

DS n° 5 — Sujet « difficile »

Solution

Partie I : Aspects de la propulsion spatiale (d'après Mines PSI 2015)

1 — Aspect cinétique — Loi de vitesse

1. La quantité de mouvement de la fusée à l'instant t est

$$\vec{p}_f(t) = m(t)v(t)\hat{u}_z.$$

À l'instant $t + dt$, la masse de la fusée est

$$m(t + dt) = m(t) - D_m dt.$$

Sa quantité de mouvement vaut donc

$$\vec{p}_f(t + dt) = [m(t) - D_m dt] v(t + dt) \hat{u}_z.$$

Le gaz éjecté entre t et $t + dt$ a pour masse $dm_g = D_m dt$. D'après la loi de composition des vitesses, sa vitesse dans le référentiel terrestre en $t + dt$ est

$$\vec{v}_g(t + dt) = \vec{u} + \vec{v}(t + dt) = v(t + dt)\hat{u}_z - u\hat{u}_z.$$

On en déduit la quantité de mouvement

$$\vec{p}_g = [D_m v(t + dt) dt - D_m u dt] \hat{u}_z.$$

2. Considérons le système fermé {fusée + gaz}.

À l'instant t , sa quantité de mouvement est

$$\vec{P}(t) = \vec{p}_f(t) = m(t)v(t)\hat{u}_z.$$

À l'instant $t + dt$, sa quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} \vec{P}(t + dt) &= \vec{p}_f(t + dt) + \vec{p}_g \\ &= [m(t) - D_m dt] v(t + dt) \hat{u}_z \\ &\quad + [D_m v(t + dt) dt - D_m u dt] \hat{u}_z \\ &= m(t)v(t + dt)\hat{u}_z - D_m u dt \hat{u}_z. \end{aligned}$$

La dérivée

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t)}{dt}$$

est donc donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= m(t) \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt} \hat{u}_z - D_m u \hat{u}_z \\ &= \left(m(t) \frac{dv}{dt} - D_m u \right) \hat{u}_z. \end{aligned}$$

Le système fermé {fusée + gaz} de masse totale $m(t)$ est soumis à son seul poids; le principe fondamental de

la dynamique appliqué à ce système dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen s'écrit alors

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m(t)\vec{g} = -m(t)g\hat{u}_z,$$

soit en projection selon \hat{u}_z

$$m(t) \frac{dv}{dt} - D_m u = -m(t)g.$$

On obtient bien l'équation différentielle demandée

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg. \quad (1)$$

3. Formellement, l'équation (1) peut s'identifier au principe de la dynamique appliqué à un système de masse $m(t)$, les termes du membre de droite représentant les « forces ». Outre le poids, il apparaît donc une force ascendante, la force de poussée d'intensité

$$F = D_m u.$$

La fusée décolle si initialement, la force de poussée est supérieure à son poids, soit

$$D_m u > m_0 g.$$

4. Le poids ressenti par m à la surface de la Terre est mg . Avec un débit massique D_m , la durée I_s nécessaire à l'éjection de la masse m d'ergol est donnée par $m = D_m I_s$.

Écrivons que la poussée fournie est équivalente au poids de m à la surface de la Terre : $D_m u = mg$. On a alors $I_s = \frac{m}{D_m}$ soit

$$I_s = \frac{u}{g}.$$

5. La masse de la fusée à l'instant t étant

$$m(t) = m_0 - D_m t,$$

l'équation (1) s'écrit

$$(m_0 - D_m t) \frac{dv}{dt} = D_m u - (m_0 - D_m t)g,$$

soit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{D_m u}{m_0 - D_m t} - g.$$

La fusée partant du repos au sol ($v(0) = 0$), on a donc

$$\int_0^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{D_m u dt}{m_0 - D_m t} - \int_0^t g dt,$$

soit

$$v(t) = u \int_0^t \frac{D_m dt}{m_0 - D_m t} - gt.$$

En posant $y = m_0 - D_m t$, soit $dy = -D_m dt$, on peut écrire

$$\int_0^t \frac{D_m dt}{m_0 - D_m t} = - \int_{m_0}^{m_0 - D_m t} \frac{dy}{y} = - [\ln y]_{m_0}^{m_0 - D_m t} \\ = - \ln \left(\frac{m_0 - D_m t}{m_0} \right) = \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - D_m t} \right),$$

d'où comme $m(t) = m_0 - D_m t$:

$$v(t) = u \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right) - g t. \quad (2)$$

On peut trouver cette expression plus simplement sans expliciter la loi $m(t)$:

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg = - \frac{dm}{dt} u - mg$$

d'où

$$dv = -u \frac{dm}{m} - g dt$$

qui s'intègre en

$$v(t) - v_0 = -u \ln \frac{m}{m_0} - g t.$$

6. La relation (2) donne la variation de vitesse $v(t) - 0$ quand la masse varie de m_0 à $m(t)$. En considérant $g = 0$, la variation de vitesse quand la masse passe de m_i à m_f est donnée par

$$\Delta V = u \ln \frac{m_i}{m_f}. \quad (3)$$

7. Il suffit d'appliquer la relation de Tsiolkovski (3).

Fusée à deux étages.

Pour le premier étage, on considère les masses $m_i = 134$ tonnes et $m_f = 34,0$ tonnes, d'où un accroissement de vitesse $\Delta V_1 = 6,86 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour le deuxième étage, on considère les masses $m_i = 24,0$ tonnes et $m_f = 4,00$ tonnes, d'où un accroissement de vitesse $\Delta V_2 = 8,96 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'accroissement total de vitesse est

$$\Delta V = 15,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Fusée à un seul étage.

On a $m_i = 134$ tonnes et $m_f = 14,0$ tonnes, d'où l'accroissement de vitesse

$$\Delta V = 11,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Une structure à deux étages permet un plus grand accroissement de vitesse pour une même masse d'ergols.

8. La relation de Tsiolkovski s'écrit ici

$$\Delta V = u \ln \left(\frac{m_u + m_c}{m_u} \right),$$

d'où

$$m_c = m_u \left[e^{\frac{\Delta V}{u}} - 1 \right].$$

On calcule $m_{c1} = 945 \text{ kg}$ dans le cas de la propulsion chimique, et $m_{c2} = 156 \text{ kg}$ dans le cas de la propulsion ionique.

2 — Aspect énergétique — Rendement propulsif du moteur fusée

9. La masse dm de gaz, animée de la vitesse $(v - u)\hat{u}_z$ dans le référentiel d'étude, possède l'énergie cinétique $dE_c = \frac{1}{2} dm (v - u)^2$ soit

$$\delta E_c = \frac{1}{2} D_m (u - v)^2 dt.$$

La puissance cinétique contenue dans le jet est donnée par $P_{\text{jet}} = \frac{\delta E_c}{dt}$, soit

$$P_{\text{jet}} = \frac{1}{2} D_m (u - v)^2.$$

Le vaisseau se déplace à la vitesse v et est soumis la force de poussée $F = D_m u$; il reçoit donc de la part de la force de poussée la puissance $P_{\text{pous}} = Fv$ soit

$$P_{\text{pous}} = D_m u v.$$

10. La vaisseau gagne la puissance P_{pous} . La puissance totale dépensée est intégralement cédée au jet et au vaisseau sous forme d'énergie cinétique; une partie est contenue dans le jet (P_{jet}), l'autre cédée au vaisseau (P_{pous}). Le rendement propulsif est donc donné par

$$\eta = \frac{P_{\text{pous}}}{P_{\text{pous}} + P_{\text{jet}}} \\ = \frac{D_m u v}{\frac{1}{2} D_m (u - v)^2 + D_m u v} = \frac{uv}{uv + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} - uv}$$

soit

$$\eta = \frac{2uv}{u^2 + v^2}.$$

On peut écrire $\eta = \frac{2 \frac{v}{u}}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}$, soit

$$\eta(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{v}{u}.$$

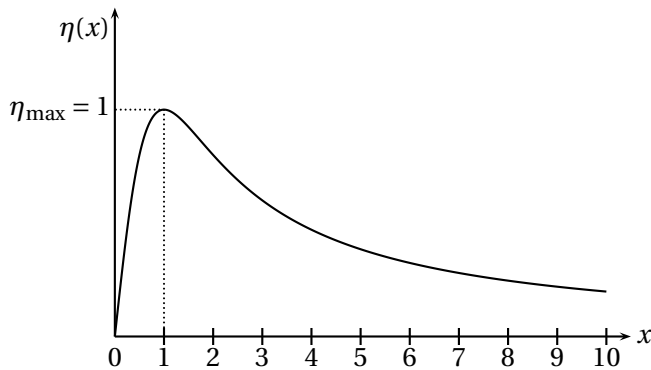
11. On calcule

$$\eta'(x) = \frac{2}{1 + x^2} + 2x \frac{(-2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 + x^2) - 4x^2}{(1 + x^2)^2} \\ = 2 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

On a donc $\eta'(x) = 0$ pour $x = 1$: le rendement propulsif est maximal pour $x = 1$, c'est-à-dire pour $u = v$. La vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée est alors égale à la vitesse de la fusée par rapport au sol; les gaz sont donc au repos par rapport au sol : seul la fusée possède une énergie cinétique, aucune énergie cinétique n'est cédée aux gaz.

Le rendement est nul dans deux cas :

- pour $x = 0$: on a alors $v = 0$; la fusée est au repos, toute l'énergie est communiquée aux gaz;
- pour $x \rightarrow \infty$: on a alors $u = 0$; la vitesse des gaz par rapport à la fusée est nulle... Il n'y a donc pas de gaz émis, et la force de poussée est nulle.



3 — Étude de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de la fusée

12. L'équation (1) devient

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u \quad \text{avec} \quad m(t) = m_0 - D_m t.$$

En intégrant comme à la question 5, on obtient

$$v(t) = u \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right).$$

13. La quantité de mouvement de la fusée est donnée par $p = m(t)v(t)$, soit

$$p = m u \ln \left(\frac{m_0}{m} \right).$$

Calculons

$$\frac{dp}{dm} = u \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) + m u \frac{m}{m_0} \left(-\frac{m_0}{m^2} \right)$$

soit

$$\frac{dp}{dm} = u \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) - u.$$

On a donc $\frac{dp}{dm} = 0$ pour $\ln \left(\frac{m_0}{m_p} \right) = 1$, soit pour

$$m_p = \frac{m_0}{e} \approx 0,37 m_0.$$

On a alors $p_{\max} = \frac{m_0 u}{e} \ln e$, soit

$$p_{\max} = \frac{m_0 u}{e}.$$

14. L'énergie cinétique de la fusée est $E_c = \frac{1}{2} m(t) v^2(t)$, soit

$$E_c = \frac{1}{2} m u^2 \left(\ln \left(\frac{m_0}{m} \right) \right)^2.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dm} &= \frac{u^2}{2} \left[\left(\ln \frac{m_0}{m} \right)^2 + 2m \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) \frac{m}{m_0} \left(-\frac{m_0}{m^2} \right) \right] \\ &= \frac{u^2}{2} \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) \left[\ln \left(\frac{m_0}{m} \right) - 2 \right]. \end{aligned}$$

On a donc $\frac{dE_c}{dm} = 0$ pour $\ln \left(\frac{m_0}{m_c} \right) = 2$, soit

$$m_c = \frac{m_0}{e^2} \approx 0,14 m_0.$$

On a alors

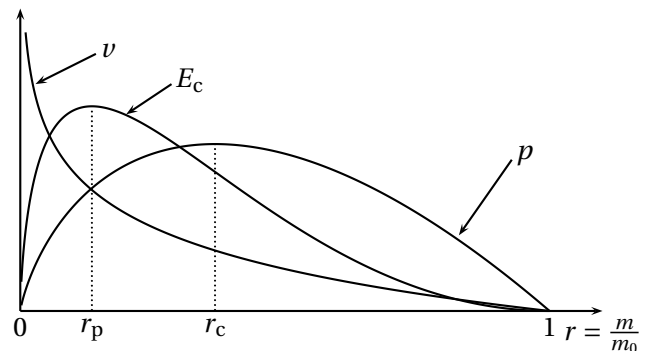
$$E_{c,\max} = \frac{1}{2} \frac{m_0 u^2}{e^2} (\ln e^2)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0 u^2}{e^2} (2)^2$$

soit

$$E_{c,\max} = \frac{2 m_0 u^2}{e^2}.$$

15. Traçons les évolutions de v , p et E_c . Attention au sens de lecture : la fusée est pleine pour $r = 1$, et elle a éjecté tous ses gaz pour $r = 0$.

Les unités sont arbitraires en ordonnées (les 3 grandeurs n'ont pas la même dimension).



16. La fusée atteint sa plus grande vitesse lorsque $r_f = \frac{m_f}{m_0} \rightarrow 0$. Cependant, sa quantité de mouvement est très petite car sa masse est très faible (elle tend vers zéro si on néglige la masse de la fusée à vide). La collision serait sans effet malgré sa grande vitesse (comme un insecte sur votre pare-brise!).

Il faut programmer la collision quand p est maximale, c'est-à-dire pour $r_p = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

17. Pour que la fusée fasse un maximum de dégâts lors de la collision, son énergie cinétique doit être maximale; il faut donc programmer la collision pour

$$r_c = \frac{1}{e^2} \approx 0,14.$$

1 — Préliminaire

1. Le système Σ^* constitué du fluide entre l'entrée E et la sortie S est un système ouvert.

On construit un système fermé Σ associé :

- à l'instant t , Σ est constitué du fluide dans Σ^* et de la masse δm_e de fluide qui rentre dans Σ^* entre t et $t + dt$;
- à l'instant $t + dt$, Σ est constitué du fluide dans Σ^* et de la masse δm_s de fluide qui sort dans Σ^* entre t et $t + dt$.

La masse de Σ^* est constante en régime stationnaire. La conservation de la masse entre t et $t + dt$ pour le système fermé s'écrit

$$m(\Sigma^*) + \delta m_e = m(\Sigma^*) + \delta m_s$$

d'où $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$, avec $\delta m = D_m dt$ où D_m est le débit massique.

L'énergie interne du système fermé est

$$U_\Sigma(t) = U_{\Sigma^*} + \delta U_e = U_{\Sigma^*} + u_e D_m dt$$

et

$$U_\Sigma(t + dt) = U_{\Sigma^*} + \delta U_s = U_{\Sigma^*} + u_s D_m dt.$$

Sa variation est donc

$$dU = D_m(u_s - u_e) dt.$$

Le premier principe appliqué au système fermé s'écrit

$$dU = \delta W + \delta Q.$$

Le travail reçu s'écrit en décomposant le travail des forces de pression en amont et en aval (travail de transvasement)

$$\delta W = +p_e S_e v_e dt - p_s S_s v_s dt + \delta W_u$$

d'où

$$D_m(u_s - u_e) dt = p_e S_e v_e dt - p_s S_s v_s dt + \delta W_u + \delta Q$$

On peut écrire

$$\delta m = D_m dt = \mu_e S_e v_e dt = \mu_s S_s v_s dt$$

d'où

$$D_m(u_s - u_e) dt + \left(\frac{p_s}{\mu_s} - \frac{p_e}{\mu_e} \right) D_m dt = \delta W_u + \delta Q.$$

On fait apparaître le travail utile massique w_u et le transfert thermique massique q avec

$$\delta W_u = w_u D_m dt \quad \text{et} \quad \delta Q = q D_m dt.$$

On obtient alors

$$\left(u_s + \frac{p_s}{\mu_s} \right) - \left(u_e + \frac{p_e}{\mu_e} \right) = w_u + q,$$

soit en introduisant l'enthalpie massique $h = u + \frac{p}{\mu}$:

$$h_s - h_e = w_u + q.$$

2 — Cycle de Hirn

2. Partant d'un liquide juste saturant, la compression se fera dans le domaine du liquide. On nous donne la variation d'entropie pour une phase condensée :

$$\Delta S = C \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

La compression étant isentropique, on a $\Delta S = 0$, d'où $T_1 = T_0$.

Pour une phase condensée, on a $\Delta h = c_p \Delta T$, soit

$$h_1 - h_0 = c_p(T_1 - T_0).$$

Comme $T_1 = T_0$, on a

$$h_1 = h_0.$$

Pour un liquide, une évolution isentropique peut donc être considérée comme isenthalpique; son évolution dans le diagramme des frigoristes est donc un **segment vertical**.

3. Courbes dans le diagramme des frigoristes :

La « courbe en cloche » est la courbe de saturation, sous laquelle se trouve le domaine diphasé. Sa branche de gauche est la courbe d'ébullition (liquide saturant), sa branche de droite est la courbe de rosée (vapeur saturante).

Par construction, les droites verticales sont les isenthalpes, tandis que les droites horizontales sont les isobares.

Les courbes en traits plein dans le domaine vapeur sont les isothermes.

Les courbes en tirets sont les isentropes.

Dans le domaine diphasé, les isothermes sont horizontales, tandis qu'elles sont verticales dans le domaine liquide.

Construction du cycle

L'état 0 est sur la courbe d'ébullition à la pression 0,04 bar.

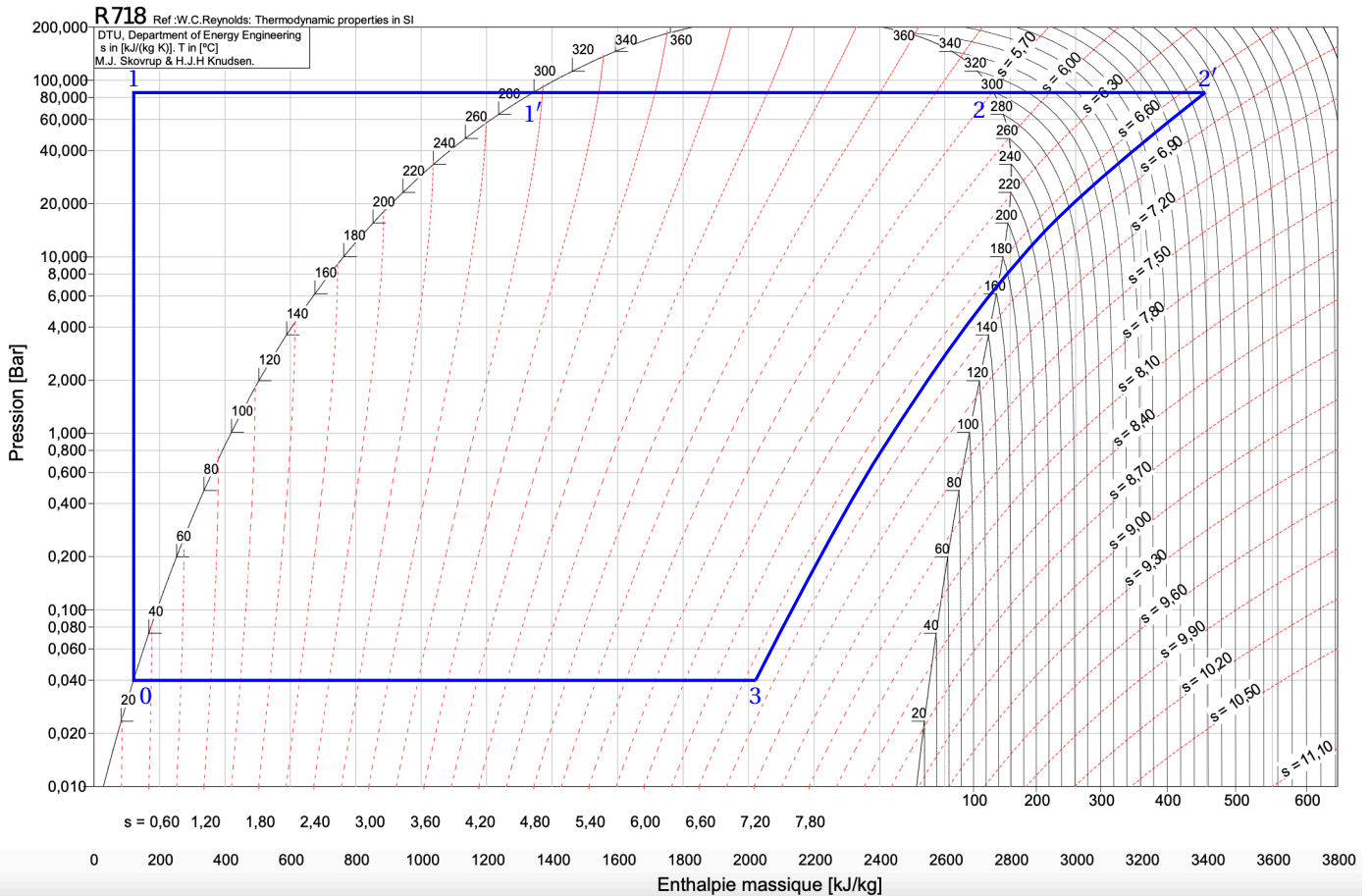
L'évolution 0 → 1 dans la pompe est une isenthalpe verticale d'après la question précédente, jusqu'à la pression 85,8 bar (état 1).

La transformation 1 → 1' → 2 → 2' est isobare. L'état 1' est sur la courbe d'ébullition et l'état 2 sur la courbe de rosée. L'évolution se poursuit jusqu'au point 2' sur l'iso-

therme 500 °C.

L'évolution 2' → 3 suit une courbe isentropique, jusqu'à la pression initiale de 0,04 bar.

On revient au point 0 par une isobare (dans le condenseur).



4. Le titre massique se calcule par la règle des moments, avec les enthalpies massiques ou les entropies massiques.

L'entropie massique étant donnée pour l'état 2' et l'évolution 2' → 3 étant isentropique, on a donc la valeur précise de l'entropie massique pour l'état 3. Nous aurons donc le titre massique en vapeur à l'état 3 avec la plus grande précision en utilisant la règle des moments avec les entropies massiques :

$$x_3 = \frac{s_3 - s_0}{s_V - s_0}$$

où s_V est l'entropie massique du point de l'isobare à 0,040 bar sur la courbe de rosée.

On a

$$s_3 = s_{2'} = 6,68 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On donne

$$s_0 = 0,42 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad s_V = 8,47 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On en déduit

$$x_3 = \frac{6,68 - 0,42}{8,47 - 0,42}$$

1. L'application numérique a été faite en gardant la valeur non arrondie de x_3 .

soit $x_3 = 0,78$.

On en déduit alors l'enthalpie massique au point 3 :

$$h_3 = x_3 h_V + (1 - x_3) h_0 = 0,78 \times 2554 + (1 - 0,78) \times 121$$

soit $h_3 = 2013 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

5. L'efficacité du cycle est définie par

$$\eta = \frac{\text{énergie coûteuse}}{\text{énergie utile}}.$$

Ici, l'énergie utile est le travail cédé par le fluide à la turbine (étape 2' → 3), soit

$$w_{\text{utile}} = h_{2'} - h_3.$$

L'énergie coûteuse est l'énergie thermique cédée par la source chaude, soit

$$q_{2' \rightarrow 1} = h_{2'} - h_1.$$

On a donc

$$\eta = \frac{h_{2'} - h_3}{h_{2'} - h_1}.$$

D'après les données de l'énoncé et la question précédente, comme $h_1 = h_0$, on a

$$\eta = \frac{3391 - 2013}{3391 - 121}$$

soit $\eta = 0,42$.

6. Le premier principe s'écrit

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f.$$

Le cycle de Carnot étant réversible, le second principe s'écrit

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}.$$

L'efficacité est

$$\eta_C = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

soit

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

La température maximale est $T_c = 500^\circ\text{C} = 773\text{ K}$.

La température minimale est $T_f = 29^\circ\text{C} = 302\text{ K}$.

On a donc $\eta_C = 0,61$.

L'efficacité du cycle réel est inférieure à celle du cycle de Carnot en raison des irréversibilités des transferts thermiques (la température du fluide n'est pas égale à celle des sources; les transferts thermiques correspondants sont donc irréversibles).

On peut calculer le rendement de la machine :

$$\rho = \frac{\eta}{\eta_C}$$

soit $\rho = 0,69$.

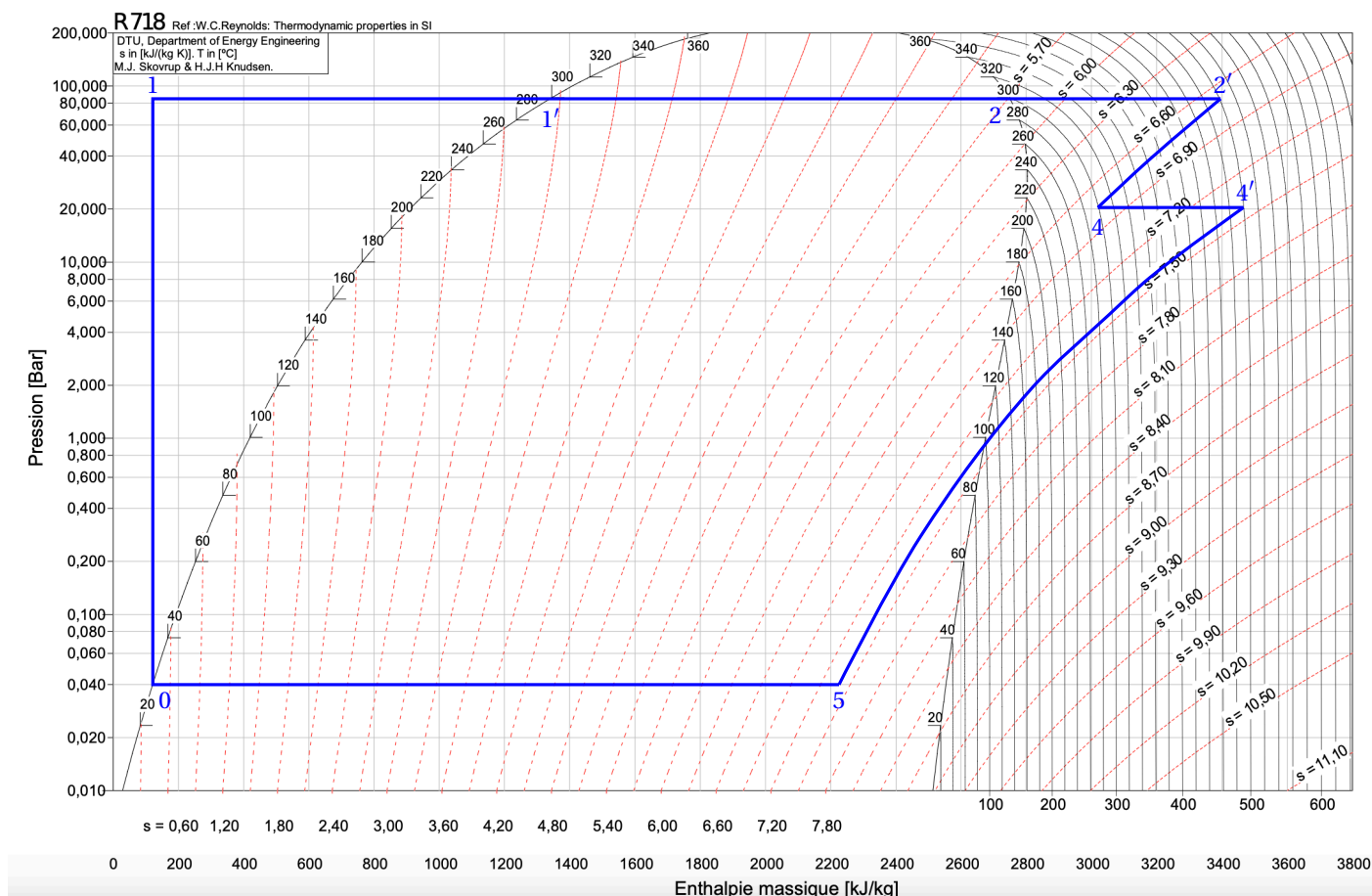
3 — Cycle à double surchauffe

7. La partie $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1' \rightarrow 2 \rightarrow 2'$ est inchangée par rapport au cycle précédent.

La détente isentropique dans la turbine HP suite la même courbe que l'état $2 \rightarrow 3$ précédente, mais s'arrête au point 4 sur l'isotherme $T_4 = 300^\circ\text{C}$.

L'étape $4 \rightarrow 4'$ est une surchauffe isobare, donc un segment horizontal jusqu'à l'isotherme $T_{4'} = 500^\circ\text{C}$.

On suit ensuite une détente isentropique $4' \rightarrow 5$ dans la turbine BP jusqu'à la pression 0,40 bar.



► Avec un tel cycle, il semble difficile de dire que $x_5 \approx 1$. On obtient cependant un mélange plus riche en vapeur pour le cycle avec double surchauffe (on trouve $x_{5,0,91}$). Pour obtenir $x_5 \approx 1$, il faudrait devenir sur certaines des hypothèses relatives au fonctionnement. Par exemple, considérer des évolutions irréversibles dans les turbines, ce qui entraîne une valeur supérieure de h_5 .

Le travail utile récupéré est celui échangé au niveau des deux turbines, soit pour le travail reçu par l'extérieur :

$$w_{\text{récup}} = -w_{2' \rightarrow 4} - x_{4' \rightarrow 5} = h_{2'} - h_4 + h_{4'} - h_5.$$

On lit $h_5 = 2220 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $h_4 = 3020 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $h_{4'} = 3460 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

On donne $h_{2'} = 3391 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. On calcule alors

$$w_{\text{récup}} = 1611 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

L'énergie « coûteuse » est celle dépensée dans les étapes de chauffe $1 \rightarrow 2'$ et de surchauffe $4 \rightarrow 4'$ soit

$$q_{\text{coût}} = h_{2'} - h_1 + h_{4'} - h_4 = 3391 - 121 + 3460 - 3020 = 3710 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

L'efficacité vaut alors

$$\eta = \frac{w_{\text{récup}}}{q_{\text{coût}}} = \frac{1611}{3710}$$

soi $\eta = 0,43$.

L'augmentation de l'efficacité due à la double surchauffe est minime ; l'intérêt de l'opération est d'éviter d'endommager la turbine avec des gouttes d'eau.

4 — Cycle réel d'une tranche nucléaire

8. Les différents éléments ne sont pas traversés par le même débit massique.

Dans un échangeur thermique, le premier principe industriel s'écrit

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{\text{th}},$$

où \mathcal{P}_{th} est la puissance thermique reçue par le fluide.

Dans une turbine adiabatique, le premier principe industriel s'écrit

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u,$$

où \mathcal{P}_u est la puissance mécanique utile reçue par le fluide.

La puissance thermique « coûteuse » est celle fournie à l'eau du circuit secondaire par l'eau du circuit primaire dans les échangeurs principaux. D'après le tableau, le débit massique y est

$$D_m = 5412,1 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{5412,1 \times 10^3}{3600} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'enthalpie massique vaut $h_e = 941,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ en entrée et $h_s = 2788,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ en sortie, d'où

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = D_m(h_s - h_e) = \frac{5412,1 \times 10^3}{3600} (2788,4 - 941,7) = 2,78 \times 10^6 \text{ kW} = 2,78 \text{ GW}.$$

La puissance mécanique utile est celle échangée dans les turbines. Il faut tenir compte des différents débit sortant de chaque turbine.

Turbine haute pression HP

Elle est alimentée par le débit massique entrant

$$D_{m,\text{HP}} = 5001,9 \text{ t} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{5001,9 \times 10^3}{3600} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

avec une enthalpie massique $h_{e,\text{HP}} = 2787,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Il faut ensuite considérer les sorties vers les éléments R4, R5 et R6, ainsi que l'échappement de la turbine HP.

Le premier principe industriel s'écrit alors

$$D_{m,\text{HP}} h_{e,\text{HP}} - D_{m,\text{R4}} h_{\text{R4}} - D_{m,\text{R5}} h_{\text{R5}} - D_{m,\text{R6}} h_{\text{R6}} - D_{m,\text{echap,HP}} h_{\text{echap,HP}} = \mathcal{P}_{\text{récup,HP}}$$

Avec le tableau fourni, on calcule

$$\mathcal{P}_{\text{récup,HP}} = [5001,9 \times 2787,1 - 402,1 \times 2562,8 - 208,4 \times 2622,6 - 214,3 \times 2682,5 - 4177,1 \times 2562,8] \frac{1000}{3600}$$

soit

$$\mathcal{P}_{\text{récup,HP}} = 301 \text{ kW} = 0,301 \text{ GW}.$$

On fait de même avec la turbine basse pression, les échangeurs concernés étant R1, R2 et R3 :

$$D_{m,BP} h_{e,BP} - D_{m,R1} h_{R1} - D_{m,R2} h_{R2} - D_{m,R3} h_{R3} - D_{m,\text{echap,BP}} h_{\text{echap,BP}} = \mathcal{P}_{\text{récup,BP}}$$

Avec le tableau fourni, on calcule

$$\mathcal{P}_{\text{récup,BP}} = [3704,0 \times 2970,4 - 134,2 \times 2377,8 - 235,4 \times 2538,9 - 281,4 \times 2731,5 - 3053,0 \times 2242,2] \frac{1000}{3600}$$

soit

$$\mathcal{P}_{\text{récup,BP}} = 687 \text{ kW} = 0,687 \text{ GW}.$$

La puissance mécanique utile récupérée vaut donc

$$\mathcal{P}_{\text{récup}} = \mathcal{P}_{\text{récup,HP}} + \mathcal{P}_{\text{récup,BP}} = 0,988 \text{ GW}.$$

L'efficacité est du cycle est alors donnée par

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{récup}}}{\mathcal{P}_{\text{th}}} = \frac{0,687}{2,78}$$

soit $\eta = 0,36$.

La puissance utile disponible aux bornes de l'alternateur vaut donc $\mathcal{P}_u = 988 \text{ MW}$.

Partie III : le Millenium Bridge (Mines-Ponts PSI 2016)

1 — Le Millenium Bridge

1 Système élastique continu

1. Comme $\frac{\Delta L}{L}$ est sans dimension, on a $[E] = \frac{[F]}{L}$: le module d'Young a la dimension d'une force surfacique — ou contrainte. Il a donc l'unité d'une pression.

Le module de Young s'exprime en pascal.

2. Au repos, la tranche considérée est comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

Sous l'effet d'une traction, l'aire d'abscisse x se déplace à l'abscisse $x' = x + X(x, t)$, et l'aire d'abscisse $x + dx$ se déplace à l'abscisse $x'' = x + dx + X(x + dx, t)$. La nouvelle longueur de la tranche est alors

$$\begin{aligned} dx' &= x' - x = [x + dx + X(x + dx, t)] - [x + X(x, t)] \\ &= X(x + dx, t) - X(x, t) = dx + \frac{\partial X}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

La variation relative de sa longueur est donc

$$\frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

La force de traction exercée par la partie droite sur la partie gauche est donc donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{F}(x, t) = ES \frac{dx' - dx}{dx} \vec{u}_x,$$

soit

$$\vec{F}(x, t) = ES \frac{\partial X}{\partial x} \vec{u}_x.$$

La tranche de longueur dx est soumise :

- à la force de traction $-\vec{F}(x, t)$ exercée par la partie à gauche de l'abscisse x ;
- à la force de traction $+\vec{F}(x + dx, t)$ exercée par la partie à droite de l'abscisse $x + dx$.

Son barycentre étant au premier ordre à l'abscisse

$$x_G = x + \frac{dx}{2} + X(x, t),$$

le principe fondamentale de la dynamique appliquée à la tranche de longueur dx et de masse $dm = \rho S dx$ s'écrit, en projection selon \vec{u}_x :

$$\rho S \ddot{x}_G = -F(x, t) + F(x + dx, t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx,$$

d'où

$$\rho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Le déplacement $X(x, t)$ vérifie donc l'équation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0.$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert, avec la célérité

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

3. Considérons un tronçon compris entre les abscisses x et $x + dx$, de masse $dm = \mu d\ell$. Son mouvement se faisant selon \vec{u}_y , le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projection selon \vec{u}_x :

$$0 = T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t).$$

Comme $\cos \alpha(x, t) \approx 1$ et $\cos \alpha(x + dx, t) \approx 1$, on a

$$0 = T(x + dx, t) - T(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0.$$

Le module de la tension est donc indépendant de x :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

4. Projetons le principe de la dynamique appliqué à la tranche de longueur $d\ell$ selon \vec{u}_x :

$$\mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) = T_0 \sin \alpha(x + dx, t) - T_0 \sin \alpha(x, t).$$

On a

$$\sin \alpha(x, t) \approx \alpha(x, t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$$

d'où

$$\mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 [\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)] = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

soit

$$\mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Avec $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on a

$$\mu dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

soit au premier ordre en $\frac{dy}{dx}$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}.$$

2 Modèle de la poutre élançée

5. Une solution de la forme $y(x, t) = f(x)g(t)$ est une **onde stationnaire**.

Les ondes stationnaires apparaissent dans des milieux finis ou semi-infini avec au moins une conditions aux limites constante (comme un nœud de vibration par exemple).

6. En écrivant que $y(x, t) = f(x)g(t)$ vérifie l'équation d'onde, on obtient

$$\rho S f(x) g''(t) + IE f^{(4)}(x) g(t) = 0,$$

soit

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = -\frac{IE}{\rho S} \frac{f^{(4)}(x)}{f(x)}.$$

Le premier terme étant indépendant de x et le second de t , ces deux termes sont égaux à une constante α . On se ramène donc au système de deux équations différentielles

$$\begin{cases} g''(t) - \alpha g(t) = 0 \\ f^{(4)}(x) + \frac{\rho S \alpha}{IE} f(x) = 0 \end{cases}$$

Selon le signe de α , la solution de l'équation en $g(t)$ est affine, exponentielle ou sinusoïdale. Les deux premières conduisent à une solution qui diverge ou qui tend vers 0, inacceptable. La fonction $g(t)$ est donc nécessairement périodique.

Pour *un* mode de vibration :

- l'équation différentielle en $g(t)$ est du second ordre, et sa détermination nécessite 2 constantes d'intégration;
- l'équation différentielle en $f(x)$ est d'ordre 4, et sa détermination nécessite 4 constantes d'intégration.

La solution s'écrivant $y(x, t) = g(t)f(x)$, en regroupant deux des constantes du produit, on se ramène à **5 constantes** pour déterminer entièrement un mode de vibration.

7. La solution $g(t)$ est périodique pour $\alpha < 0$. Posons $\alpha = -\omega^2$; on a donc

$$g''(t) + \omega^2 g(t) = 0.$$

L'équation vérifiée par $f(x)$ s'écrit alors

$$f^{(4)}(x) - \frac{\rho S \omega^2}{IE} f(x) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est

$$r^4 - \frac{\rho S \omega^2}{IE} = 0.$$

On a donc

$$r^2 = \pm \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{IE}}.$$

Le cas $r^2 = \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{IE}}$ conduit à

$$r_1 = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE} \right)^{1/4}$$

et

$$r_2 = - \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE} \right)^{1/4}$$

le cas $r^2 = -\sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{IE}}$ conduit à

$$r_3 = i \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE} \right)^{1/4}$$

et

$$r_4 = -i \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE} \right)^{1/4}$$

Posons $\beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE} \right)^{1/4}$. On a donc

$$r_1 = \beta; \quad r_2 = -\beta; \quad r_3 = i\beta \quad \text{et} \quad r_4 = -i\beta.$$

La fonction $f(x)$ s'écrit donc comme une combinaison linéaire

$$f(x) = A' e^{\beta x} + B' e^{-\beta x} + C' e^{i\beta x} + D' e^{-i\beta x}.$$

on peut changer de base de solution² et choisir les fonctions trigonométriques :

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x)$$

avec

$$\beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE} \right)^{1/4}.$$

8. La condition $y(0, t) = 0$ conduit à

$$f(0) = A + C = 0.$$

La condition $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0,t} = 0$ conduit à

$$-A\beta^2 + C\beta^2 = 0.$$

On a donc

$$C = -A \quad \text{et} \quad C = A.$$

On en déduit $A = C = 0$, et

$$f(x) = B \sin(\beta x) + D \sinh(\beta x).$$

La condition $y(L, t) = 0$ conduit à

$$B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) = 0.$$

La condition $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=L,t} = 0$ conduit à

$$-B\beta^2 \sin(\beta L) + D\beta^2 \sinh(\beta L) = 0.$$

On a donc

$$B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) = 0$$

$$-B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) = 0$$

ce qui revient à

$$B \sin(\beta L) = 0$$

$$D \sinh(\beta L) = 0$$

Comme $\sinh(\beta L) \neq 0$, on a $D = 0$.

La solution $B = D = 0$ étant à exclure (solution $y(x, t) = 0$), on doit avoir $B \neq 0$, d'où $\sin(\beta L) = 0$. Le paramètre β ne peut donc prendre que des valeurs discrètes données par

$$\beta_n L = n\pi.$$

On a donc

$$\beta_n = \left(\frac{\rho S}{IE} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} = \frac{n\pi}{L}.$$

Les pulsations propres sont donc données par

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{IE}{\rho S}}.$$

9. L'étude se limite à des vibrations de la forme $y(x, t)$: l'amplitude est indépendante de la coordonnée z latérale. Tous les points sur une ligne perpendiculaire à l'axe de la passerelle (soit $x = \text{cte}$) doivent donc avoir la même elongation $y(x, t)$. Cela exclut donc les modes b, d, g et h.

Les modes a, c, e et f correspondent à l'étude proposée.

Compte tenu de la question précédente, le mode n correspond à

$$y_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Le mode a présente deux nœuds ($x = 0$ et $x = L$) et un ventre : il correspond donc à $n = 1$.

Le mode c présente trois nœuds et deux ventres : il correspond donc à $n = 2$.

Le mode e présente 4 nœuds et 3 ventres : il correspond à donc $n = 3$.

Le mode f présente 5 nœuds et 4 ventres : il correspond donc à $n = 4$.

| mode | a | c | e | f |
|------|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 |

2. On a $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ et $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

10. Les fréquences propres $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ sont données par

$$f_n = n^2 \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{IE}{\rho S}} = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{\frac{1}{12}bh^3E}{\rho hb}} = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{h^2E}{48\rho}}$$

On calcule

$$f_n = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{(1,07)^2 \times 69 \times 10^9}{48 \times 2700}}$$

soit

$$f_n = 2452,8 \frac{n^2}{L^2}.$$

Calculons les fréquences propres correspondant aux premiers modes pour chaque travée.

| travée | L_1 (70 m) | L_2 (144 m) | L_3 (108 m) |
|------------|--------------|---------------|---------------|
| f_1 (Hz) | 0,50 | 0,12 | 0,21 |
| f_2 (Hz) | 2,0 | 0,46 | 0,84 |
| f_3 (Hz) | 4,6 | 1,1 | 1,9 |
| f_4 (Hz) | 8,4 | 1,9 | 3,4 |
| f_5 (Hz) | 13 | 2,9 | 5,3 |

On voit que la fréquence $f \approx 2 \text{ Hz}$, qui correspond à la fréquence d'excitation des pas des piétons, est accessible pour les trois travées : il s'agit du mode $n = 2$ pour la travée L_1 , du mode $n = 4$ pour la travée L_2 et du mode $n = 3$ pour la travée L_3 .

Les vibrations latérales sont des ondes selon $z(x, t)$. Leur étude est identique, en intervertissant h et b (y compris dans l'expression de I). On particulier, les fréquences propres sont données par

$$f'_n = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{b^2 E}{48\rho}}$$

Les vibrations latérales se font en considérant la « longueur » b au lieu de L et la « largeur » L au lieu de b .

Les fréquences propres sont alors données par

$$f'_n = \frac{n^2 \pi}{b^2} \sqrt{\frac{h^2 E}{48\rho}} = n^2 \frac{\pi}{4^2} \sqrt{\frac{(1,07)^2 \times 69 \times 10^9}{48 \times 2700}}.$$

On calcule

$$f_n = \frac{n^2 \pi}{L^2} \sqrt{\frac{(4)^2 \times 69 \times 10^9}{48 \times 2700}}$$

soit

$$f'_n = 9169,2 \frac{L^2}{n^2}.$$

Calculons les fréquences propres correspondant aux premiers modes pour chaque travée.

| travée | L_1 (70 m) | L_2 (144 m) | L_3 (108 m) |
|-------------|--------------|---------------|---------------|
| f'_1 (Hz) | 1,8 | 0,43 | 0,74 |
| f'_2 (Hz) | 7,4 | 1,8 | 3,1 |
| f'_3 (Hz) | 16 | 3,7 | 6,8 |
| f'_4 (Hz) | 29 | 6,8 | 12 |

L'excitation latérale est due à l'alternance des pas du pied gauche et du pied droit; c'est donc la fréquence d'un pied qui est à considérer, c'est-à-dire environ 1 Hz. On est assez proche du mode fondamental de la travée de 108 m. C'est ce mode de vibration qui a causé problème.

Partie IV : la sonde de Clark (Centrale PSI 2006)

1. La masse molaire de KCl est $M(\text{KCl}) = 39 + 35,5 = 74,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Dans un litre de solution, on a donc

$$n = \frac{175}{74,5} = 2,35 \text{ mol}$$

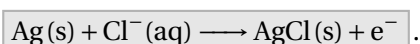
de KCl, soit $[\text{Cl}^-] = 2,35 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On obtient le précipité de chlorure d'argent pour

$$[\text{Ag}^+][\text{Cl}^-] = K_s$$

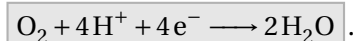
soit pour $[\text{Ag}^+] = 8,9 \times 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

2. L'oxydation du couple $\text{AgCl(s)}/\text{Ag(s)}$ correspond à



L'électrode d'argent est donc l'**anode**.

La réduction du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ correspond à



L'électrode de platine est donc la **cathode**.

3. La courbe (1) correspond à la cathode car $i < 0$, donc à l'électrode de platine.

La courbe (2) correspond à l'anode car $i > 0$, donc à l'électrode d'argent.

4. À la réaction électrochimique



est associée l'enthalpie libre standard

$$\Delta_r G_1^\circ = -FE^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}).$$

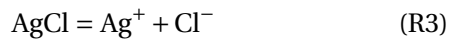
À la réaction électrochimique



est associée l'enthalpie libre standard

$$\Delta_r \tilde{G}_2^\circ = -FE^\circ(\text{AgCl}/\text{Ag}).$$

À la réaction de dissolution du précipité



est associée l'enthalpie libre standard

$$\Delta_r G_3^\circ = -RT \ln K_s.$$

On a (R2) = (R1) + (R3) donc $\Delta_r \tilde{G}_2^\circ = \Delta_r \tilde{G}_1^\circ + \Delta_r G_3^\circ$ soit

$$-FE^\circ(\text{AgCl}/\text{Ag}) = -FE^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) - RT \ln K_s$$

d'où

$$\begin{aligned} E^\circ(\text{AgCl}/\text{Ag}) &= E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) + \frac{RT}{F} \ln K_s \\ &= E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) + 0,06 \log K_s. \end{aligned}$$

On calcule

$$E^\circ(\text{AgCl}/\text{Ag}) = 0,16 \text{ V}.$$

Le potentiel d'équilibre de l'électrode d'argent est donné par la relation de Nernst :

$$E_{\text{eq}} = E^\circ(\text{AgCl}/\text{Ag}) + 0,06 \log \frac{c^\circ}{[\text{Cl}^-]}$$

soit $E_{\text{eq}} = 0,14 \text{ V}$.

La courbe anodique « décolle » pour un potentiel de l'ordre de 0,17 V, légèrement supérieur à E_{eq} : la valeur calculée est conforme à la courbe courant-potentiel, qui doit présenter un léger surpotentiel anodique.

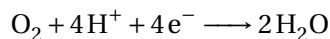
5. Pour une différence de potentiel de 0,7 V, on est situé sur la partie verticale de la courbe anodique, et sur le palier horizontal de la courbe cathodique.

On peut donc lire sur ce dernier segment

$$I = -i_c = -45 \mu\text{A}.$$

On a donc $I = 45 \mu\text{A}$.

6. La cinétique de l'électrolyse est limitée par le palier de la courbe cathodique; il s'agit d'un palier de diffusion relatif à la réduction



Le réactif étant O_2 , c'est bien la diffusion de O_2 à travers la membrane qui limite la cinétique de l'électrolyse.

7. Loi de Fick pour la diffusion de l'espèce O_2

$$j_n = -D \frac{dn(\text{O}_2)}{dx} = -D N_{\text{O}_2} \frac{d[A]}{dx}.$$

La courant particulière en O_2 est donné par le flux de j_n :

$$I_n = -D N_A S \frac{d[\text{O}_2]}{dx}.$$

8. On oriente \vec{e}_x de l'extérieur à l'intérieur de la cellule. En régime stationnaire, le profil de particules diffusantes est affine dans la membrane d'épaisseur δ , donc

$$\frac{d[\text{O}_2]}{dx} = \frac{[\text{O}_2]_{\text{int}} - [\text{O}_2]_{\text{ext}}}{\delta}.$$

Le courant particulière en O_2 vaut donc

$$I_n = D S N_A \frac{[\text{O}_2]_{\text{ext}} - [\text{O}_2]_{\text{int}}}{\delta}$$

D'après la stœchiométrie de la réaction de réduction cathodique, on a 4 électrons échangés par molécule de O_2 réduite. La densité de courant de charge à travers la membrane est donc

$$j = 4e j_n$$

et l'intensité d'électrolyse est

$$I = 4e I_n = 4D S e N_A \frac{[\text{O}_2]_{\text{ext}} - [\text{O}_2]_{\text{int}}}{\delta}.$$

Comme $e N_A = F$, constante de Faraday, on a

$$I = 4D S F \frac{[\text{O}_2]_{\text{ext}} - [\text{O}_2]_{\text{int}}}{\delta}.$$

9. Pour $[\text{O}_2]_{\text{int}} = 0$, on obtient

$$I_{\text{max}} = 4D S F \frac{[\text{O}_2]_{\text{ext}}}{\delta}.$$

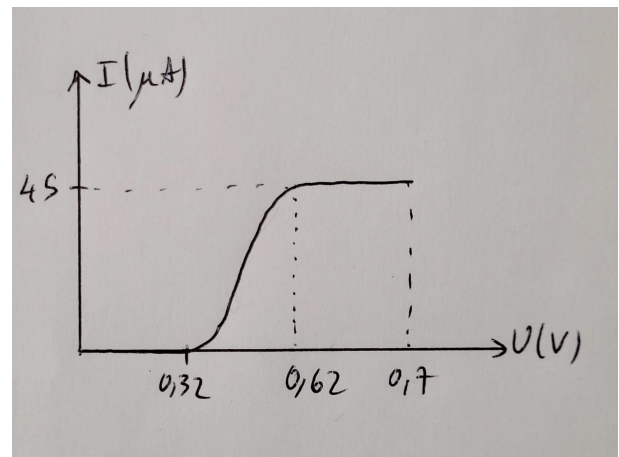
On a donc

$$[\text{O}_2]_{\text{ext}} = \frac{I_{\text{max}} \delta}{4D S F}.$$

La mesure de I_{max} permet de déterminer $[\text{O}_2]_{\text{ext}}$.

10. Pour $U < 0,32 \text{ V}$, l'électrolyse ne peut se dérouler : $I = 0$.

Quand on augmente U , l'intensité I augmente jusqu'à ce que l'on atteigne le palier de diffusion, pour $U \approx 0,62 \text{ V}$. L'intensité est alors égale à l'intensité du palier de diffusion, soit $I_{\text{max}} = 45 \mu\text{A}$.



11. La mesure de I permet de déterminer la teneur en O_2 si on est sur le palier de diffusion cathodique. Si la tension est trop faible, le courant maximal de diffusion n'est pas atteint et la relation établie à la question 9 n'est pas vérifiée.

12. Si on applique une différence de potentiel très supérieure à 0,7 V, on risque de provoquer aussi la réduction de l'eau au niveau de la cathode. La relation $j = 4e j_n$ n'est alors plus vérifiée (des électrons participent à la réduction de H^+), et cela entraîne la formation de H_2 dans la cellule, ce qui est gênant.