Physique des ondes **Taux d'onde stationnaire — solution**

Taux d'onde stationnaire dans un câble coaxial

On a vu dans l'exercice 1 du TD nº 3 que l'onde de tension dans un câble coaxial de longueur L en régime harmonique peut s'écrire
$$\underline{u}(x,t) = V\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t - k(2L-x)]}\right]$$
où r est le coefficient de réflexion en tension donné par
$$r = \frac{R - Z_\mathrm{c}}{R + Z_\mathrm{c}}$$
quand le câble d'impédance caractéristique Z_c est branché à son extrémité $x = L$ sur une résistance R.

1. Le coefficient de réflexion varie de $r = -1$ (quand $R = 0$ lorsque l'extrémité du câble est court-circuitée)) à $r = +1$ (quand $R \to \infty$ lorsque l'extrémité du câble est en sortie ouverte).
On a donc $\boxed{-1 \leqslant r \leqslant +1}$.

2. On obtient la partie réelle
$$\boxed{u(x,t) = V\big[\cos(\omega t - kx) + r\cos[\omega t - k(2L-x)]\big]}\,.$$

3.a) Pour $r = 0$, on a
$$u(x,t) = V\cos(\omega t - kx)\,.$$
Il s'agit d'une onde progressive harmonique dans le sens des x croissants, ce qui est attendu car il n'y a pas d'onde réfléchie (le coefficient de réflexion est nul).

3.b) Pour $r = +1$, on a
$$u(x,t) = V\big[\cos(\omega t - kx) + \cos[\omega t - k(2L-x)]\big]$$
soit
$$\boxed{u(x,t) = 2V\cos(\omega t - kL)\cos[k(L-x)]}\,.$$
Il s'agit d'une onde stationnaire, présentant un ventre de tension à l'extrémité ouverte $x = L$:
$$u(L,t) = 2V\cos(\omega t - kL)\,.$$

3.c) Pour $r = -1$, on a
$$u(x,t) = V\big[\cos(\omega t - kx) - \cos[\omega t - k(2L-x)]\big]$$
soit
$$\boxed{u(x,t) = 2V\sin(\omega t - kL)\sin[k(L-x)]}\,.$$
Il s'agit d'une onde stationnaire, présentant un nœud de tension à l'extrémité ouverte $x = L$: $u(L,t) = 0$.

4. En reprenant l'expression complexe de l'onde de tension, on a
$$\begin{aligned}
U(x)^2 = \left|\underline{u}(x,t)\right|^2 = \underline{u}(x,t)\underline{u}^*(x,t) &= V\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t - k(2L-x)]}\right] \times V\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t - kx)} + r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[\omega t - k(2L-x)]}\right]\\
&= V^2\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx} + r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2L-x)}\right]\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx} + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2L-x)}\right] = V^2\left[1 + r^2 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[kx - k(2L-x)]} + r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[kx - k(2L-x)]}\right]\\
&= V^2\left[1 + r^2 + r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2L-x)} + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2L-x)}\right] = V^2\left[1 + r^2 + 2r\cos[2k(L-x)]\right]
\end{aligned}$$
soit
$$\boxed{U(x) = V\sqrt{\left[1 + r^2 + 2r\cos[2k(L-x)]\right]}}\,.$$

5. L'amplitude est maximale quand le terme $2r\cos[2k(L-x)]$ est maximal.
Si $r > 0$, c'est le cas pour $\cos[2k(L-x)] = +1$, et

$$U_{\text{max}} = V\sqrt{1+r^2+2r} = V\sqrt{(1+r)^2} = V(1+r)\,.$$

Si $r < 0$, c'est le cas pour $\cos[2k(L-x)] = -1$, et

$$U_{\text{max}} = V\sqrt{1+r^2-2r} = V\sqrt{(1-r)^2} = V(1-r)\,.$$

Comme $|r| = -r$ pour $r < 0$, on peur résumer ces deux cas par l'expression générale

$$\boxed{U_{\text{max}} = V(1+|r|)}\,.$$

L'amplitude est minimale quand le terme $2r\cos[2k(L-x)]$ est minimal.
Si $r > 0$, c'est le cas pour $\cos[2k(L-x)] = -1$, et

$$U_{\text{min}} = V\sqrt{1+r^2-2r} = V\sqrt{(1+r)^2} = V(1-r)\,.$$

Si $r < 0$, c'est le cas pour $\cos[2k(L-x)] = +1$, et

$$U_{\text{min}} = V\sqrt{1+r^2+2r} = V\sqrt{(1-r)^2} = V(1+r)\,.$$

Comme $|r| = -r$ pour $r < 0$, on peur résumer ces deux cas par l'expression générale

$$\boxed{U_{\text{min}} = V(1-|r|)}\,.$$

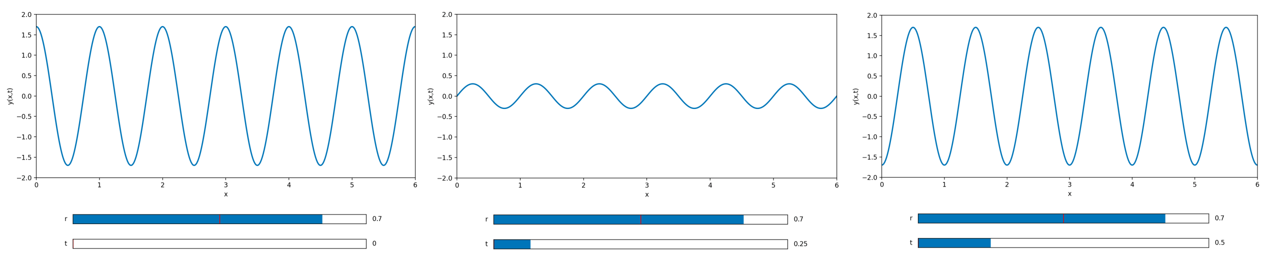
On en déduit l'expression du taux d'onde stationnaire

$$\boxed{\text{TOS} = \frac{1+|r|}{1-|r|}}\,.$$

Dans le cas $r = 0$, on a TOS = 1. Ce cas correspond à une onde progressive.
Dans les cas $r = \pm 1$n on a TOS $= \infty$. Ces cas correspondent à une onde stationnaire.
Dans les autres cas, on a $1 <$ TOS $< \infty$: l'onde n'est ni progressive, ni stationnaire.

Complément

Il n'est pas possible de reproduire l'animation sur ce document. Vous pouvez voir que l'onde est progressive pour $r = 0$, et stationnaire pour $r = \pm 1$. Pour $r = 1$ on a un ventre aux extrémités, tandis que pour $r = -1$ on a un nœud.
Dans un cas intermédiaire, vous pouvez voir que l'onde n'est ni stationnaire, ni progressive. Détaillons trois instants :



Pour $t_1 = 0$, l'amplitude est maximale.
Pour $t_2 = 0{,}25$ s, l'amplitude est minimale, et l'onde s'est propagée dans le sens des x croissants.
Pour $t_3 = 0{,}5$ s, l'amplitude est de nouveau maximale (et l'onde a constitué à se propager).
Avec les valeurs numériques arbitraires choisies (par réalistes, mais permettant un graphe lisible), on a $\lambda = 1$ m, $c = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et la période $T = 1$ s. L'amplitude étant maximum en $t = 0$, on voit qu'elle est minimum en $t = T/4$ (l'onde s'est propagée de $\lambda/4$, et qu'elle est de nouveau maximum en $t = T/2$ (l'onde s'est alors propagée de $\lambda/2$.