

## DS n° 5

## Sujet « facile »

Le sujet comporte trois parties indépendantes.

## Partie I — Un peu d'aviation, beaucoup de physique

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ( $\hat{e}_x$ ) ou d'une flèche dans le cas général ( $\vec{V}$ ). Pour les applications numériques, on utilisera 3 chiffres significatifs.

### Les premiers avions, quelques connaissances de base

Quelle que soit sa forme, un avion est toujours constitué par un ensemble d'éléments correspondant à diverses fonctions : on retiendra principalement les ailes destinées à soutenir l'appareil et l'organe de propulsion qui lui donne la vitesse nécessaire à la sustentation et à la translation. La figure I-1 représente un schéma élémentaire du profil d'une aile d'avion.

Le segment de droite  $\Sigma$  qui joint le bord d'attaque au bord de fuite est appelé corde de profil. L'angle  $\alpha$  entre ce segment et la direction que suit l'avion est appelé incidence. L'air immobile attaqué par une aile se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$  se sépare en deux parties : l'une longue, l'extrados, l'autre l'intrados. Dans le cas d'un mouvement rectiligne et uniforme de l'aile, on peut se placer dans le référentiel de l'aile et considérer que c'est l'air qui se déplace autour de celle-ci.

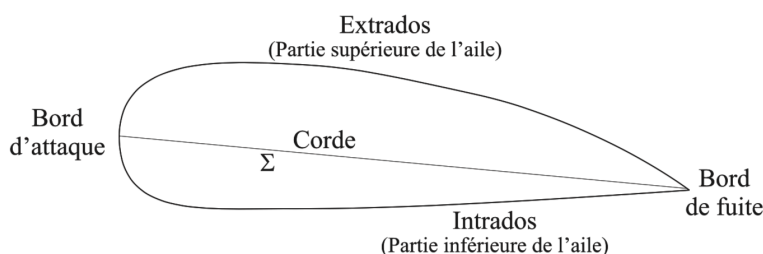


FIGURE I-1 – Profil d'une aile d'avion

L'étude dynamique d'une aile d'avion montre que celle-ci est soumise à deux forces d'origine aérodynamique :

- la traînée  $\vec{F}_t$ , dirigée en sens inverse de la vitesse  $\vec{V}$ . En vol sous incidence nulle ( $\alpha = 0$ ), cette force doit être équilibrée par la force de traction de l'hélice ou des réacteurs ;
- la portance  $\vec{F}_p$  qui équilibre le poids de l'avion.

L'air sera supposé incompressible.

**❑ 1** — La portance est due au fait que le débit d'air est plus important au voisinage de l'extrados qu'au voisinage de l'intrados. Justifier le fait que cette portance s'oppose à l'effet du poids.

Des expériences effectuées notamment en soufflerie montrent que les modules respectifs  $F_t$  et  $F_p$  de la traînée et de la portance peuvent se mettre sous la forme

$$F_t = C_T(\alpha) \frac{\mu V^2}{2} S \quad \text{et} \quad F_p = C_P(\alpha) \frac{\mu V^2}{2} S.$$

La quantité  $S$  représente la surface de la projection des ailes sur le plan perpendiculaire à la corde. Les coefficients de traînée  $C_T(\alpha)$  et de portance  $C_P(\alpha)$  dépendent de l'angle d'incidence et  $\mu = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  représente la masse volumique de l'air.

On considère un avion de masse  $m = 1,80 \times 10^4 \text{ kg}$ , en vol sous incidence nulle ; la projection de ses ailes représente une surface  $S = 50,0 \text{ m}^2$ . Le moteur de cet avion développe une puissance  $\mathcal{P} = 2,70 \text{ MW}$  qui lui permet de se déplacer avec une vitesse de module  $V = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Le champ de gravitation terrestre a pour module  $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  dans toutes les régions considérées.

**❑ 2** — Déterminer l'expression du coefficient de portance en vol sous incidence nulle  $C_P(0)$ . Calculer sa valeur numérique.

**❑ 3** — Déterminer, toujours en vol sous incidence nulle, l'expression de la traînée  $F_t$  due aux ailes sachant que la traînée totale de l'avion est due pour les deux tiers aux ailes. En déduire la valeur numérique du coefficient  $C_T(0)$  associé.

On se propose maintenant de calculer les expressions de  $C_T(\alpha)$  et  $C_P(\alpha)$  dans le cas d'une aile rectangulaire qui se déplace à la vitesse constante  $\vec{V} = -V\hat{e}_x$ . On travaillera dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen, associé au repère  $(0; \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$  lié à l'aile et représenté sur la figure I-2; dans celui-ci l'air semble provenir de l'infini avec la vitesse  $\vec{V} = V\hat{e}_x$ . La largeur de l'aile est notée  $\ell$ , sa longueur, étendue selon  $\hat{e}_z$  est notée  $L$  et son épaisseur est supposée négligeable.

On adoptera les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le fluide est dévié de manière uniforme sur une hauteur  $h'$ . Après la déviation, il présente une vitesse uniforme  $\vec{V}'$  parallèle à l'aile;
- on néglige les frottements, c'est-à-dire que la force de contact exercée par l'aile sur l'air est normale à sa surface;
- dans les divers bilans, on utilisera le volume de contrôle dont les sections d'entrée  $S$  et de sortie  $S'$  sont des rectangles de largeur  $L$  et de hauteurs respectives  $h$  et  $h'$ . Ces deux sections sont représentées en traits pointillés sur la figure I-2;
- on se place en régime stationnaire.

Ce modèle est très simplifié mais il permet de rendre compte des grandeurs étudiées dans ce problème. Les données proposées ne sont cependant pas suffisantes pour utiliser le théorème de Bernoulli.

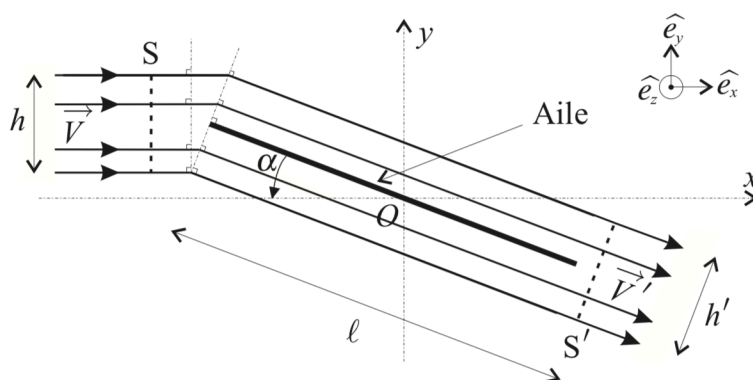


FIGURE I-2 – Vue de profil de la modélisation de l'écoulement

- ❑ 4 — Déterminer le débit massique  $D_m$  de fluide dévié par l'aile. On pourra faire le calcul en entrée de l'aile où le champ des vitesses est connu.
- ❑ 5 — En écrivant la conservation du débit massique entre l'entrée et la sortie de l'aile, exprimer  $V' = \|\vec{V}'\|$  en fonction de  $V$  et  $\alpha$ .
- ❑ 6 — En effectuant un bilan de quantité de mouvement, calculer la force  $\vec{F}_{a/e}$  exercée par l'aile sur l'écoulement.
- ❑ 7 — On admet que la force  $\vec{F}_{e/a}$  exercée par l'écoulement sur l'aile est de la forme

$$\vec{F}_{e/a} = \frac{\mu L \ell V^2}{2} (C_x \hat{e}_x + C_y \hat{e}_y).$$

Déduire de la question 6 les expressions de  $C_x$  et  $C_y$  en fonction de  $\alpha$  et  $\lambda = h/\ell$ .

- ❑ 8 — On appelle polaire de l'aile la courbe représentant  $C_y$  en fonction de  $C_x$ . Déterminer une relation entre  $C_x$ ,  $C_y$  et  $\lambda$ . En déduire la représentation de la polaire de cette aile rectangulaire.

Des essais en soufflerie illustrent deux propriétés importantes des ailes en aéronautique :

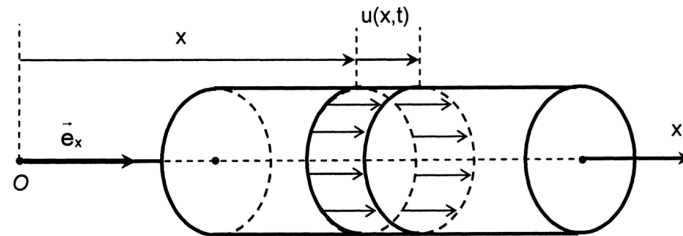
- pour des angles  $\alpha$  petits correspondant à des incidences faibles, le coefficient de portance est une fonction linéaire de  $\alpha$ ;
  - au dessus d'une certaine incidence critique  $\alpha_c$ , la portance est décroissante et provoque un décrochage aérodynamique.
- ❑ 9 — Retrouver ces deux propriétés à partir des expressions de  $C_x$  et  $C_y$  obtenues à la question 7. On déterminera en particulier la valeur de  $\alpha_c$ .
- ❑ 10 — Dans quels domaines d'incidences (proches de  $\alpha_c$  ou petites devant  $\alpha_c$ ) doit-on opérer si l'on veut optimiser la portance tout en réduisant la traînée afin que les ailes ne soient pas soumises à une trop forte résistance de l'air?
- ❑ 11 — Pour procéder à l'atterrissage, l'avion doit perdre de l'altitude. Quels paramètres permettent au pilote de contrôler cette opération? Justifier votre réponse.

## Partie II — Ondes élastiques dans les milieux solides

### 1 — Propagation d'onde longitudinale dans une barre

Un barreau solide est initialement immobile dans un référentiel galiléen d'axe  $Ox$ . Lorsqu'il est au repos, ce barreau est un cylindre homogène d'axe  $Ox$ , taillé dans un matériau de masse volumique  $\rho$ , dont l'aire de chaque section sera notée  $S$ .

Une onde de déformation élastique longitudinale (onde de compression-dilatation) se propage à l'intérieur du barreau dans la direction de  $Ox$ ; cette onde est caractérisée par le champ scalaire des déplacements  $u(x, t)$  tel qu'une section située à l'abscisse  $x$  en l'absence d'onde se déplace à l'abscisse  $x + u(x, t)$  lors du passage de celle-ci.



Dans la limite des petites déformations, la matière située à gauche de la section déplacée en  $x + u(x, t)$  exerce sur celle-ci une force de rappel  $\vec{F}_g$  dont l'expression générale est

$$\vec{F}_g = -E \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) S \vec{e}_x,$$

où  $E$  désigne le module de Young. De même, la matière située à droite de la section exerce sur celle-ci une force  $\vec{F}_d$ .

□ 1 — Établir la dimension de  $E$  et justifier que  $\vec{F}_d = -\vec{F}_g$ .

En l'absence d'onde, une tranche élémentaire de barreau située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  possède un volume  $dV = S dx$ . Lors du passage de l'onde, son volume devient  $dV'$ . La dilatation volumique  $\delta$  de cette tranche est définie par  $\delta = \frac{dV' - dV}{dV}$ .

□ 2 — Expliciter la relation entre  $\delta$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ .

□ 3 — En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cette tranche, montrer que dans la limite des petits déplacements,  $u(x, t)$  satisfait à une équation de d'Alembert de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Exprimer la célérité  $C$  en fonction du module de Young  $E$  et de la masse volumique  $\rho$  du matériau.

### 2 — Liaison inter-atomique et module de Young

Au sein d'un réseau cristallin métallique, l'énergie potentielle d'interaction de deux atomes  $A$  et  $B$  distants de  $r$  peut s'écrire

$$E_p = -\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^{10}},$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes positives. La force exercée par  $A$  sur  $B$  est de la forme  $\vec{F}_{A/B} = F(r) \vec{u}$ , où désigne le vecteur unitaire directeur de la droite  $(AB)$  dirigé de  $A$  vers  $B$ .

□ 4 — Déterminer l'expression de  $F(r)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $r$ . La distance d'équilibre entre deux atomes étant  $r_0$ , en déduire une relation entre  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $r_0$ .

□ 5 — Calculer les valeurs numériques de  $\mu$  (exprimé en  $\text{eV} \cdot \text{nm}^{10}$ ) et de  $E_p(r_0)$  (exprimé en eV) dans le cas précis du tungstène, métal pour lequel  $r_0 = 0,274 \text{ nm}$  et  $\lambda = 0,37 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$ . On rappelle que  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Quel sens concret peut-on donner à  $E_p(r_0)$ ?

□ 6 — Tracer l'allure de la courbe  $E_p(r)$  en indiquant ses points remarquables.

Dans quels domaines de  $r$  la force entre les deux atomes est-elle attractive ou répulsive?

□ 7 — En effectuant un développement limité de  $F(r)$ , montrer que pour de petits déplacements autour de la position d'équilibre  $r_0$ , la force d'interaction  $F(r)$  est équivalente à celle d'un ressort dont on explicitera la raideur  $K$  en fonction de  $\lambda$  et  $r_0$ .

Calculer  $K$  (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) pour le tungstène.

Le tungstène cristallise dans un système cubique centré. La maille est un cube d'arête  $a$  dont les atomes occupent tous les sommets ainsi que le centre. Dans cette structure, chaque atome  $A$  possède huit plus proches voisins, tous situés à une même distance  $r_0$  de  $A$ ,  $r_0$  étant la distance d'équilibre introduite à la question 4

□ 8 — Établir la relation entre  $r_0$  et  $a$ , puis calculer  $a$  (en nm).

□ 9 — Quel est le nombre d'atomes par maille cubique? Donner l'expression de la masse volumique  $\rho$  de ce métal en fonction de la masse  $m$  d'un atome et de  $a$ .

Une étude approfondie de la propagation des ondes élastiques longitudinales dans ce milieu tridimensionnel montre que, dans l'hypothèse des interactions limitées aux atomes les plus proches voisins, et dans la limite des grandes longueurs d'onde, la célérité est donnée par

$$C = \sqrt{\frac{K}{3m}} a,$$

où  $K$  est la raideur du ressort, calculée en à la question 7.

En comparant cette expression aux résultats obtenus dans la partie 1, il est possible de relier le module de Young  $E$  aux paramètres microscopiques du métal.

□ 10 — Exprimer le module de Young  $E$ , d'abord en fonction de  $K$ ,  $a$  et  $m$ , puis en fonction de  $\lambda$  et  $r_0$ .

□ 11 — Calculer le module de Young du tungstène à l'aide des données numériques précédemment fournies.

### 3 — Étude des ondes sismiques terrestres

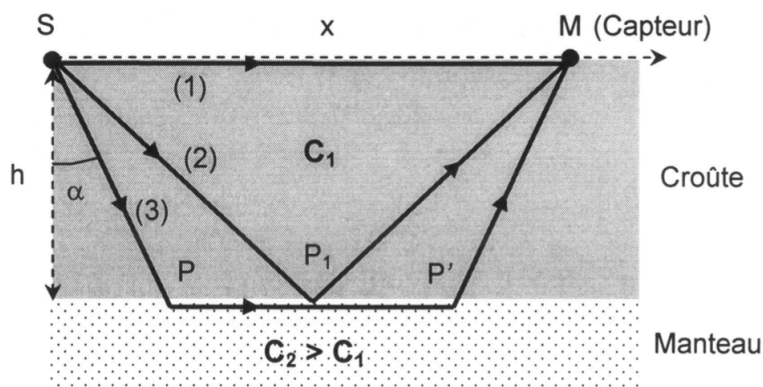
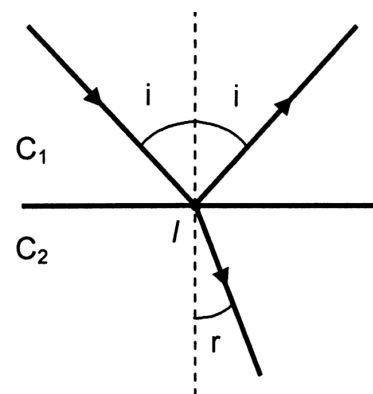
Les ondes sismiques sont des ondes de déformation élastiques qui se propagent à l'intérieur du globe terrestre (ondes de volume) ou en surface (ondes de Love et de Rayleigh). Ces ondes peuvent être longitudinales ou transversales; dans ce dernier cas, il s'agit d'ondes de cisaillement.

Nous allons étudier dans cette partie un type particulier d'ondes de volume longitudinales : les ondes P (primaires). La propagation de ces ondes dans la Terre peut être décrite au moyen d'une analogie avec l'optique géométrique : l'onde se propage le long de « rayons sismiques » avec une célérité  $C$ . Dans un milieu homogène, les rayons sismiques sont des segments de droite. À l'interface entre deux milieux, il y a réflexions et réfraction du rayon incident, selon les lois de Snell-Descartes, notamment :

— l'angle entre le rayon réfléchi et la normale au dioptre est égal à l'angle d'incidence;

— les angles d'incidence  $i$  et de réfraction  $r$  vérifient  $\frac{\sin i}{C_1} = \frac{\sin r}{C_2}$ .

Nous effectuons une étude locale, dans laquelle la courbure de la Terre est négligée. Le sol est divisé en deux couches homogènes : la croûte terrestre d'épaisseur  $h$ , dans laquelle la célérité des ondes est  $C_1$ , et le manteau à l'intérieur duquel leur célérité vaut  $C_2 > C_1$ . Une explosion a lieu en un point  $S$  proche de la surface et les ondes produites sont détectées par un capteur lui aussi en surface, placé en  $M$ , à une distance  $x$  de  $S$ . Le capteur reçoit trois ondes, qui sont représentées sur la figure suivante.



□ 12 — L'onde qui se propage parallèlement à la surface est l'onde directe. Déterminer son temps de propagation  $\tau_1$  en fonction de  $C_1$  et  $x$ .

□ 13 — Le capteur reçoit une deuxième onde qui est réfléchiée en  $P_1$  sur la surface de séparation entre la croûte terrestre et le manteau. Exprimer son temps de propagation  $\tau_2$  en fonction de  $C_1$ ,  $x$  et  $h$ .

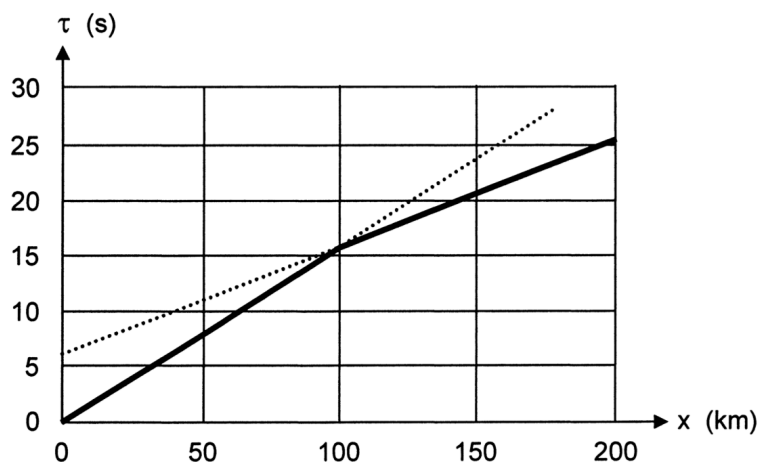
□ 14 — Une troisième onde peut se propager jusqu'au capteur après s'être réfractée en  $P$  dans le manteau, puis être ressortie en  $P'$ . Quel doit être l'angle d'émission  $\alpha$  pour que l'onde réfractée se propage le long de l'interface plane (trajet  $PP'$ ) ?

Montrer que cette onde ne peut être détectée que si  $x$  est supérieure à une distance minimale  $x_m$  que l'on exprimera en fonction de  $h$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

□ 15 — Établir le temps de propagation  $\tau_3$  de cette troisième onde en fonction de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $x$  et  $h$  pour  $x > x_m$ .

□ 16 — Tracer sur un même graphe les allures des temps de propagations  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  en fonction de la distance  $x$ .

Les courbes ainsi obtenues sont appelées hodochrones. Les géophysiciens les utilisent pour obtenir des informations sur l'épaisseur de la croûte terrestre et le manteau. En disposant plusieurs capteurs à différentes distances  $x$  du lieu de l'explosion et en mesurant le temps de propagation de l'onde qui arrive la première, on obtient la courbe représentée ci-après.



□ 17 — Dédurre de la figure les vitesses de propagation  $C_1$  et  $C_2$  puis, en considérant l'intersection des deux courbes, évaluer l'épaisseur  $h$  de la croûte terrestre.

□ 18 — Déterminer une nouvelle valeur numérique de  $h$  en exploitant la prolongation de la deuxième courbe jusqu'en  $x = 0$ .

Que pensez-vous de la précision des mesures ?

### Partie III — Accumulateur au plomb

Mise au point par le Français Gaston Planté en 1859, la batterie au plomb est encore aujourd'hui très compétitive et reste la principale technologie utilisée dans les véhicules thermiques. En effet, elle est capable de fournir un courant crête de grande intensité, nécessaire pour le démarrage électrique des moteurs à combustion interne.

#### 1 — Composition de l'atome de plomb

□ 1 — Préciser la composition du noyau de l'atome de plomb  $^{207}_{82}\text{Pb}$ .

#### 2 — Diagramme potentiel-pH du plomb

Le diagramme potentiel-pH simplifié du plomb, tracé pour une concentration égale à  $10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , pour toute espèce soluble contenant du plomb, est représenté figure III-1. Les espèces prises en compte sont  $\text{Pb}^{2+}(\text{aq})$ ,  $\text{PbO}_2(\text{s})$ ,  $\text{PbO}(\text{s})$ ,  $\text{HPbO}_2^-(\text{aq})$ ,  $\text{Pb}(\text{s})$  et  $\text{Pb}_3\text{O}_4(\text{s})$ .

□ 2 — Déterminer les nombres d'oxydation de l'élément plomb dans chacune des espèces considérées, puis reproduire sur votre copie le diagramme  $E$ -pH du plomb en associant une espèce à chacun des domaines d'existence ou de prédominance.

Le nombre d'oxydation du plomb dans l'espèce  $\text{Pb}_3\text{O}_4(\text{s})$  est-il compatible avec la quantification de la charge ? Proposer une explication.

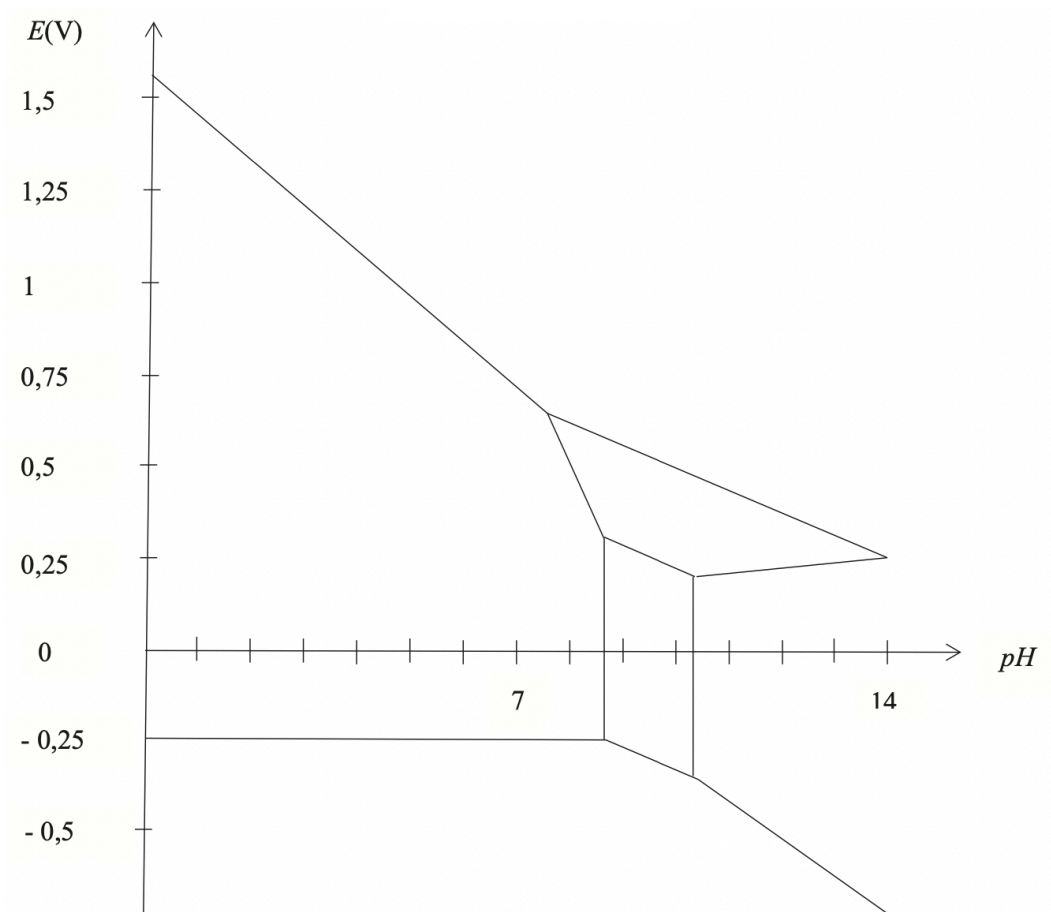


FIGURE III-1 – Diagramme  $E$ -pH du plomb

□ 3 — Écrire les demi-équations rédox dans lesquelles interviennent les deux couples de l'eau. En supposant toutes les pressions partielles égales à la pression standard  $P^\circ = 1$  bar, préciser les équations des droites associées au diagramme  $E$ -pH de l'eau.

□ 4 — Superposer le diagramme  $E$ -pH de l'eau au diagramme  $E$ -pH du plomb. Le plomb est-il stable en solution acide? En solution basique? Si non, écrire la ou les équations de la ou des réactions chimiques qui se produisent.

### 3 — Solubilité du sulfate de plomb dans une solution d'acide sulfurique

□ 5 — Déterminer, en faisant la ou les approximations qui s'imposent, la solubilité  $s$  du sulfate de plomb dans une solution d'acide sulfurique à  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Conclure.

### 4 — Accumulateur au plomb en fonctionnement générateur

Les couples rédox qui interviennent dans l'accumulateur au plomb (schéma figure III-2) sont  $\text{PbO}_2(\text{s})/\text{PbSO}_4(\text{s})$  et  $\text{PbSO}_4(\text{s})/\text{Pb}(\text{s})$ .

□ 6 — Écrire les deux demi-réactions chimiques, en fonctionnement générateur, en précisant celle qui a lieu à l'anode et celle qui a lieu à la cathode. En déduire la réaction globale de fonctionnement de l'accumulateur.

□ 7 — La tension ou force électromotrice d'un accumulateur au plomb dépend-elle du pH? Si oui, est-il préférable d'utiliser dans l'accumulateur au plomb de l'acide sulfurique très concentré ou non?

### 5 — Masse d'une batterie au plomb

On désire réaliser une batterie au plomb dont la tension à vide  $U_0$  est supérieure à 12 V et dont la capacité  $Q$  est supérieure à  $50 \text{ A} \cdot \text{h}$ .

On donne sur la figure III-3 les courbes intensité-potentiel d'un élément de la batterie utilisé en mode décharge.

□ 8 — Quelle(s) grandeur(s) électrique(s) de la batterie est (sont) modifiée(s) par la mise en série de plusieurs éléments? Quelle(s) grandeur(s) électrique(s) de la batterie est (sont) modifiée(s) par la mise en parallèle de plusieurs éléments?

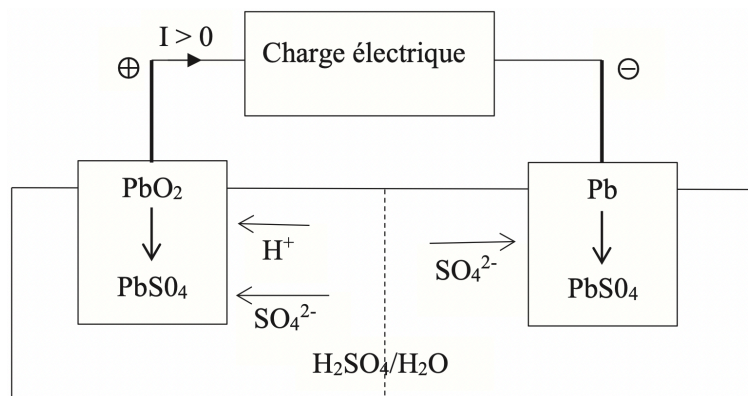


FIGURE III-2 – Accumulateur au plomb

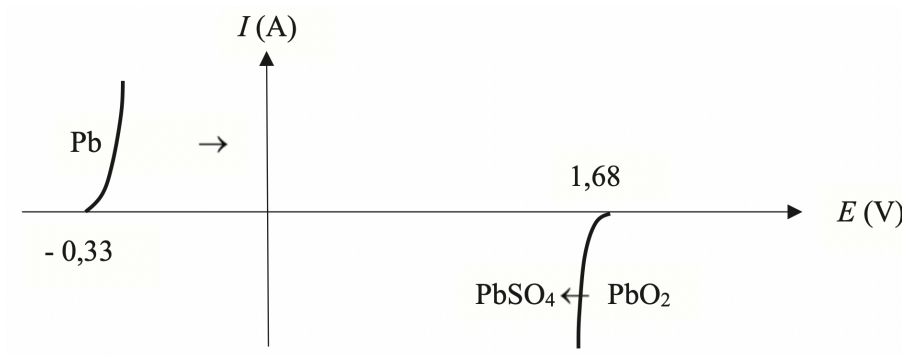


FIGURE III-3 – Courbes intensité-potentiel

□ 9 — Combien faut-il associer d'éléments, en série, pour satisfaire le cahier des charges?

□ 10 — Exprimer la masse totale en plomb pur, solide, contenue dans la batterie en fonction de la capacité  $Q$  de la batterie, de la constante  $F$  de Faraday et de la masse molaire  $M(\text{Pb})$  du plomb.

### Données

Les données thermodynamiques sont à 298 K.

L'acide sulfurique  $\text{H}_2\text{SO}_4$  est un diacide dont les deux acidités sont considérées comme fortes; il s'ionise donc deux fois totalement en solution aqueuse.

Produit de solubilité de  $\text{PbSO}_4(\text{s})$  :  $K_s = 1,6 \times 10^{-8}$

Masse molaire du plomb :  $M(\text{Pb}) = 207 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Potentiels rédox :

$$E^\circ(\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})) = 0,00 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq})/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}(\text{aq})) = 0,09 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{I}_2(\text{aq})/\text{I}^-(\text{g})) = 0,62 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{O}_2(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}(\text{aq})/\text{Cr}^{3+}(\text{aq})) = 1,33 \text{ V}$$

$$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 \text{ V/unité de pH.}$$