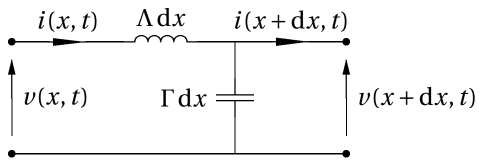
# TD ondes n° 3 — Câble coaxial

## 1 — Câble coaxial

On considère un coaxial modélisé par une ligne à constantes réparties, caractérisée par une inductance linéique $\Lambda$ et une capacité linéique $\Gamma$ : une longueur $\mathrm{d}x$ de câble a une inductance $\Lambda \mathrm{d}x$ et une capacité $\Gamma \mathrm{d}x$.




**1.** Établir les équations couplées vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$, et en déduire l'équation d'onde vérifiée par la tension et le courant, en précisant l'expression de la célérité $c$.

**2.** On considère une onde de tension progressive harmonique selon $+\vec{e}_x$ :

$$\underline{u}^+(x,t) = \underline{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}\,.$$

En déduire l'onde de courant $\underline{i}^+(x,t)$ associée, et montrer que

$$\frac{\underline{u}^+(x,t)}{\underline{i}^+(x,t)} = Z_\mathrm{c}$$

en précisant l'expression de $Z_\mathrm{c}$.

**3.** Dans le cas d'une onde progressive dans le sens des $x$ décroissants de la forme

$$\underline{u}^-(x,t) = \underline{U'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kx)}\,,$$

que devient le rapport $\dfrac{\underline{u}^-(x,t)}{\underline{i}^-(x,t)}$ ?

**4.** On considère l'onde de tension

$$\underline{u}(x,t) = \underline{u}_\mathrm{i}(x,t) + \underline{u}_\mathrm{r}(x,t) = V\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} + \underline{V'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kx)}\,.$$

Comment interpréter les deux termes constituant cette onde ?

Déduire des questions précédentes l'expression de l'onde de courant $\underline{i}(x,t)$.

**5.** Une résistance $R_\mathrm{u}$ est branchée à l'extrémité $x = L$ du câble.

Établir l'expression du coefficient de réflexion en amplitude de tension défini par

$$r_\mathrm{u} = \frac{\underline{u}_\mathrm{r}(L,t)}{\underline{u}_\mathrm{i}(L,t)}\,.$$

Que vaut alors le coefficient de réflexion en amplitude de courant ?

**6.** En déduire que l'on peut écrire

$$\underline{u}(x,t) = V\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} + r_\mathrm{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t - k(2L-x)]}\right]\,.$$

Interpréter l'expression du deuxième terme.

Exprimer de même $\underline{i}(x,t)$.

**7.** On considère la ligne en sortie ouverte. Que vaut alors $r_\mathrm{u}$ ?

En déduire l'expression de $u(x,t)$ et $i(x,t)$ (notation réelle).

Quel type d'onde observe-t-on ?

Pour quelles valeurs de $f$ a-t-on un ventre de tension en $x = 0$ ? Et un nœud de tension ?

**8.** Mêmes questions quand la ligne est court-circuitée à sa sortie $x = L$.

**9.** Un générateur impose en $x = 0$ la tension $u(x = 0, t) = U_0 \cos(\omega t)$.

On cherche une onde de tension en régime établi sous la forme

$$u(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)\,.$$

La ligne étant en sortie ouverte, en déduire les valeurs de $\psi$ qui conviennent, puis l'expression de $u(x,t)$ correspondante.

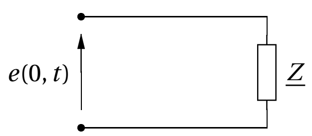
Montrer qu'il apparaît un phénomène de résonance pour des valeurs $f_n$ de la fréquence que l'on explicitera. À quel autre phénomène cette situation fait-elle penser ?

## 2 — Ligne électrique

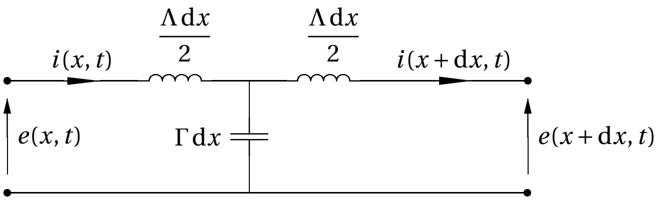
Si le courant qui parcourt un circuit électrique a une fréquence trop élevée, on ne peut plus dire qu'il est égal en tout point. On se propose d'étudier un tel cas.

Soient deux fils conducteurs parallèles de longueur $L$, la ligne ayant une inductance linéique $\Lambda$ et une capacité linéique $\Gamma$. On relie les deux fils en $x = L$ par un dipôle d'impédance $\underline{Z}$.

En $x = 0$, on impose une tension $e(0,t) = E_0 \cos(\omega t)$.



On donne le schéma équivalent d'une portion de ligne de longueur d$x$.




**1.** Montrer que pour tout $x$ :

$$\frac{\partial e}{\partial x}+\Lambda\frac{\partial i}{\partial t}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial e}{\partial t}+\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial i}{\partial x}=0\,.$$

**2.** Montrer que

$$\underline{e}(x,t)=\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega(t-x/v)]}+\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega(t+x/v)]}$$

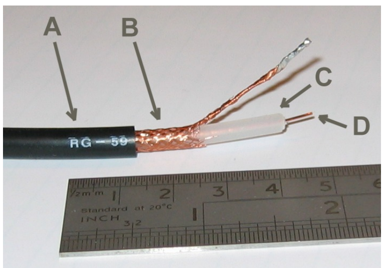
est solution. Expliciter $v$.
Expliquer physiquement ces deux termes.
Exprimer $\alpha$ et $\beta$ en utilisant les conditions limites :

$$\underline{e}(0,t)=E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{e}(L,t)=\underline{Z}\,\underline{i}(L,t)\,.$$

On pourra utiliser le fait que, en tout point du circuit, le courant moyen est nul.

**3.** Déterminer $\underline{Z}$ tel qu'il n'existe qu'une onde se déplaçant de $x=0$ à $x=L$.

## 3 — Câble coaxial




Les câbles coaxiaux sont utilisés pour transmettre des informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour des interconnexions dans les réseaux informatiques ; toutefois, la fibre optique est préférée pour des transmissions sur des distances supérieures au kilomètre, son atténuation étant bien inférieure à celle du câble coaxial.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur $L$, l'un entourant l'autre :

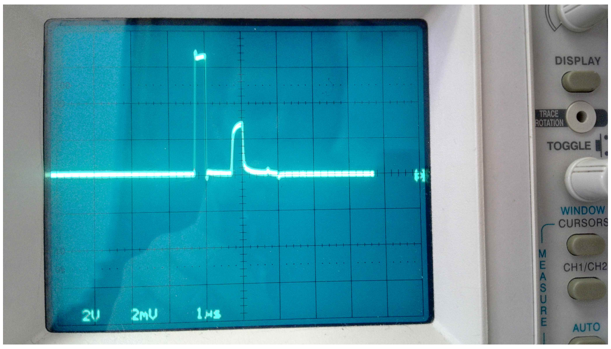
— le conducteur central (D), appelé *âme*, est en général massif (en cuivre) ;

— le conducteur extérieur (B) est un blindage constitué d'une tresse métallique, parfois enroulée sur une feuille d'aluminium.

Les deux conducteurs sont séparés par un isolant (C), le plus souvent en téflon ou en polyéthylène. L'ensemble est entouré d'une gaine isolante (A), en PVC, polyéthylène, téflon ou caoutchouc synthétique.

On considère un câble coaxial long de 100 m, dont une extrémité (que nous appellerons l'entrée) est reliée à un générateur, et l'autre à rien (la sortie est dite « ouverte »).

Un générateur placé en $x=0$ envoie une impulsion à l'instant $t=0$. À l'oscilloscope, placé à l'entrée du câble, on relève la tension ci-dessous.




**1.** Interpréter et déterminer la vitesse de l'onde dans le câble. Commenter.

**2.** On modélise le câble par une ligne à constantes réparties, caractérisée par une inductance linéique $\Lambda$ et une capacité linéique $\Gamma$ : une longueur d$x$ de câble a une inductance $\Lambda$d$x$ et une capacité $\Gamma$d$x$ (voie schéma exercice 1).

Établir les équations de propagation de $i(x,t)$ et $v(x,t)$. Que vaut la célérité ?

**3.** On mesure la capacité du câble avec un multimètre. Faut-il placer la sortie en court-circuit ou en circuit ouvert ? On obtient $C=7{,}46$ nF.

On mesure l'inductance du câble avec un multimètre. Faut-il placer la sortie en court-circuit ou en circuit ouvert ? On obtient $L=33{,}4$ µH. Ces mesures sont-elles compatibles avec la célérité trouvée d'après l'oscillogramme ?

**4.** La fin du câble est en circuit ouvert. Comment traduire cette condition ?

Quelle est la conséquence sur $i(x,t)$ et $v(x,t)$ ?

Si on court-circuite l'extrémité du câble, que verrait-on à l'oscilloscope ?

*Indication* : on calculera les coefficients de réflexion en intensité et en courant à l'extrémité du câble.

**5.** Le modèle proposé est-il satisfaisant pour expliquer l'allure de l'oscillogramme en sortie ouverte ?