

## DS n° 5

## Sujet « difficile »

Le sujet comporte trois parties indépendantes.

Merci de suivre les conseils suivants :

- **laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires;**
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points;
- respecter et indiquer la numérotation des questions;
- souligner ou encadrez les résultats.

## Partie I – Étude d'une éolienne

Depuis l'orientation des années 1970 vers des énergies nouvelles et renouvelables, le développement éolien est en plein expansion. Les éoliennes fournissent de l'énergie électrique d'appoint mais peuvent couvrir, sur certains territoires, notamment insulaires, l'ensemble de leur besoin électrique. Il existe différents types d'aérogénérateurs, classés selon la géométrie de leur rotor et de son orientation par rapport à la direction du vent. Nous nous intéresseront aux plus courants (qui sont les plus puissants), ceux dont le rotor est d'axe parallèle à la vitesse du vent. Cet axe sera noté ( $Ox$ ).

Cette étude comprend deux parties. La première traite de l'échange de puissance entre le vent et le rotor d'une éolienne, dans des conditions idéalisées. La deuxième propose une analyse aérodynamique d'une éolienne. Ces parties ne sont pas totalement indépendantes.

### Notations et données

$$\begin{aligned} \text{Masse volumique de l'air} \quad \rho &= 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \text{Viscosité dynamique de l'air} \quad \eta &= 1,85 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

### 1 — Conversion de puissance d'un aérogénérateur. Limite de Betz.

Nous souhaitons déterminer la puissance que le vent peut céder à un dispositif éolien, dans un cadre très simplifié et idéalisé reposant sur des hypothèses fortes. Nous supposons notamment que la vitesse de l'écoulement reste parallèle à l'axe ( $Ox$ ). Nous considérons encore que les champs de vitesse et de pression sont uniformes sur toute section droite du tube de courant (figure I-1). Enfin, nous considérons l'écoulement d'air comme étant parfait, stationnaire et incompressible. Les effets de la pesanteur ne sont jamais considérés.

La figure I-1 représente la portion [1, 2] du tube de courant traversant l'éolienne. Nous notons respectivement  $v_1$ ,  $v$  et  $v_2$  les vitesses loin en amont de l'éolienne, au niveau du rotor, et loin en aval de l'éolienne. Les sections correspondantes sont notées  $S_1$ ,  $S$  et  $S_2$ . Les plans ( $E$ ) et ( $S$ ) sont situés immédiatement en amont et en aval du rotor. Nous considérons alors que  $S_E = S = S_S$  et  $v_E = v = v_S$  (les pressions  $p_E$  et  $p_S$  sont, *a priori*, différentes). La pression de l'air au niveau des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  est la pression atmosphérique  $p_0$ .

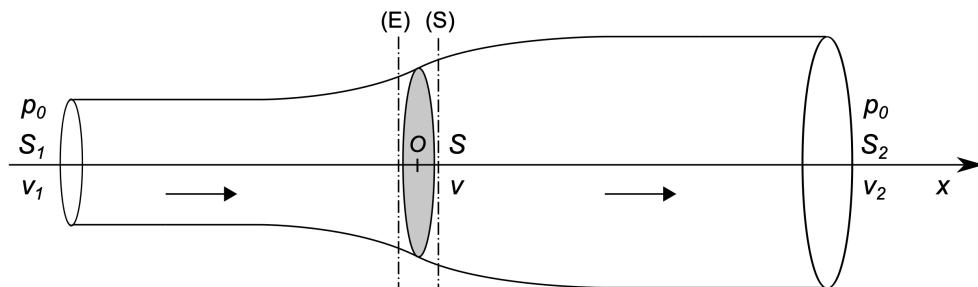


FIGURE I-1 – Veine d'air traversant le rotor de l'éolienne. La surface  $S$  grisée se situe au niveau des pales du rotor. Il s'agit de la surface offerte au passage du vent et sur laquelle s'appuie le tube de courant échangeant de la puissance avec le rotor

□ 1 — Justifier la forme générale du tube de courant représenté sur la figure I-1.

□ 2 — Exprimer le débit massique  $q_m$  de l'air traversant l'éolienne.

#### Détermination de la vitesse $v$ .

□ 3 — En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur la portion [1,2] du tube de courant, établir l'expression de la force  $\vec{F}_{r/a}$  que le rotor exerce, globalement, sur l'écoulement de l'air. Il sera utile d'y faire apparaître  $q_m$ .

□ 4 — En appliquant le théorème de Bernoulli entre les sections (1) et (E), puis entre les sections (S) et (2), exprimer les pressions  $p_E$  et  $p_S$  régnant au niveau des surfaces  $S_E$  et  $S_S$ .

□ 5 — Du résultat précédent, établir une nouvelle expression de  $\vec{F}_{r/a}$ .

□ 6 — En identifiant les deux expressions de la force  $\vec{F}_{r/a}$ , relier  $v$  à  $v_1$  et  $v_2$ .

#### Puissance transférée de l'écoulement à l'éolienne et rendement de la conversion.

□ 7 — À partir d'un bilan d'énergie mécanique, effectué sur la portion [1,2] du tube de courant, déduire l'expression de la puissance  $\mathcal{P}$  cédée à l'éolienne par l'écoulement. On l'exprimera d'abord en fonction de  $\rho$ ,  $v_1$ ,  $S_1$ ,  $v_2$  et  $S_2$ , puis en fonction de  $q_m$ ,  $v_1$  et  $v_2$ .

□ 8 — Nous posons  $\mathcal{P}^* = \frac{1}{2} \rho S v_1^3$ . Attribuer une signification physique à cette grandeur.

□ 9 — Nous posons  $r = v_2/v_1$ . Établir alors que le rendement de la conversion d'énergie, relativement à  $\mathcal{P}^*$ , s'écrit

$$\eta^+ = \frac{1}{2} (1+r)^2 (1-r).$$

□ 10 — Illustrer graphiquement la dépendance de  $\eta^+$  avec  $r$ .

□ 11 — Interpréter ce tracé. Caractériser la situation optimale de fonctionnement, connue sous le nom de limite de Betz.

#### Quelques remarques sur le cadre de l'étude.

□ 12 — Expliquer brièvement pourquoi supposer que le champ de vitesse de l'écoulement reste purement axial constitue une hypothèse forte.

□ 13 — Le théorème de Bernoulli est-il applicable entre les sections (E) et (S) ? Réponse à argumenter.

□ 14 — Expliquer (brièvement) ce qui détermine, en pratique, le rapport  $r$ .

## Partie II – Ondes et vagues : aspects énergétiques

### 1 — Étude du mouvement de la houle en eau peu profonde

Les vagues sont souvent perçues comme un simple mouvement ondulatoire de la surface de l'eau. Elles peuvent être décrites comme une somme d'ondes sinusoïdales élémentaires. Ce modèle, bien que simple en apparence, est intéressant pour comprendre et analyser des situations réelles. Ce problème s'attachera, dans un premier temps, à mettre en équation la propagation de la houle pour pouvoir, dans un second temps, estimer l'énergie véhiculée par cette dernière.

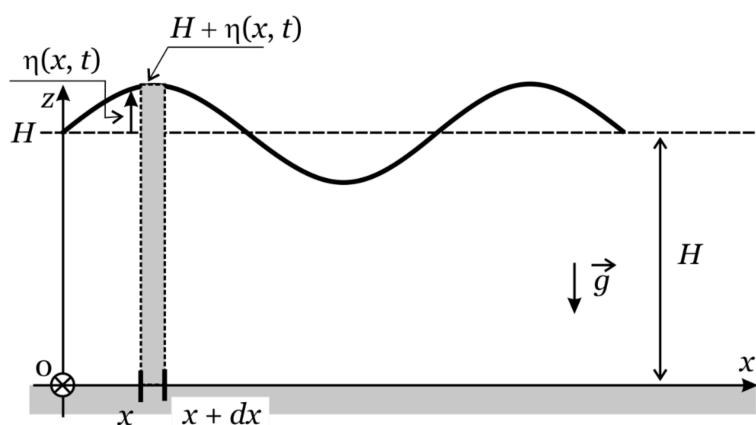


FIGURE II-1 – Schéma d'ensemble.

L'eau est assimilée à un fluide incompressible. Sa masse volumique est notée  $\rho$ .

L'écoulement est supposé parfait. Le champ de pesanteur est uniforme et noté  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ .

L'air impose au-dessus de la surface libre une pression constante et uniforme  $p^\circ$ .

Toute l'étude se fera dans le référentiel galiléen lié au fond marin. Le fond de l'eau est supposé rigide, immobile et horizontal à la cote  $z = 0$ . Dans la modélisation proposée ici, le système est considéré comme invariant par translation parallèle à l'axe ( $Oy$ ). Tous les champs sont eulériens et ne dépendent plus que des variables  $x$ ,  $z$  et  $t$ . L'étude est menée dans le plan ( $xOz$ ).

À l'origine des temps, la colonne d'eau est au repos et la surface libre de l'eau est horizontale et située à la cote  $z = H$ . Lorsque celle-ci est en mouvement, la cote de la surface libre de l'eau est notée  $z(x, t) = H + \eta(x, t)$ . L'amplitude du mouvement de la surface libre notée  $\eta_0$ , la longueur d'onde  $\lambda$  du phénomène étudié et la profondeur  $H$  de l'eau satisfont à l'inégalité suivante :  $\eta_0 \ll H \ll \lambda$ . On dit encore que l'étude est faite en eau peu profonde.

L'eau subit une perturbation et, de fait, est mise en mouvement. Il n'y a pas de mouvement permanent d'ensemble du fluide selon l'axe ( $Ox$ ). Dans le tout le problème les termes convectifs sont négligés.

On note  $p(x, z, t)$  la pression de l'eau au point  $M(x, z)$  à l'instant  $t$ .

Afin de décrire le comportement de la houle, le champ eulérien des vitesses est de la forme

$$\vec{v}(M, t) = v_x(x, z, t) \vec{e}_x + v_z(x, z, t) \vec{e}_z.$$

On admettra dans tout le problème que  $|v_x(x, z, t)| \gg |v_z(x, z, t)|$  et que la composante suivant ( $Ox$ ) de la vitesse ne dépend pas de  $z$ . On pourra alors écrire  $\vec{v}(M, t) = v_x(x, t) \vec{e}_x$  dans toute la suite du problème. Les grandeurs  $v_x(x, t)$  et  $\eta(x, t)$  sont des infiniment petits du même ordre.

□ 1 — En admettant que le champ de pression a la même expression qu'en hydrostatique, et en tenant compte de la pression à la surface libre de l'eau, établir l'expression de la pression  $p(x, z, t)$  en fonction de  $p^\circ$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $z$ ,  $H$  et  $\eta(x, t)$ .

□ 2 — En linéarisant l'équation de la dynamique appliquée à une particule de fluide, établir la relation

$$\rho \frac{\partial v_x(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x, z, t)}{\partial x}.$$

□ 3 — Établir alors la relation entre la dérivée temporelle  $\frac{\partial v_x(x, t)}{\partial t}$  de  $v_x(x, t)$ , la dérivée spatiale  $\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}$  de  $\eta(x, t)$  et  $g$ . Cette relation sera notée « (1) ».

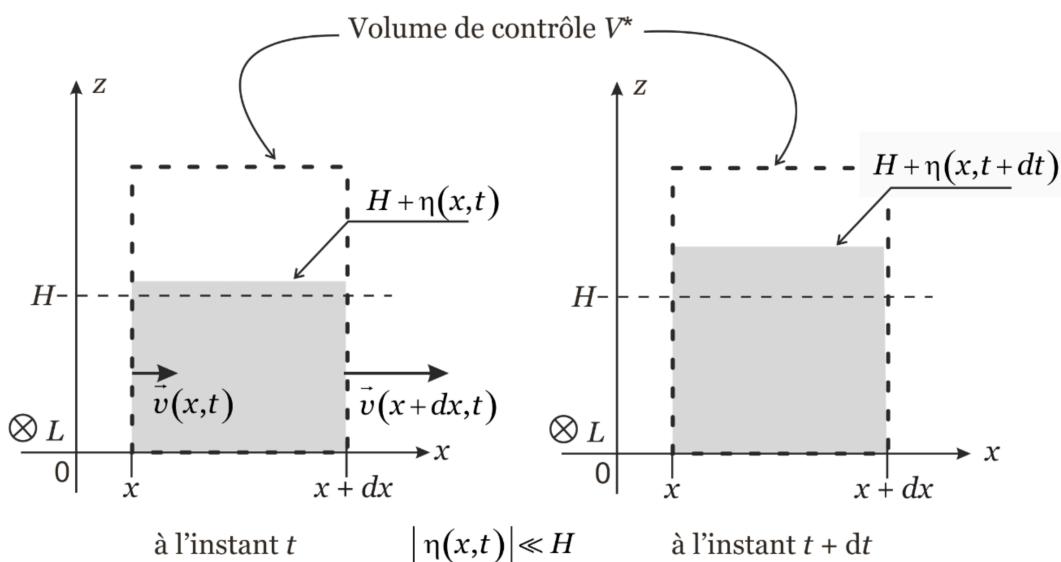


FIGURE II-2 – Schéma au niveau mésoscopique du volume de contrôle  $V^*$  de largeur  $L$  selon ( $Oy$ ). L'échelle selon ( $Ox$ ) est très dilatée par souci de clarté.

Afin d'établir l'équation de propagation de l'onde de surface, on se propose de faire un bilan de masse sur un volume de contrôle  $V^*$ , fixe et indéformable, situé à l'abscisse  $x$ , de largeur élémentaire  $dx$ , d'épaisseur  $L$  suivant la direction ( $Oy$ ) et de hauteur toujours supérieure à  $H + \eta(x, t)$ . (figure II-2). La situation est représentée à l'instant  $t$  puis à l'instant  $t + dt$  sur la figure II-2. Pour mémoire, la grandeur  $\eta(x, t)$  représente l'écart vertical élémentaire, selon ( $Oz$ ), à la position du fluide au repos.

□ 4 — Établir l'expression de la masse d'eau, notée  $m(x, t)$  contenue dans le volume  $V^*$  à l'instant  $t$  en fonction des variables  $\rho$ ,  $L$ ,  $H$ ,  $\eta(x, t)$  et  $dx$ . En déduire l'expression de sa variation temporelle  $\frac{\partial(m(x, t))}{\partial t}$ .

□ 5 — Établir l'expression de la masse  $\delta m_e$  qui entre dans le volume de contrôle en  $x$ , entre  $t$  et  $t+dt$ , en fonction de  $\rho$ ,  $H$ ,  $v_x(x, t)$ ,  $\eta(x, t)$ ,  $L$  et  $dt$ .

□ 6 — Établir l'expression de la masse  $\delta m_s$  qui sort du le volume de contrôle en  $x+dx$ , entre  $t$  et  $t+dt$ , en fonction de  $\rho$ ,  $H$ ,  $v_x(x+dx, t)$ ,  $\eta(x+dx, t)$ ,  $L$  et  $dt$ .

□ 7 — À partir des questions 4, 5 et 6, et en effectuant, à l'ordre le plus bas, un bilan de masse sur la volume de contrôle entre  $t$  et  $t+dt$ , établir l'expression suivante, noté « (2) » :

$$\frac{\partial v_x(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t}. \quad (2)$$

□ 8 — À partir des équations (1) et (2), établir alors l'équation de propagation suivante

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{gH} \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2}.$$

□ 9 — Établir l'expression de la relation de dispersion en cherchant une solution de l'équation de propagation sous la forme  $\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega t - kx)$ .

□ 10 — Établir l'expression de la vitesse de phase en fonction de  $g$  et de  $H$ . Déterminer si le phénomène de propagation est dispersif ou non.

## 2 — Aspects énergétiques

On reste dans les conditions précédentes et on s'intéresse au cas particulier où l'évolution spatiale et temporelle de la surface libre de l'eau peut être décrite par une onde plane progressive sinusoïdale  $\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega t - kx)$  où  $k$  est le vecteur d'onde tel que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et  $\lambda$  est la longueur d'onde.

□ 11 — L'expression habituelle de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$  d'un système quelconque de masse  $m$  est donnée par  $E_{pp} = mgz + \text{cte}$  (axe ( $Oz$ ) vertical ascendant). Préciser à quel point spécifique de ce système la cote  $z$  est associée.

□ 12 — Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur élémentaire  $dE_{pp}(x, t)$  d'une tranche élémentaire de fluide de hauteur  $H + \eta(x, t)$ , d'épaisseur  $dx$  et de largeur  $L$ , telle que définie à la figure II-1, s'écrit

$$dE_{pp}(x, t) = \rho g L \frac{(\eta(x, t))^2}{2} dx,$$

avec comme référence  $E_{pp,\text{ref}} = 0$  en l'absence de perturbation, c'est-à-dire lorsque  $\eta(x, t) = 0$ .

□ 13 — En déduire l'expression de la valeur moyenne temporelle de la densité linéique d'énergie potentielle  $\langle e \rangle = \langle \frac{dE_{pp}}{dx} \rangle$  en fonction de  $\eta_0$ ,  $g$ ,  $L$  et  $\rho$ .

□ 14 — En se situant toujours en eau peu profonde, établir l'expression de l'énergie cinétique élémentaire  $dE_c(x, t)$  de la même tranche de fluide, de hauteur  $H + \eta(x, t)$ , d'épaisseur  $dx$  et de largeur  $L$ , en fonction de  $L$ ,  $\rho$ ,  $dx$ ,  $H$  et de la vitesse  $v_x(x, t)$ .

□ 15 — À partir de la relation (1), exprimer  $v_x(x, t)$  en fonction de  $x$ ,  $t$ ,  $\eta_0$ ,  $k$ ,  $\omega$  et  $g$ .

Exprimer ensuite l'amplitude de  $v_x(x, t)$  uniquement en fonction de  $\eta_0$ ,  $H$  et  $g$ .

□ 16 — En déduire l'expression de la valeur moyenne temporelle de la densité linéique d'énergie cinétique  $\langle \kappa \rangle = \langle \frac{dE_c}{dx} \rangle$  en fonction de  $\eta_0$ ,  $g$ ,  $L$  et  $\rho$ .

□ 17 — Exprimer la propriété qui se dégage des expressions littérales des valeurs moyennes des densités linéiques d'énergie potentielle  $\langle e \rangle$  et d'énergie cinétique  $\langle \kappa \rangle$  obtenues précédemment.

□ 18 — En déduire la densité d'énergie linéique moyenne totale  $\langle w \rangle$  transportée par une tranche élémentaire de fluide, en fonction de  $\eta_0$ ,  $g$ ,  $L$  et  $\rho$ .

□ 19 — On note  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  la puissance moyenne par unité de largeur de front  $L$ , suivant ( $Oy$ ), transportée par l'onde. Établir l'expression de cette puissance moyenne en fonction de la vitesse de propagation de l'énergie, égale ici à la célérité de l'onde, et de la densité d'énergie linéique moyenne  $\langle w \rangle$  obtenue précédemment.

Montrer que  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  peut s'écrire

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle = \frac{\rho \eta_0^2}{2} \sqrt{H} \sqrt{g^3}.$$

□ 20 — Vérifier l'homogénéité de la relation obtenue à la question précédente, pour la grandeur  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$ .

□ 21 — **Application numérique.** Calculer la valeur de  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  en prenant les valeurs typiques suivantes :

- profondeur de l'eau :  $H = 100 \text{ m}$ ;
- amplitude verticale de la houle :  $\eta_0 = 0,36 \text{ m}$ ;
- masse volumique de l'eau :  $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;
- accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

□ 22 — Sachant qu'un foyer français consomme en moyenne 12 kWh/jour, calculer le nombre de foyers qui peuvent alimentés par un dispositif de largeur  $L = 1,0 \text{ m}$ .

## Partie III — Accumulateur cadmium-nickel

### 1 — Généralité

On représente la chaîne électrochimique de façon simplifiée par



L'électrolyte utilisé est une solution concentrée de potasse  $\text{K(OH)}$  de pH très proche de 14.

Les espèces chimiques contenant les éléments Ni et Cd sont à l'état solide.

□ 1 — Déterminer les nombres d'oxydation des éléments Ni et Cd dans les 4 espèces considérées :

$\text{Cd(s)}$ ,  $\text{Cd(OH)}_2(\text{s})$ ,  $\text{Ni(OH)}_2(\text{s})$  et  $\text{Ni}_2\text{O}_3(\text{s})$ .

Les domaines d'existence et de prédominance associés au nickel et à l'eau sont représentées sur le diagramme  $E$ -pH de la figure III-1.

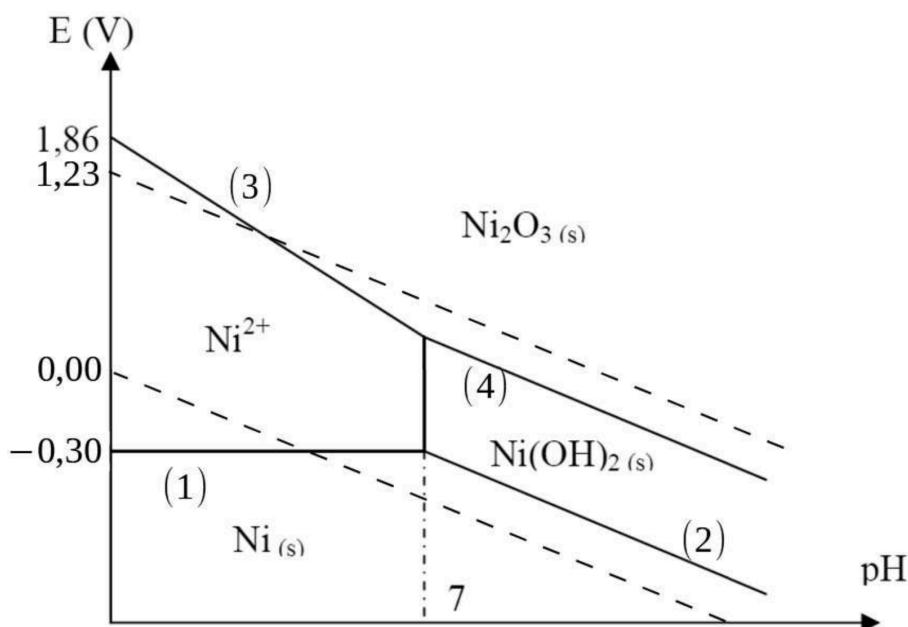


FIGURE III-1 – Diagrammes  $E$ -pH du nickel et de l'eau

On donne, pour l'élément Ni, les équations des frontières entre les différents domaines. Les potentiels sont exprimés en volt.

(1) :  $E_1 = -0,30$

(2) :  $E_2 = 0,12 - 0,06\text{pH}$

(3) :  $E_3 = 1,86 - 0,18\text{pH}$

(4) :  $E_4 = 1,02 - 0,06\text{pH}$

Les données sont indiquées pour une concentration d'espèces dissoutes  $c_0 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et une température de 25 °C.

□ 2 — Tracer sur la copie le diagramme  $E$ -pH du cadmium en prenant en compte les espèces  $\text{Cd}^{2+}$ ,  $\text{Cd(OH)}_2(\text{s})$  et  $\text{Cd(s)}$ .

L'énoncé comporte en annexe une reproduction agrandie de la figure III-1 ; cette reproduction est un support proposé pour la réflexion. On peut, par exemple, y superposer le diagramme  $E$ - $pH$  du cadmium pour répondre aux questions se basant sur le diagramme complet. Cette figure n'est pas à rendre avec la copie, mais elle peut être schématiquement reproduite si nécessaire.

## 2 — Étude de la décharge

□ 3 — Identifier l'anode et la cathode lors de la décharge de l'accumulateur. Écrire la demi-équation électronique observée à chaque électrode en milieu fortement basique. En déduire l'équation de la réaction lorsque l'accumulateur débite.

□ 4 — Déterminer les potentiels redox  $E_+$  et  $E_-$  de chaque pôle, et en déduire  $E_{\text{NiCd}}$ , différence de potentiel prévue par la thermodynamique aux bornes de la pile.

□ 5 — Déduire de  $E_{\text{NiCd}}$  la valeur de l'enthalpie libre standard  $\Delta_r G^\circ$  pour la réaction de décharge de l'accumulateur. Calculer à partir des données l'enthalpie standard de réaction  $\Delta_r H^\circ$ . En déduire l'entropie standard de réaction  $\Delta_r S^\circ$ .

On se placera à 25 °C et on considérera que l'enthalpie standard de la réaction et l'entropie standard de réaction sont indépendantes de la température.

□ 6 — En déduire la variation de la tension  $E_{\text{NiCd}}$  avec la température.

L'accumulateur Cd-Ni est réputé pour délivrer une tension indépendante de la concentration en potasse  $\text{K(OH)}$  et pour sa stabilité face aux variations de température ambiante.

□ 7 — Les calculs précédents confirment-ils ou non ces propriétés ?

## 3 — Étude de la recharge

On souhaite recharger l'accumulateur.

□ 8 — Comment brancher un générateur externe pour recharger l'accumulateur ? On précisera clairement le signe des bornes du générateur sur le schéma.

□ 9 — Écrire l'équation de la réaction réalisée pendant la charge.

□ 10 — Quelle est la tension minimale  $U_{\text{min}}$ , prévue par des considérations thermodynamiques, nécessaire pour que le générateur puisse recharger l'accumulateur ?

□ 11 — Quels phénomènes pourraient causer une augmentation significative de cette valeur ? On argumentera de façon rigoureuse.

### Données numériques

#### Potentiels standard redox

élément Ni       $\text{Ni}^{2+}/\text{Ni} : E_a^\circ = -0,24 \text{ V}$        $\text{Ni}_2\text{O}_3/\text{Ni}^{2+} : E_b^\circ = 1,43 \text{ V}$

élément Cd       $\text{Cd}^{2+}/\text{Cd} : E_c^\circ = -0,40 \text{ V}$

couples de l'eau     $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2 : E_d^\circ = 0,00 \text{ V}$        $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O} : E_e^\circ = 1,23 \text{ V}$

constante de Faraday     $F = 96\,480 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$

#### Produits de solubilité

$\text{Ni(OH)}_2(\text{s}) : \text{p}K_{\text{s}1} = 16$        $\text{Cd(OH)}_2(\text{s}) : \text{p}K_{\text{s}2} = 14$

#### Valeurs thermodynamiques

Produit ionique de l'eau à 25 °C :  $\text{p}K_{\text{e}} = 14$ .

Enthalpies standard de formation à 25 °C :

espèce	$\text{H}_2\text{O}(\ell)$	$\text{Cd(OH)}_2(\text{s})$	$\text{Ni(OH)}_2\text{s}$	$\text{Ni}_2\text{O}_3(\text{s})$
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-285,8	-560,7	-529,7	-489,0

Annexe : diagramme  $E$ -pH du nickel et de l'eau

