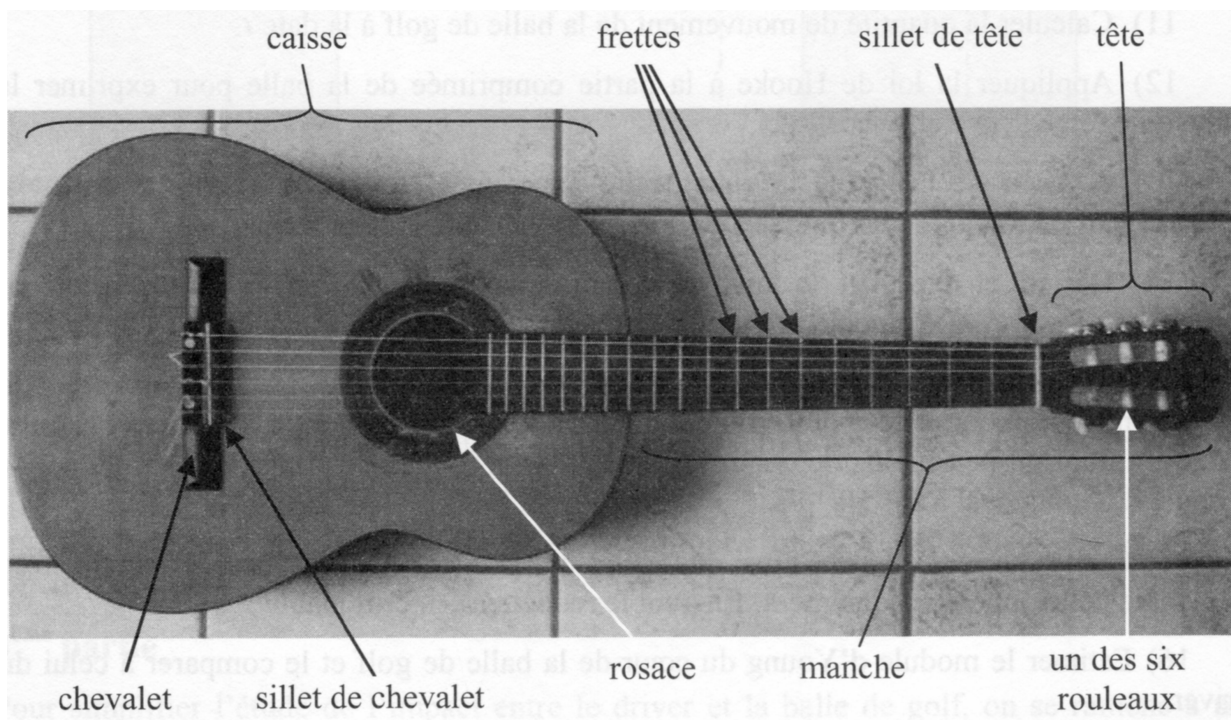


Instruments à corde

Document 1 : principales caractéristiques d'une guitare classique

La guitare est un instrument de musique de la famille des instruments à cordes pincées. Les cordes sont disposées parallèlement à la table d'harmonique (qui est la plaque avant de la caisse entièrement en bois) et au manche. Ce dernier est coupé en frettes, sur lesquelles le joueur appuie les cordes avec les doigts d'une main pour produire des notes différentes. L'autre main pince les cordes, soit avec les ongles ou le bout des doigts, soit avec un plectre (encore appelé médiator). Une guitare classique possède généralement six cordes de différents diamètres. À l'origine, les cordes étaient fabriquées à partir de boyaux de moutons mais de nos jours, elles sont en nylon, matériau qui offre une tension bien moindre par rapport aux cordes d'acier, ce qui autorise des manches entièrement faits en bois (érable, cèdre, acajou...) Les trois cordes inférieures (dites « cordes basses ») sont cependant entourées d'un fil métallique, généralement d'argent ou de nickel, afin de les alourdir de manière à produire des notes plus graves. La tension de chaque corde peut être modifiée à l'aide d'un système de vis sans fin actionné par une clef, qui entraîne un petit rouleau sur lequel s'enroule la corde.



Sauf exception, les cordes d'une guitare sont réglées selon l'accordage standard suivant, les notes étant indiquées avec l'écriture latine (*do, ré, mi, fa, sol, la, si*) et également avec la notation grégorienne (respectivement C, D, E, F, G, A, B) :

mi_1 (E2) 82,4 Hz	la_1 (A2) 110,0 Hz	$ré_2$ (D3) 146,8 Hz
sol_2 (G3) 196,0 Hz	si_2 (B3) 246,9 Hz	mi_3 (E4) 329,6 Hz

Certains guitaristes préfèrent des cordes plus dures ou plus tendres, ce qui donne lieu à plusieurs jeux de cordes différents pour un même accordage final. Ces jeux sont identifiés par le « tirant » donné par le diamètre de la corde. Le tirant, exprimé en 1/1000e de pouce, correspond à environ 40 fois le diamètre en millimètres.

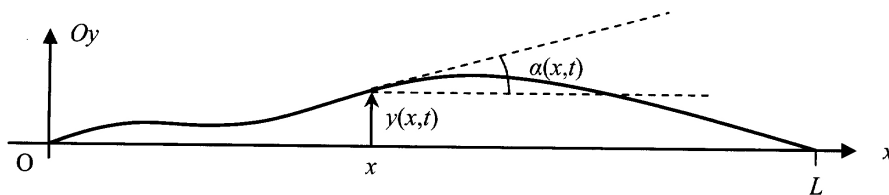
Document 2 : le nylon

Le nylon est une matière plastique de type polyamide, utilisée dans de nombreux domaines industriels. Son faible pouvoir absorbant fait du nylon un matériau de choix dans l'industrie textile. Par ailleurs, sa grande résistance est mise à profit pour la réalisation de pièces mécaniques, notamment dans l'industrie automobile. Les principales caractéristiques physiques du nylon sont les suivantes :

- masse volumique : $1240 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- module d'Young : de l'ordre de 3 GPa ;
- limite d'élasticité : environ 70 MPa (force par unité de section au-delà de laquelle le matériau se déforme de manière irréversible) ;
- coefficient de dilatation linéique : $1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ (correspondant à l'allongement relatif d'un fil de nylon par kelvin suite à une augmentation de température). À titre de comparaison, le bois possède un coefficient de dilatation linéique entre $3 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ et $6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

On rappelle que le module d'Young E est défini par $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$.

On cherche dans un premier temps à modéliser la dynamique d'une corde de la guitare. Pour cela, on utilise un modèle simplifié où la corde, de masse linéique μ , est fixée d'une part au sillet du chevalet (en $x = 0$) et d'autre part au sillet de tête (en $x = L$), les deux sillons étant distants de $L = 65 \text{ cm}$. La corde, à ce stade considérée comme infiniment souple, est constamment tendue de part et d'autre par une tension notée T . La pesanteur étant négligée, la corde est confondue avec l'axe Ox à l'équilibre. Lors de son mouvement, un point de la corde d'abscisse x est repéré à la date t par son déplacement $y(x, t)$ que l'on suppose perpendiculaire à Ox ; la tension le long de la corde est donnée par $T(x, t)$. Par ailleurs, on note $\alpha(x, t)$ l'angle que fait à la date t la tangente à la corde au point d'abscisse x avec l'axe Ox . Cet angle est supposé petit, de telle sorte qu'il est légitime par la suite d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 par rapport à cet angle.



❑ 1 — Montrer que, dans le cadre des approximations effectuées, la tension est uniforme le long de la corde. On supposera de plus qu'elle ne dépend pas du temps et on notera T cette tension.

❑ 2 — Montrer que $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Donner l'expression de c en fonction de T et μ . Que représente la grandeur c ?

Comment s'appelle cette équation ?

❑ 3 — Calculer c pour :

- une corde de guitare, de masse linéique $\mu = 3 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ et de tension $T_0 = 103 \text{ N}$;
- une corde de piano, de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, de tension $T_0 = 850 \text{ N}$, de diamètre $\phi = 1,2 \text{ mm}$.

Comparer les valeurs obtenues.

On cherche à déterminer les modes propres de la corde.

❑ 4 — Qu'appelle-t-on une onde progressive ?

Qu'appelle-t-on une onde stationnaire ?

❑ 5 — Faut-il choisir comme solution individuelle de l'équation (1) une onde de type progressive ou de type stationnaire ? Justifier.

❑ 6 — On considère une solution de la forme

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Comment s'appelle une telle onde ?

Montrer que l'équation (1) impose une relation entre k et ω que l'on explicitera.

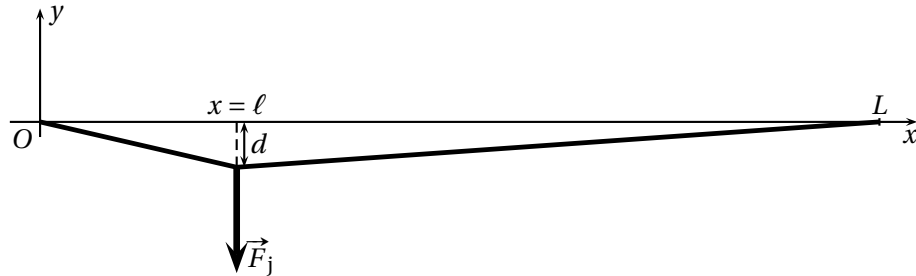
□ 7 — Montrer que les conditions aux limites entraînent une quantification k_n ; en déduire que la fréquence ne peut prendre que des valeurs discrètes

$$f_n = n f_1$$

où l'on exprimera f_1 en fonction des données.

□ 8 — À partir de l'analyse des documents, expliquer de manière très concrète dans quelle(s) circonstance(s) la dépendance de f_1 par rapport à T , μ puis L apparaît dans l'utilisation d'une guitare.

En pratique, les cordes de la guitare sont pincées par l'un des doigts du joueur à proximité de la rosace, à une distance ℓ du sillet du chevalet, comme l'illustre la figure suivante. Le joueur doit alors exercer une force d'intensité F_j pour déplacer la corde d'une distance $d \ll \ell$.



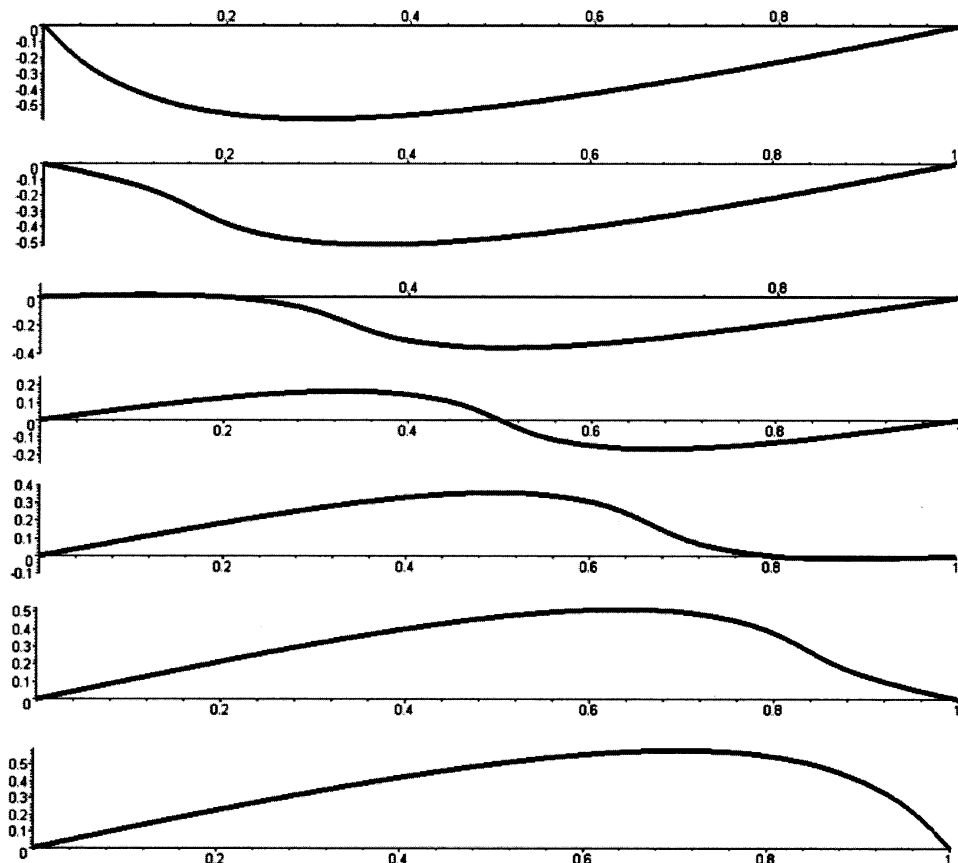
□ 9 — Exprimer la force F_j que doit exercer le joueur en fonction de T , L , ℓ et d (on suppose la tension T inchangée).

□ 10 — Compte tenu des questions précédentes et à l'aide des documents fournis, calculer la force, en newton, qu'un joueur de guitare classique doit exercer s'il désire déplacer de 12 mm la corde de mi aigu ayant un tirant égal à 30 en la pinçant au niveau du centre de la rosace.

□ 11 — L'hypothèse d'une tension T inchangée est-elle valable ? On justifiera de manière quantitative.

□ 12 — Y a-t-il un risque qu'une corde de guitare se déforme de manière irréversible ?

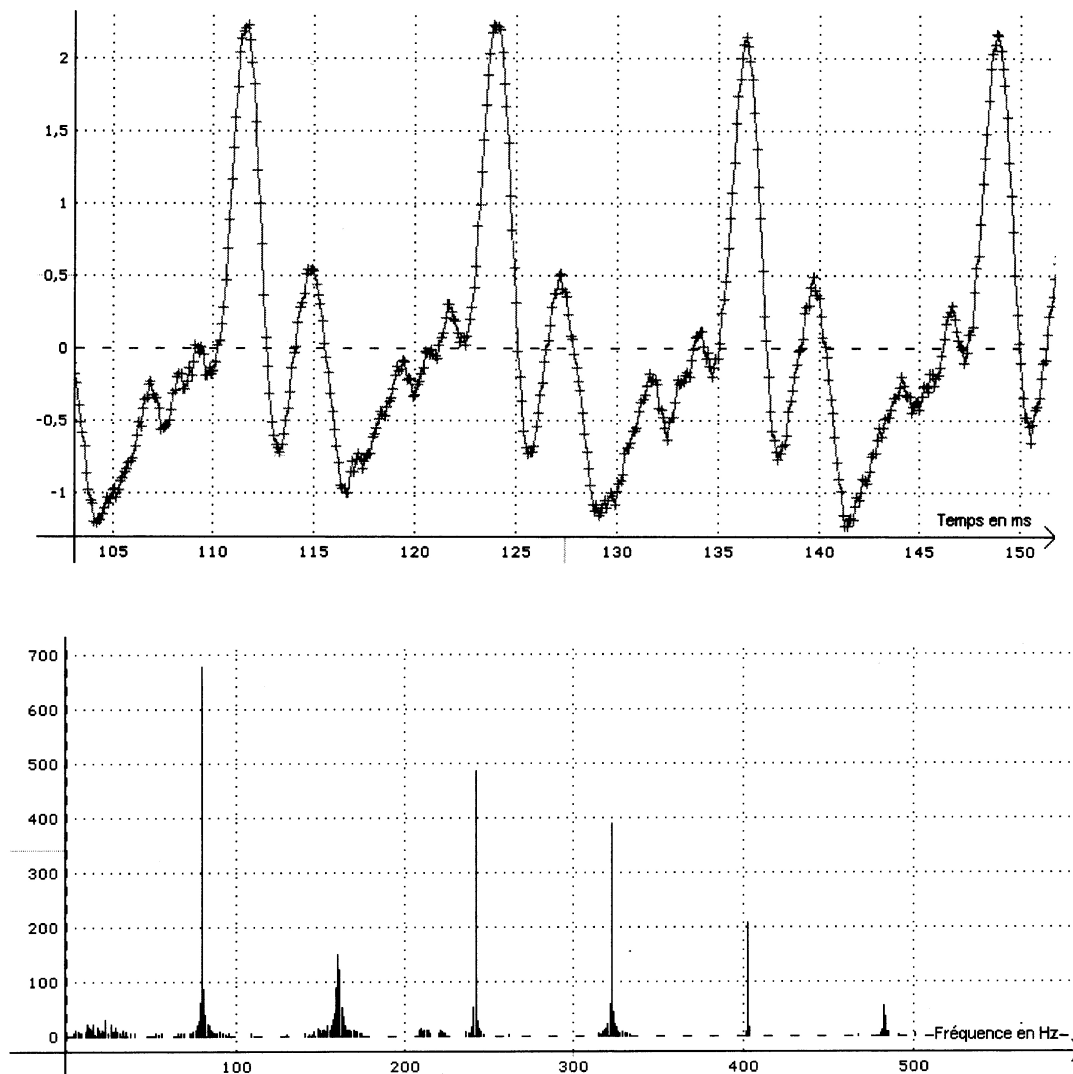
Le joueur lâche la corde sans vitesse initiale dans les conditions de la question précédente. La raideur de la corde entraîne que la forme de celle-ci s'arrondit après quelques oscillations. Les figures suivantes sont une simulation numérique de la forme de la corde à différents instants répartis de manière régulière sur une demi-période d'oscillation. L'abscisse est la grandeur dimensionnée x/L et l'ordonnée est exprimée en cm.



□ 13 — En s'appuyant sur les figures, dire en quoi le mouvement de la corde a des similitudes avec une onde progressive d'une part et une onde stationnaire d'autre part.

□ 14 — À partir de l'analyse des figures, tracer l'allure du graphe de la force transversale F_y que la corde exerce sur le chevalet en fonction du temps.

La force F_y met en vibration la table d'harmonie qui va alors générer dans l'air une onde sonore. C'est cette chaîne mécanique est qui à l'origine du son produit par la guitare. Les figures suivantes représentent la tension (en V) en fonction du temps enregistrée par un microphone situé à proximité de la guitare à laquelle on a joué la note mi_1 , ainsi que le spectre du signal (échelle arbitraire en ordonnée).



□ 15 — L'étude de ces courbes permet-elle de savoir si la guitare est accordée pour cette corde? On prendra comme critère que la note jouée doit être séparée de moins d'un trentième de ton (de la gamme tempérée), c'est-à-dire que l'écart relatif des fréquences doit être inférieur à 4×10^{-3} .

□ 16 — Peut-on faire un lien entre ces courbes et la courbe F_y en fonction du temps? Indiquer les facteurs supplémentaires qu'il faudrait prendre en compte.

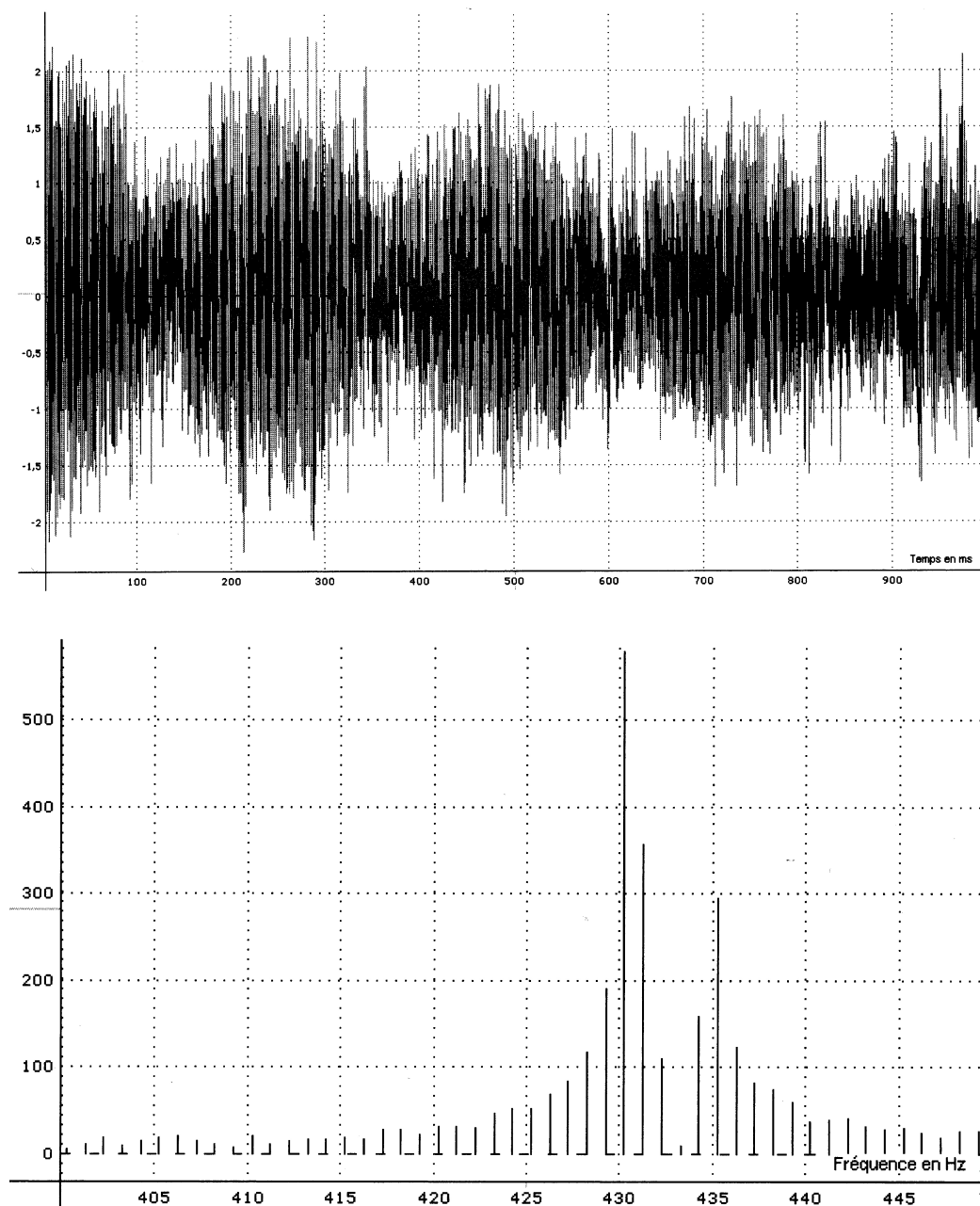
En appuyant la corde mi_1 sur la cinquième frette et en la pinçant, on constate que la corde la_1 se met à vibrer « toute seule » (on dit qu'elle vibre par sympathie).

□ 17 — Expliquer et justifier ce phénomène à l'aide d'une application numérique.

On propose d'illustrer un moyen commode pour accorder les cordes entre elles en prenant l'exemple de l'accordage de la corde $ré_2$ à partir de la corde la_1 . Le procédé est le suivant : on pose un doigt sur la corde la_1 juste au dessus de la cinquième frette (mais sans appuyer trop fort pour ne pas que le corde touche la frette) et l'on pince la corde. Juste après, on pose un doigt sur la corde $ré_2$ juste au dessus de la septième frette et l'on pince la corde. Ensuite on règle la tension de la corde $ré_2$ de manière à ce que les deux cordes produisent la même note.

□ 18 — Justifier de manière quantitative la pertinence de cette méthode d'accordage.

Les figures suivantes représentent la tension délivrée par un microphone (en V) en fonction du temps, ainsi que le spectre du signal lors d'un essai d'accordage des cordes la_1 et $ré_2$ par la méthode décrite précédemment.



□ 19 — Relier de manière quantitative les deux graphes (évolution temporelle du signal et spectre du signal). Quel nom donne-t-on à ce phénomène? Que perçoit l'oreille dans ce cas de figure? Comment doit-on alors procéder pour accorder les notes entre elles?

Lors d'une chaude journée d'été, un guitariste s'entraîne dans une pièce à 28 °C en vue de donner un concert dans une salle climatisée à 20 °C. Le changement d'environnement désaccorde l'instrument et oblige le musicien à raccorder sa guitare juste avant de jouer après un « temps d'adaptation » dans la salle de concert.

□ 20 — Le désaccordage de la guitare est-il dû à la contraction thermique des cordes? Répondre de manière quantitative. Proposer d'autres causes du désaccordage.