, soit

$$\boxed{Y''(x) + k^2 Y(x) = 0}$$

où l'on a posé $k = \omega/c$.

2. La condition à la limite étant $y(L) = 0$, nous écrivons la solution générale de l'équation précédente sous la forme d'un sinus (un sinus étant nul quand son argument est nul, la prise en compte de la condition sera plus simple) :

$$Y(x) = A\sin(kx + \varphi).$$

La condition $Y(L) = 0$ s'écrit alors $Y(L) = A\sin(kL + \varphi) = 0$; on peut choisir $\varphi = -kL$, d'où

$$\boxed{Y(x) = A\sin[k(x-L)]}.$$

3. La composante verticale de la tension de la corde à l'extrémité $x = 0$ est donnée par

$$T_y(0,t) = T\sin\alpha(0,t) \approx T\alpha(0,t) = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}.$$

Elle est d'autre part égale à la tension du ressort dont l'élongation est $y(0,t)$, d'où la relation

$$\boxed{T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = Ky(0,t)}.$$

On en déduit $TY'(0)\cos(\omega t) = KY(0)\cos(\omega t)$, d'où

$$\boxed{TY'(0) = KY(0)}.$$

4. La condition précédente s'écrit

$$TkA\cos(kl) = -KA\sin(kL).$$

L'ensemble de ses solutions forme un ensemble discret. Cette équation peut s'écrire

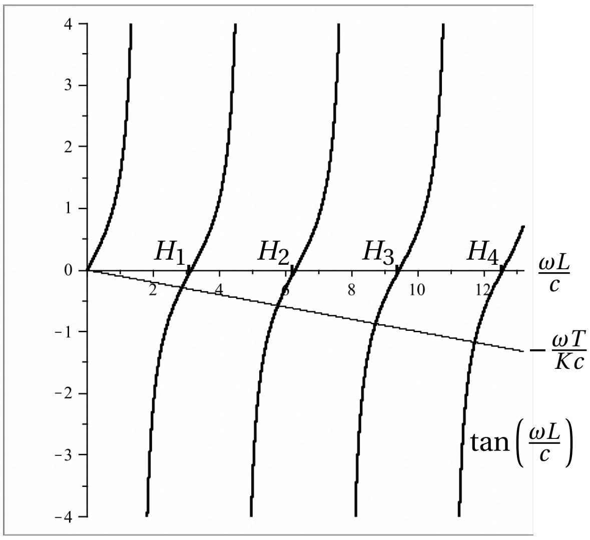
$$\boxed{\tan(k_nL) = -\frac{k_nT}{K}}.$$

Avec $\omega_n = k_nc$, on a de même

$$\boxed{\tan\left(\frac{\omega_nL}{c}\right) = -\frac{\omega_nT}{Kc}}.$$

5. On représente sur le même graphe

$$f(\omega) = \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad \text{et} \quad g(\omega) = -\frac{\omega T}{Kc} :$$



Les fréquence propres sont données par l'intersection des deux courbes. Les points correspondant aux harmoniques, de pulsations $n\omega_1$ dans le cas de l'extrémité rigide, sont notés H_n. On voit sur le graphe que $\boxed{\omega_n < n\omega_1}$: **l'effet d'une extrémité élastique est d'abaisser les fréquences propres**.

Extrémité purement massique

6. La composante verticale de la tension de la corde en $x = 0$ a été établie précédemment : $T_y(0,t) \approx T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$.
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'extrémité de la corde de masse M_0 s'écrit, en projection selon $\vec{e}_y$

$$\boxed{M_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0,t) = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}}.$$

7. Avec $y(x,t) = A\sin[k(x-L)]\cos(\omega t)$, on en déduit $-\omega^2 M_0\sin(-kL) = Tk\cos(kL)$, d'où $\tan(kL) = \dfrac{Tk}{M_0\omega^2}$.
Comme $\omega = kc$, on en déduit

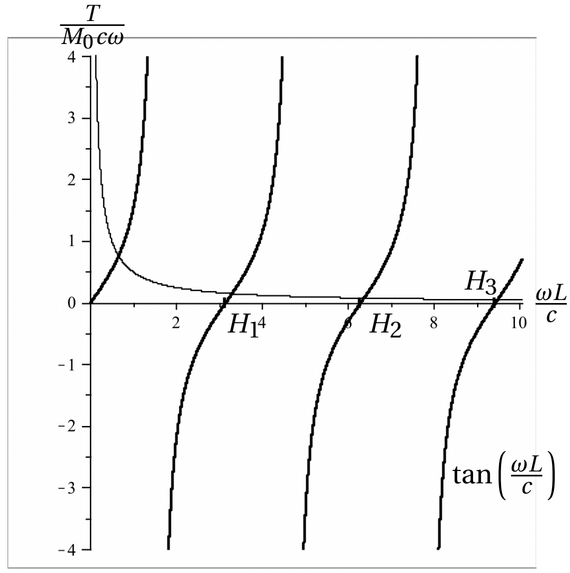
$$\boxed{\tan(k_nL) = \frac{T}{M_0c^2k_n}},$$

l'indice n précisant que les solutions forment un ensemble discret.
Comme $\omega = kc$, on a

$$\boxed{\tan\left(\frac{\omega_nL}{c}\right) = \frac{T}{M_0c\omega_n}}.$$

8. On représente sur le même graphe

$$f(\omega) = \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) \quad \text{et} \quad g(\omega) = \frac{T}{M_0c\omega} :$$



Les fréquence propres sont données par l'intersection des deux courbes. Les points correspondant aux harmoniques, de pulsations $n\omega_1$ dans le cas de l'extrémité rigide, sont noté H_n. On voit sur le graphe que $\boxed{\omega_n > n\omega_1}$: **l'effet d'une extrémité massique est d'élever les fréquences propres**.