

DS n° 5 — Sujet « facile »

Solution

Partie I : Mégagaf (CCINP PSI 2024)

2 — Vitesse d'expulsion nécessaire à l'équilibre

1. Le système {candidat + flyboard + eau contenue} est un **système ouvert** : on ne peut donc pas lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

2. En régime stationnaire les grandeurs v_e , v_s , S_e et S_s sont **indépendantes du temps**.

3. **Instant t** : Σ comprend Σ^* et l'eau qui va entrer entre t et $t + dt$.

Instant $t + dt$: Σ comprend Σ^* et l'eau qui sort entre t et $t + dt$.

4. Le débit volumique est défini de façon générale par

$$D_v = \iint_S v \, dS.$$

L'eau étant incompressible, le débit volumique est conservé entre la section d'entrée et les sections de sortie.

À l'entrée on a

$$D_v = S_e v_e.$$

À la sortie, on a

$$D_v = 2S_s v_s.$$

5. Notons \vec{p}^* la quantité de mouvement du système ouvert Σ^* , indépendante du temps pour l'écoulement stationnaire considéré.

À l'instant t , la quantité de mouvement de Σ est

$$\vec{p}(t) = \vec{p}^* + \delta m v_e.$$

La masse rentrant pendant dt étant

$$\delta m = \mu D_v dt,$$

on a

$$\vec{p}(t) = \vec{p}^* + \mu D_v v_e \vec{e}_z.$$

En régime stationnaire, la masse sortant pendant dt est aussi δm . On a donc

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}^* + \delta m \vec{v}_s,$$

soit

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}^* - \mu D_v v_s \vec{e}_z.$$

On forme

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -\mu D_v (v_s + v_e) \vec{e}_z.$$

Les forces extérieures sont :

- le poids $-M_{\text{eau}} g \vec{e}_z$;
- la force \vec{F}_{paroi} exercée par les paroi sur l'eau ;
- la résultante \vec{F}_p des forces de pression sur les surfaces d'entrée et de sortie.

La pression valant P_0 dans les jets libres de sortie, on a

$$\vec{F}_p = (P_e S_e + P_0 2S_s) \vec{e}_z.$$

Le bilan que quantité de mouvement s'écrit alors

$$-\mu D_v (v_s + v_e) \vec{e}_z = -M_{\text{eau}} g \vec{e}_z + \vec{F}_{\text{paroi}} + P_e S_e + 2P_0 S_s \vec{e}_z$$

D'après le principe des actions réciproques, la force exercée par l'eau sur les parois est $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{paroi}}$, d'où

$$F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}} g + \mu D_v (v_s + v_e),$$

soit d'après la question Q4 :

$$F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}} g + \mu D_v \left(\frac{D_v}{2S_s} + \frac{D_v}{S_e} \right).$$

On a donc

$$F = P_e S_e + 2P_0 S_s - M_{\text{eau}} g + \mu D_v^2 \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2S_s} + \frac{1}{S_e}.$$

6. L'écoulement est parfait, stationnaire et incompressible. On peut appliquer le théorème de Bernoulli entre un point à l'entrée du système et un point à la sortie, le long d'une ligne de courant :

$$P_e + \mu g z_e + \frac{\mu v_e^2}{2} = P_0 + \mu g z_s + \frac{\mu v_s^2}{2}$$

avec $z_s - z_e = H$, soit

$$P_e = P_0 + \mu g H + \frac{\mu D_v^2}{2} \left(\frac{1}{4S_s^2} - \frac{1}{S_e^2} \right).$$

7.

$$F = P_0 (2S_s + S_e) - M_{\text{eau}} g + \mu g H S_e + \mu D_v^2 \alpha + \frac{\mu S_e}{2} \left(\frac{D_v^2}{4S_s^2} - \frac{D_v^2}{S_e^2} \right)$$

soit

$$F = P_0 (2S_s + S_e) - M_{\text{eau}} g + \mu g H S_e + \mu D_v^2 \beta$$

avec

$$\beta = \alpha + \frac{S_e}{8S_s^2} - \frac{1}{2S_e} = \frac{1}{2S_s} + \frac{1}{S_e} + \frac{S_e}{8S_s^2} - \frac{1}{2S_e}$$

soit

$$\beta = \frac{S_e}{8S_s^2} + \frac{1}{2S_e} + \frac{1}{2S_s}$$

8. En ne prenant en compte que la masse d'eau contenue dans le tube d'alimentation, on a

$$M_{\text{eau}} = \mu S_e H.$$

On en déduit l'expression simplifiée

$$F = P_0(2S_s + S_e) + \mu D_v^2 \beta.$$

9. Le système {candidat + flyboard à vide} est soumis à

- son poids $M\vec{g}$;
- la force \vec{F} exercée par le jet ;
- la force \vec{F}_{atm} de pression atmosphérique s'exerçant sur la surface extérieure Σ_{ext} en contact avec l'atmosphère (qui n'inclut pas les sections S_e et $2S_s$).

Considérons la surface fermée $\Sigma_{\text{ext}} \cup S_e \cup 2S_s$; la résultante des forces de pression P_0 uniforme est nulle, soit

$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{atm}} + P_0(S_e + 2S_s)\vec{e}_z.$$

Le système {candidat + flyboard à vide} est à l'équilibre si

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{atm}}$$

soit

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{F} - P_0(S_e + 2S_s)\vec{e}_z.$$

On en déduit en projetant selon \vec{e}_z

$$0 = -Mg + P_0(2S_s + S_e) + \mu D_v^2 \beta - P_0(S_e + 2S_s) \\ = -Mg + \mu D_v^2 \beta.$$

Le débit volumique correspondant est donc

$$D_{v,\text{eq}} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu\beta}}.$$

► L'expression de β obtenue à la question 7 peut s'écrire

$$\beta = \frac{S_e^2 + 4S_s^2 + 4S_e S_s}{8S_s^2 S_e} = \frac{(S_e + 2S_s)^2}{8S_s^2 S_e}.$$

On a donc bien $\beta > 0$ (il figure dans une racine carrée dans le résultat établi ici).

10. On a d'une part

$$D_v = v_e S_e$$

d'où

$$v_e = \frac{6 \times 10^{-2}}{80 \times 10^{-4}} = \frac{60}{8}$$

soit

$$v_e = 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

D'autre part

$$D_v = 2v_s S_s$$

d'où

$$v_s = \frac{6 \times 10^{-2}}{2 \times 25 \times 10^{-4}} = \frac{60}{5}$$

soit

$$v_s = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 — Puissance de la pompe

1 Non prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

11. Si on ne prend pas en compte la perte de charge dans le tuyau, on peut utiliser le résultat de la question 6, soit

$$\Delta P = \mu g H + \frac{\mu D_v^2}{2} \left(\frac{1}{4S_s^2} - \frac{1}{S_e^2} \right) \\ = 10^3 \times 10 \times 5 \\ + \frac{10^3 \times (6 \times 10^{-2})^2}{2} \left(\frac{1}{4 \times (25 \times 10^{-4})^2} - \frac{1}{(80 \times 10^{-4})^2} \right) \\ \approx 5 \times 10^4 + 2(4 \times 10^4 - 2 \times 10^4) = 9 \times 10^4 \text{ Pa} = 0,9 \text{ bar}.$$

On a donc

$$\Delta P = 0,9 \text{ bar}.$$

2 Prise en compte des pertes de charge dans le tuyau d'alimentation

12. D'après la relation de Bernoulli, l'analyse dimensionnelle donne

$$[\Delta P_c] = [\mu v^2] = [\mu v_e^a] \left[\frac{\ell \varepsilon^b}{d^2} \right]$$

On a donc en identifiant

$$a = 2 \quad \text{et} \quad b = 1.$$

13. La puissance des forces de pression est donnée par

$$P_{\text{pression}} = (P_e + \Delta P_c - P_0) D_v.$$

On a donc

$$P_{\text{pompe}} = (P_e + \Delta P_c - P_0) D_v.$$

1. Pour un écoulement stationnaire unidimensionnel d'un système à une entrée et une sortie, le premier principe s'écrit

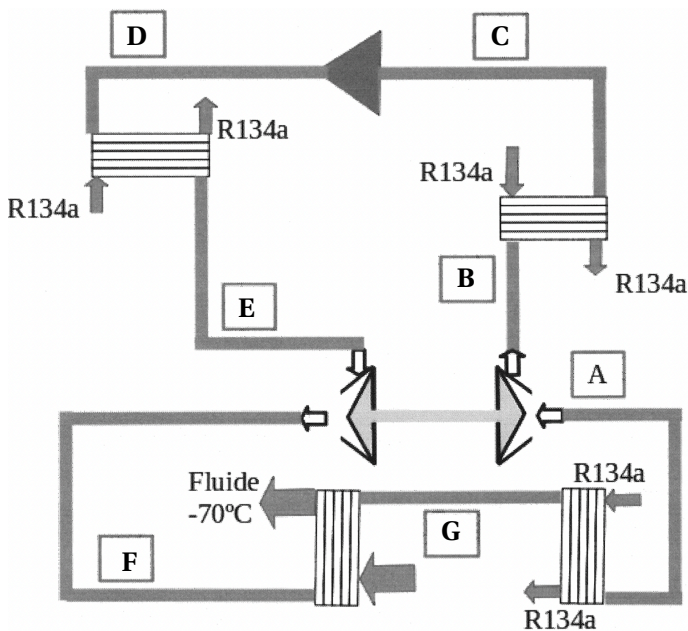
$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_u + q,$$

où $\Delta h = h_s - h_e$ est la différence entre l'enthalpie massique du fluide à la sortie et à l'entrée, Δe_c la différence entre l'énergie cinétique massique à la sortie et à l'entrée, $\Delta e_p = e_{p,s} - e_{p,e}$ la différence entre l'énergie potentielle massique à la sortie et à l'entrée, w_u le travail massique autre que des forces de pression et q le transfert thermique massique reçu par le fluide.

Dans ce problème, on néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle, d'où la forme simplifiée

$$\Delta h = w_u + q.$$

2. Schéma complété :



3. On reporte les points du cycle sur le diagramme de l'air.

On place le point E sur l'isotherme -10°C , sur l'isobare 10 bar.

L'évolution $E \rightarrow F$ étant isentropique, on interpole une isentropique à partir du point E jusqu'à l'isobare 1,0 bar, ce qui nous mène au point F.

On lit $h_E = 490 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $h_F = 360 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Le travail massique reçu lors de la détente est donné par

$$w_{u,E \rightarrow F} = h_F - h_E, \text{ soit } w_{u,E \rightarrow F} = -130 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

La transmission de la puissance étant supposée intégrale entre la turbine et le compresseur, le travail massique reçu par l'air lors de la compression $A \rightarrow B$ est

$$w_{u,A \rightarrow B} = -w_{u,E \rightarrow F}, \text{ soit } w_{u,A \rightarrow B} = 130 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

1. Convertir T_F en kelvin au numérateur.

4. On place le point A sur l'isobare 1,0 bar et l'isotherme -20°C . On lit $h_A = 480 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

L'évolution $A \rightarrow B$ est une isentropique. On a déterminé à la question précédente

$$w_{u,A \rightarrow B} = h_B - h_A = 130 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

On a donc $h_B = 610 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, ce qui permet de placer le point B sur l'isentropique qui part du point A. On lit alors $P_B = 4,5 \text{ bar}$ et $T_B = 105^\circ\text{C}$.

L'évolution $B \rightarrow C$ est une isobare 4,5 bar à amenant sur l'isotherme -10°C , ce qui permet de positionner le point C. On lit $h_C = 490 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

L'évolution $C \rightarrow D$ est une isentropique qui mène à 10 bar, ce qui permet de positionner le point D. On lit $T_D = 60^\circ\text{C}$ et $h_D = 560 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Les points E et F ont été déterminés précédemment. On lit $T_F = -140^\circ\text{C}$.

Le point G est sur l'isobare 1,0 bar, et sur l'isotherme -75°C . On lit $h_G = 430 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

| États | Pression | Température | $h \text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$ |
|-------|----------|----------------------|---------------------------------------|
| A | 1,0 bar | -20°C | 480 |
| B | 4,5 bar | 105°C | 610 |
| C | 4,5 bar | -10°C | 490 |
| D | 10 bar | 60°C | 560 |
| E | 10 bar | -10°C | 490 |
| F | 1,0 bar | -140°C | 360 |
| G | 1,0 bar | -75°C | 430 |

5. Le transfert thermique reçu par l'air en contact avec le fluide à maintenir à -70°C est donné par

$$q_{F \rightarrow G} = h_G - h_F,$$

soit $q_{F \rightarrow G} = 70 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

6. Notons T_F et T_C les températures des sources froide et chaude.

Le premier principe s'écrit

$$W + Q_C + Q_F = 0.$$

Le second principe s'écrit sous la forme de l'égalité de Clausius

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0.$$

L'efficacité est donnée par

$$e_C = \frac{\text{utile}}{\text{coûteux}} = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_F}{-Q_F - Q_C} = \frac{1}{-1 - \frac{Q_C}{Q_F}} = \frac{1}{-1 + \frac{T_C}{T_F}},$$

soit

$$e_C = \frac{T_F}{T_C - T_F}.$$

On calcule $e_C = 4,5$.

7. L'énergie dépensée est le travail $w_{u,C \rightarrow D} = h_D - h_C$.

L'énergie utile est $q_{F \rightarrow G} = h_G - h_F$.

L'efficacité du cycle est donc

$$e = \frac{h_G - h_F}{h_D - h_C}.$$

On calcule $e = \frac{430 - 360}{560 - 490}$, soit $e = 1,0$.

L'efficacité est sensiblement plus faible que pour le cycle de Carnot :

- l'échangeur $G \rightarrow A$ n'est pas comptabilisé comme un échange « utile » ;
- les transferts thermiques ne sont pas monothermes réversibles.

8. Il faut **refroidir le fluide frigorigène R134a** par un dispositif approprié dans l'installation : c'est une dépense supplémentaire.

9. Le transfert thermique massique reçu par l'air dans les trois échangeurs est donné par

$$q_{\text{air}} = (h_A - h_G) + (h_C - h_B) + (h_E - h_D).$$

Le fluide R134a reçoit le transfert thermique massique

$q_{\text{R134a}} = -q_{\text{air}}$, soit

$$q_{\text{R134a}} = (h_G - h_A) + (h_B - h_C) + (h_D - h_E)$$

soit $q_{\text{R134a}} = 140 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

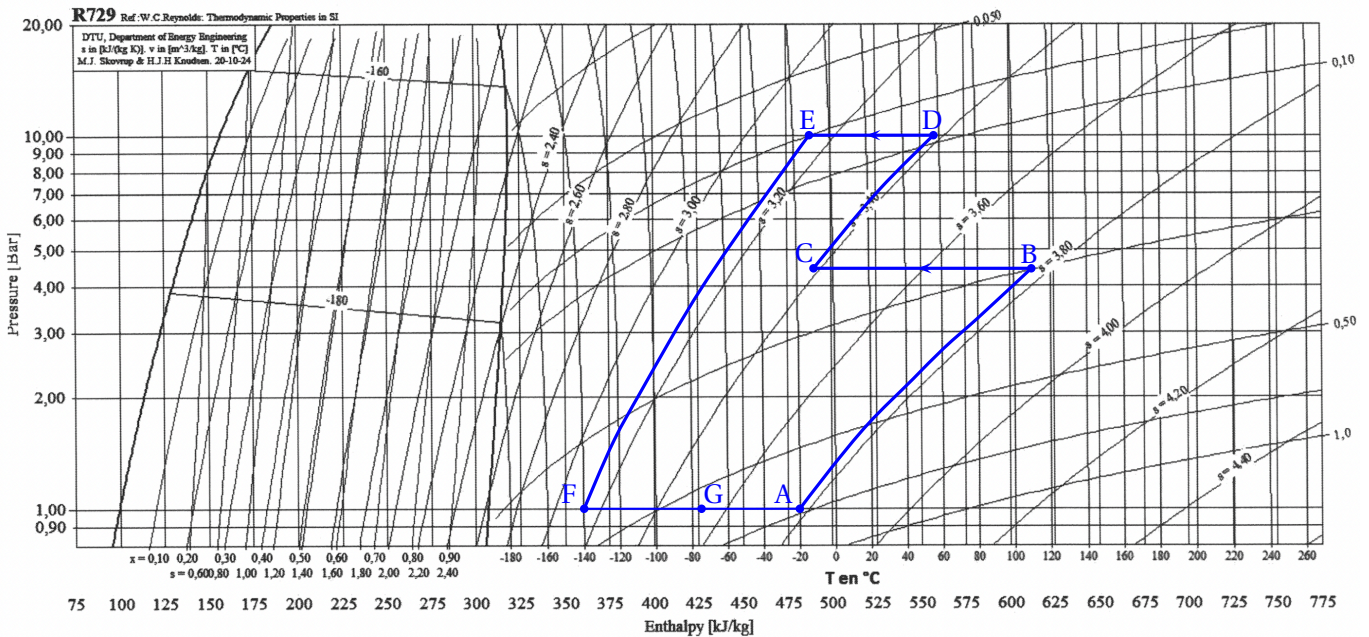
10. L'énergie massique nécessaire au refroidissement du fluide R134 est donnée par

$$w_{\text{refroid}} = \frac{q_{\text{R134a}}}{2}.$$

L'efficacité du système vaut donc

$$e = \frac{h_G - h_F}{h_D - h_C + 2q_{\text{R134a}}}.$$

On calcule $e = \frac{430 - 360}{560 - 490 + 0,5 \times 140}$ soit $e = 0,50$.



1 — Vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

1 Mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

1. L'expression « corde sans raideur » signifie que l'action d'une partie de la corde sur une autre en un point se réduit à la force de tension, tangente à la corde.

L'hypothèse des « petits mouvements » signifie que la corde est peu inclinée par rapport à sa position d'équilibre : l'angle que fait la tangente à la corde en tout point par rapport à l'axe de la corde au repos est un infiniment petit du premier ordre.

2. On considère l'élément de corde situé entre x et $x + dx$.

Dans le cadre de petits mouvements, sa longueur est $d\ell \approx dx$, donc sa masse est

$$dm = \mu dx,$$

et son accélération

$$\vec{a} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y.$$

Le principe fondamentale de la dynamique s'écrit

$$dm \vec{a} = \vec{T}_d + \vec{T}_g.$$

Projetons cette relation selon \vec{e}_y :

$$\mu dx \frac{\partial v_y}{\partial t} = T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx$$

d'où

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}. \quad (1)$$

Projetons le PFD selon \vec{e}_x :

$$0 = T(x + dx) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x) \cos \alpha(x, t).$$

Comme $\alpha \ll 1$, on a $\cos \alpha \approx 1$ et

$$0 = T(x + dx) - T(x) = \frac{dT}{dx} dx.$$

La tension de la corde est donc uniforme : $T(x) = T_0$ en tout point de la corde.

On peut alors écrire la composante transversale de la tension de la corde en x :

$$T_y(x, t) = T_0 \sin \alpha(x, t) \approx T_0 \alpha(x, t).$$

La tangente à la corde a pour pente

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan \alpha(x, t) \approx \alpha(x, t).$$

On a donc

$$T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}.$$

On peut alors écrire en utilisant le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

soit

$$\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad (2)$$

3. L'équation (1) s'écrit

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}.$$

On a établi

$$T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}.$$

On a donc

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On retrouve l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

Cette équation régit les ondes sonores dans un fluide dans l'approximation acoustique, et les ondes de tension et de courant dans un câble coaxial sans perte.

4. On traduit la force de tension comme l'équivalent du poids d'une masse $m = 85$ kg, soit $T_0 = mg$.

On en déduit

$$T_0 = 850 \text{ N}.$$

Une longueur ℓ de corde de diamètre d et de masse volumique ρ a une masse

$$m = \rho \ell \frac{\pi d^2}{4} = \mu \ell$$

d'où la masse linéique

$$\mu = \rho \pi \frac{d^2}{4}.$$

La célérité des ondes transversales sur la corde vaut alors

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{4T_0}{\pi \rho d^2}}.$$

On calcule $c = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 Modes propres d'une corde de piano sans raideur. Position du marteau sur la corde

5. Une **onde stationnaire** est une onde de la forme

$$y(x, t) = F(x)G(t).$$

L'équation de d'Alembert donne alors

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t).$$

Séparons les variables :

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = A$$

où A est une constante car le premier terme ne dépend pas de t tandis que le second ne dépend pas de x .

On a donc d'une part

$$G''(t) = AG(t).$$

On aura une solution qui ne diverge pas si $C < 0$; notons alors $A = -\omega^2$. On a donc

$$G''(t) + \omega^2 G(t) = 0$$

d'où

$$G(t) = G_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

On a alors

$$F''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} F(x) = 0.$$

La solution est de la forme

$$F(x) = F_0 \cos(kx + \psi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

En posant $y_0 = F_0 G_0$, on a donc

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

6. Les **modes propres** sont les ondes stationnaires compatibles décrivant le régime libre compatibles avec les conditions aux limites. Ce sont des ondes harmoniques, les fréquences correspondantes étant appelées **fréquences propres**.

On impose d'une part $y(0, t) = 0, \forall t$, soit

$$y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos \psi = 0; \forall t.$$

On doit donc avoir $\cos \psi = 0$. En choisissant $\psi = -\pi/2$, on a alors

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx - \pi/2) \\ &= y_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx). \end{aligned}$$

On impose d'autre part $y(L, t) = 0, \forall t$, soit

$$y_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL) = 0; \forall t.$$

On doit donc avoir $\sin(kL) = 0$, d'où

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} k_n = \frac{c}{2\pi} n \frac{\pi}{L}$$

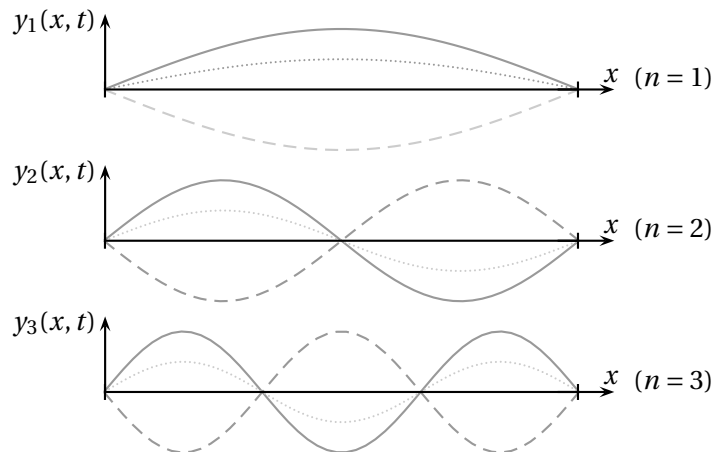
soit

$$f_n = n \frac{c}{2L}.$$

Le mode propre correspond s'écrit alors

$$y_n(x, t) = y_{0n} \cos\left(n \frac{c\pi}{2L} t + \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right).$$

Représentons les trois premiers modes propres :



7. La largeur a du marteau influe sur l'amplitude des harmoniques *via* le terme

$$\frac{\sin\left(n \frac{\pi a}{L}\right)}{n \frac{\pi a}{L}}$$

D'après la courbe $f(x)$ fournie, $f(x)$ prend des valeurs notables pour $x < \pi$. Le coefficient précédent est donc notable pour $n \frac{\pi a}{L} < \pi$ donc pour $n < n_{\max} = L/a$.

Un marteau large (a plus élevé) ne donnera des harmoniques notables que pour jusqu'à un rang n_x peu élevé : le son sera moins riche en harmoniques qu'avec un marteau étroit.

La fréquence correspondant à $n_{\max} = L/a$ est

$$f_{\max} = n_{\max} f_1 = \frac{L}{a} f_1 = \frac{0,65}{0,01} \times 262 = 17 \text{ kHz}.$$

L'atténuation des harmoniques dues à la largeur du marteau se fait sentir à partir de 17 kHz.

► Cette fréquence est proche de la limite des fréquences audibles; l'effet sera quasi imperceptible.

Ce choix de largeur de marteau est un compromis : il ne faut pas qu'il soit trop large pour ne pas appauvrir le spectre audible, mais diminuer la largeur du marteau diminue l'amplitude du son émis ($y(x, t)$ est proportionnelle à a_0 d'après l'expression donnée).

8. On supprime l'harmonique de rang n en prenant une position x_0 du marteau telle que

$$\sin\left(n\frac{\pi x_0}{L}\right) = 0$$

soit

$$n\frac{\pi x_0}{L} = p\pi$$

soit

$$x_0 = p\frac{L}{n} \quad \text{avec} \quad p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

Cela revient à attaquer la corde à une position x_0 correspondant à un nœud du mode que l'on veut éteindre : l'amplitude communiquée par la frappe du marteau est incompatible avec l'existence d'un nœud de vibration.

3 Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence f de son mode fondamental $n = 1$. Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du La_0 (fréquence fondamentale $f = 28$ Hz) au Do_8 (fréquence fondamentale $f = 4,2$ kHz).

9. Pour le mode fondamental, la longueur de la corde correspond à une demi longueur d'onde

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f}$$

d'où

$$f = \frac{c}{2L}.$$

On a donc

$$Lf = \frac{c}{2} = \text{cte}$$

pour les différentes cordes².

On a donc

$$28L_{\max} = 4,2 \times 10^3 L_{\min} = 262 \times 0,65$$

d'où

$$L_{\min} = 4,1 \text{ cm} \quad \text{et} \quad L_{\max} = 6,1 \text{ m}.$$

10. Avec l'expression de la célérité établie en 3, on a

$$f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

Enrouler un fil de cuivre autour d'une corde en acier permet de régler sa masse linéique. La longueur étant constante, on peut ainsi en modifiant μ faire varier la fréquence du fondamental, c'est-à-dire la hauteur de la note.

Jouer sur la tension T_0 de la corde n'est pas une bonne solution, car cela entraîne une mauvaise répartition des efforts sur le cadre du piano.

► Cela n'est pas précisé ici, mais prendre une corde pleine plus grosse nous fait sortir de l'hypothèse de la « corde sans raideur ». L'élongation vérifie alors une équation d'onde qui n'est pas l'équation de d'Alembert. On n'a alors plus $f_n = nf_1$ pour les modes propres et le son émis n'est plus harmonieux.

11. La masse linéique de la corde est

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \rho(\text{acier})\pi\frac{d^2}{4} + \rho(\text{Cu})\pi\frac{(d+2e)^2 - d^2}{4}.$$

On calcule $\mu = 8,92 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$. La longueur

$$L = \frac{c}{2f} = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

vaut alors $L = 1,74 \text{ m}$.

Partie IV : utilisation du chlorure d'ammonium (banque PT 2024)

1. Le précipité $\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{s})$ ne se forme pas si

$$[\text{Zn}^{2+}][\text{HO}^-]^2 < K_s.$$

En notant $c = [\text{Zn}^{2+}]$, il faut donc

$$[\text{HO}^-] < \sqrt{\frac{K_s}{c}}$$

soit

$$\text{pOH} > \frac{\text{p}K_s - \text{pc}}{2}$$

en notant $\text{pOH} = -\log[\text{HO}^-]$ et $\text{pc} = -\log c$.

2. En supposant que c ne dépend pas de la fréquence.

Le produit ionique de l'eau donne

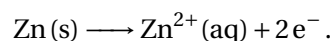
$$\text{pH} + \text{pOH} = \text{p}K_e = 14,$$

d'où

$$\text{pH} = 14 - \text{pOH} < 14 - \frac{\text{p}K_s - \text{pc}}{2}.$$

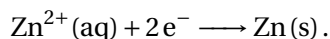
On calcule $\text{pH} < 6$.

2. Pour $i > 0$ on observe l'oxydation de l'électrode de zinc :

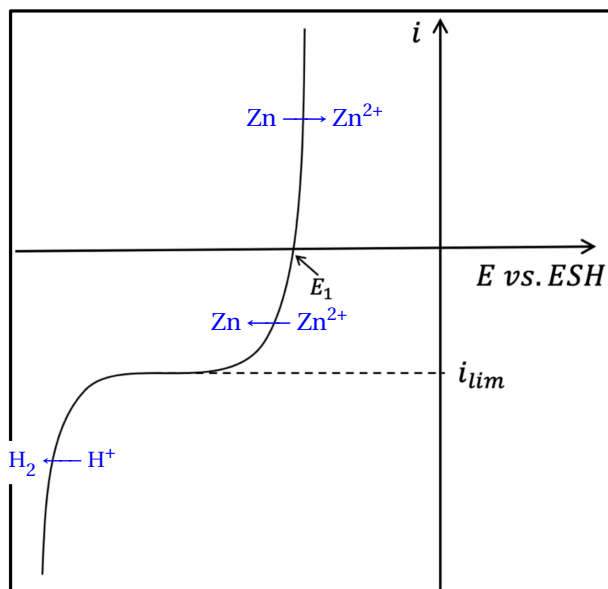
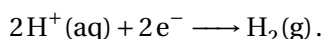


Pour $i < 0$ on observe d'abord la réduction des ions zinc

selon



Après le palier de diffusion relatif à cette réduction, on observe ensuite la réduction du solvant



► La réduction $\text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^{-} \longrightarrow \text{Zn}$ est observée sur toute la courbe $i < 0$.

3. Le potentiel E_1 à courant nul correspond au potentiel d'équilibre du couple Zn^{2+}/Zn donné par la loi de Nernst

$$E_1 = E^{\circ}(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) + \frac{0,06}{2} \log [\text{Zn}^{2+}]$$

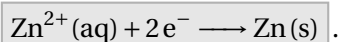
soit $E_1 = -0,79 \text{ V}$.

4. Le courant i_{lim} du palier de diffusion est proportionnel à :

- la concentration $[\text{Zn}^{2+}]$ du réactif;
- la surface S de l'électrode.

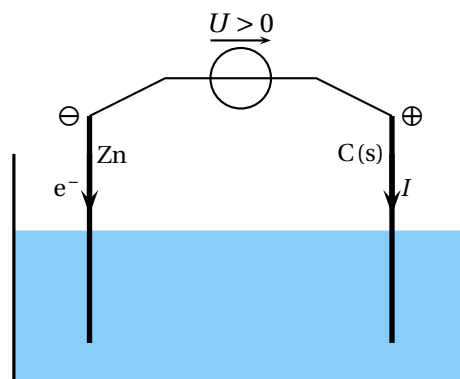
5. La courbe n'admet pas de palier de courant pour $i > 0$ car le réactif est le métal de l'électrode : il est déjà sur place, la vitesse de réaction n'est pas limitée par la vitesse d'arrivée du réactif à la surface de l'électrode.

6. Sur l'électrode de zinc, on souhaite déposer du zinc selon



Il s'agit d'une réduction ; cette électrode est donc un **ca-**
thode.

7. L'électrode de graphite $\text{C}(\text{s})$ est l'anode. La sens de parcours des électrons est déterminé par l'échange électronique établie à la question précédente sur la cathode de zinc.



8. Pendant Δt , la charge traversant l'électrolyseur est

$$Q = I\Delta t = N(\text{e}^{-})F$$

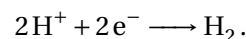
où $N(\text{e}^{-})$ est la quantité d'électrons échangés (en mole). D'après la stœchiométrie de $\text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^{-} \longrightarrow \text{Zn}$, la quantité de zinc formé est

$$n(\text{Zn}) = \frac{N(\text{e}^{-})}{2} = \frac{I\Delta t}{2F}.$$

La masse de zinc obtenue est donc $m_{\text{Zn}} = n(\text{Zn})M(\text{Zn})$, soit

$$m_{\text{Zn}} = \frac{M(\text{Zn})I\Delta t}{2F}.$$

9. Le rendement faradique est strictement inférieur à 1 car une partie des électrons échangés participe à la réduction du solvant selon



Cela signifie que l'intensité utilisée nous place sur la courbe de réduction du solvant (« mur du solvant »).

Dans ce cas, on a atteint le palier de diffusion relatif à la réaction souhaitée $\text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^{-} \longrightarrow \text{Zn}$ qui a alors lieu à sa vitesse maximale.

Augmenter la tension d'électrolyse ne fait alors qu'augmenter la vitesse de la réduction de H^{+} , c'est-à-dire la proportion d'électrons consommés par cette réduction « parasite » : le rendement faradique diminue donc.

10. Le chlorure d'ammonium est constitué des ions Cl^{-} et NH_4^{+} qui sont électro-inertes : ils ne perturbent donc pas les réactions d'électrolyse.

Ces ions permettent d'augmenter la conductivité de la solution, ce qui fait baisser la résistance de la solution. On diminue ainsi la chute de potentiel ohmique, et donc la tension nécessaire à l'électrolyse.