TD ondes n° 4 — Ondes acoustiques

1 — Ordres de grandeur [*]

On considère une source sonore émettant une onde plane harmonique d'intensité 60 dB, de fréquence $f = 1$ kHz, dans l'air à la température $T_0 = 20$ °C. Calculer numériquement :
— l'amplitude de la pression acoustique p_m ;
— l'amplitude de la vitesse particulaire v_m ;
— l'amplitude du déplacement particulaire ξ_m ;
— l'écart de température $\Delta T = T_m - T_0$.

2 — Linéarisation [*]

On considère une onde acoustique décrite par le champ des vitesses

$$\vec{v}_1 = v_1(x,t)\,\vec{e}_x = U_1 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_x.$$

1. Qualifier cette onde le plus précisément possible.

2. Rappeler l'expression de l'accélération d'une particule de fluide, $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$.

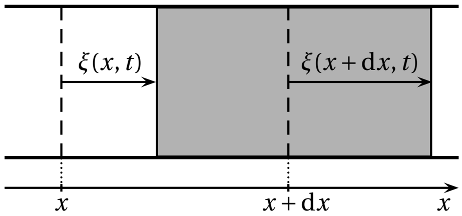
3. Donner l'ordre de grandeur du terme local en fonction de U_1 et ω.

4. Donner l'ordre de grandeur du terme convectif en fonction de k et U_1.

5. Comparer ces deux termes dans le cadre de l'approximation acoustique où $|v_1| \ll c$.

3 — Onde sonore dans un gaz [*]

On veut établir l'équation de propagation des ondes sonores dans un tuyau par un raisonnement lagrangien, c'est-à-dire en suivant une particule de fluide, qui est par construction un système fermé, dans son mouvement.
Le tuyau, de section S constante, contient un fluide homogène au repos en l'absence d'onde. La pression du fluide vaut alors P_0, sa masse volumique μ_0 et sa température T_0.
Les effets de la pesanteur et les causes d'amortissement ne sont pas pris en compte.
Le système fermé étudié est une tranche de fluide d'épaisseur dx au repos, comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. En présence de l'onde acoustique, $\xi(x,t)$, appelé déplacement acoustique, représente le déplacement de la face de la particule de fluide par rapport à son abscisse x lorsque le fluide n'est pas perturbé. Quand le fluide est perturbé par l'onde sonore, la particule de fluide se trouve donc entre les abscisses $x + \xi(x,t)$ et $x + \mathrm{d}x + \xi(x+\mathrm{d}x, t)$.
On note $p(x,t) = P(x,t) - P_0$ la pression acoustique et $\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$ la masse volumique.



1. Commenter sans la justifier l'hypothèse $\left|\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right| \ll 1$, dite de l'« approximation acoustique », retenue dans tout ce problème : tout terme d'ordre supérieur ou égal à 2 en $\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$ sera négligé.

2. En exprimant la conservation de la masse de la tranche de fluide, exprimer $\mu_1(x,t)$ en fonction de μ_0 et $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$.

3. Traduire, au même ordre, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la tranche de fluide et en déduire la relation liant $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ à $\dfrac{\partial p}{\partial x}$.

Il faut faire une hypothèse supplémentaire sur la nature de la transformation subie par le fluide, que nous supposerons être un gaz parfait de masse molaire M, de constante γ, à la température T_0 au repos.

4. L'évolution de la tranche de fluide est supposée isotherme.
En déduire une relation entre p et μ_1.
Montrer alors que ξ vérifie l'équation de d'Alembert, et exprimer la célérité c_T de l'onde sonore en fonction de T_0 et des constantes caractéristiques du gaz.

5. L'évolution de la tranche de fluide est supposée adiabatique réversible.
Montrer que ξ vérifie l'équation de d'Alembert, et exprimer la célérité c de l'onde sonore en fonction de T_0 et des constantes caractéristiques du gaz.

6. Calculer la célérité des ondes sonores pour l'air de masse molaire $M = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ avec ces deux modèles. On donne $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ et $\gamma = 1{,}4$. On prendra $T_0 = 293$ K.
Quelle est l'hypothèse à retenir ?

4 — Trompette [*]

On considère un instrument de musique de type trompette, modélisé par un tuyau de longueur L et de diamètre d.

1. On donne $p_1(L,t) = 0$. Pourquoi ?

2. On donne $p_1(0,t) = p_0 \cos(\omega t)$. Résoudre l'équation de d'Alembert.

3. Le spectre du son est constitué des fréquences 250 Hz, 500 Hz et 1000 Hz. Déterminer la longueur L de l'instrument. Le modèle linéaire est-il cohérent ?

4. Le vecteur densité de courant énergétique $\vec{\Pi}$ est-il égal à $p_1(x,t)\vec{v}_1(x,t)$ ou a $P_0\vec{v}_1(x,t)$, où P_0 est la pression atmosphérique ? Calculer $\vec{\Pi}$ en $x = L$. Commenter.

5 — Isotherme ou adiabatique ? [**]

On considère une onde acoustique se propageant dans un fluide assimilé à un gaz parfait de masse molaire M. L'évolution du fluide est considérée comme isotherme, à la température T_0.

1. Comment faut-il modifier les équations de l'acoustique linéaire pour prendre en compte l'évolution isotherme du fluide ?

2. Établir l'équation d'onde vérifiée par la surpression p_1, et en déduire l'expression de la célérité c_T des ondes.

3. Calculer c_T dans le cas de l'air, de masse molaire $M = 29\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, à la température $T_0 = 300$ K. On donne $R = 8{,}314\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

Le coefficient de diffusivité thermique du milieu est D_{th}.

4. Quelle est la longueur caractéristique des variations spatiales des champs dues à une onde acoustique de fréquence f ?

5. Montrer que la diffusion thermique est négligeable si la fréquence vérifie une condition à expliciter.
On donne $c = 340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $D_{\mathrm{th}} = 2\times 10^{-5}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ pour l'air ; discuter de l'hypothèse.

6 — Onde dans un tuyau élastique [**]

On considère un tuyau cylindrique souple, contenant un fluide homogène. Une onde acoustique se propage dans ce fluide.
On note $\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$ la masse volumique ; $p(x,t) = P_0 + p_1(x,t)$ la pression, $\vec{v}(x,t) = v_1(x,t)\vec{e}_x$ la vitesse des particules de fluide, et $S(x,t) = S_0 + S_1(x,t)$ la section du tuyau.
On se place dans la cadre de l'approximation acoustique.
L'élasticité du tuyau est décrite par son coefficient de distensibilité $D = \dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}P}$.
On note χ_S le coefficient de compressibilité isentropique du fluide.

1. En effectuant un bilan de masse sur une tranche comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$, établir la relation

$$\boxed{\mu_0\frac{\partial S_1}{\partial t} + S_0\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 S_0\frac{\partial v_1}{\partial x}}\,.$$

2. Montrer que la surpression acoustique vérifie l'équation de d'Alembert, et exprimer la célérité c en fonction des données.

3. Calculer la célérité des ondes dans un tuyau métallique ($D_{\mathrm{m}} = 10^{-11}\ \mathrm{Pa^{-1}}$), puis dans un tuyau élastique ($D_{\mathrm{él}} = 4\times 10^{-5}\ \mathrm{Pa^{-1}}$). Commenter.
Le fluide est de l'eau, pour lequel $\mu_0 = 1\times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $\chi_S = 5{,}1\times 10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$.
La section du tuyau est $S_0 = 7{,}35\times 10^{-2}\ \mathrm{m^{-2}}$.

7 — Flûte traversière [**]

Une flûte traversière est modélisée par un tuyau de section S constante et de longueur ℓ ouvert à ses deux extrémités. Lorsque le musicien souffle dans l'embouchure latérale de la flûte, les vibrations produites excitent une onde stationnaire harmonique décrite par la surpression acoustique

$$p(x,t) = P_{\mathrm{a}}\cos(\omega t)\cos(kx+\alpha)\,.$$

1. Quelles sont les conditions aux limites aux deux extrémités ? Pourquoi modéliser l'onde sonore par une onde stationnaire ?

2. Déterminer complètement l'onde de pression ainsi que les fréquences des sons pouvant être joués par cette flûte.

3. La flûte émet un *do* à 264 Hz quand tous ses trous sont bouchés, à une température de 20 °C. Quelle est la longueur de la flûte, sachant que seul le fondamental est excité ?

4. Quelle est la fréquence du son émis à une température de 10 °C, tous les trous étant bouchés ?

5. Où se trouve le trou qu'on doit déboucher pour jouer un *ré* à 294 Hz, à une température de 20 °C ?

6. Déterminer le champ des vitesses dans le tuyau ainsi que le vecteur densité de courant énergétique acoustique moyen.

8 — Clarinette [**]

On considère une clarinette comme étant un tube de longueur L et de section S. Son extrémité en $x = 0$ est fermée et on impose une pression P_0 en $x = L$. Au repos, la pression dans le tube est P_0, la masse volumique μ_0 et on note c la célérité d'une onde sonore dans l'air.
Le musicien lance une onde sonore dans le tube en $x = 0$:

$$P(x,t) = P_0\cos(\omega t)\cos(kx)\,.$$

1. Justifier la forme de cette onde.

2. Déterminer l'expression de l'onde de vitesse dans le tube.

3. Lister les conditions aux limites.

4. Quels sont les pulsations ω possibles dans ce tube ?

5. La pulsation du fondamental pour une flûte est $c\pi/L$. Comparer le hauteur du son d'une flûte et d'une clarinette de même longueur.

6. Déterminer la hauteur du son émis par une clarinette de longueur 65 cm dont tous les trous sont bouchés à l'exception du trou central.

7. Quelle est cette note? Qu'est-ce que le timbre?

9 — Bruit d'explosion [**]

1. Une explosion retentit et est entendue par un observateur à une distance D à l'horizontale. On considère la température constante égale à T_0. Calculer la durée τ_h que met l'onde à parcourir cette distance.

2. L'observateur se situe maintenant à la verticale à une même distance D. La température évolue selon la loi $T(z) = T_0 - Bz$. Déterminer la durée correspondante τ_v.

3. À partir de quelle distance D l'écart relatif entre τ_h et τ_v est-il supérieur à 1 %?

Données

L'air est supposé parfait diatomique avec $\gamma = 1{,}40$, de masse molaire $M = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.
$T_0 = 288$ K.
$B = 5\times10^{-3}\ \text{K}\cdot\text{m}^{-1}$.

10 — Diapason [**]

Un diapason est un instrument en forme de U, qui produit une note dans la hauteur sert de référence, le *la* à 440 Hz. La caisse de résonance du diapason est une boîte en bois parallélépipédique creuse dont l'un des côtés est ouvert. Lorsque le diapason est encastré sur sa caisse, on entend un *la* très pur et puissant.

1. Pourquoi la longueur de la boîte, entre l'extrémité ouverte et l'extrémité fermée, est-elle d'environ 19 cm?

2. Le *la* se fait-il entendre plus ou moins longtemps avec la caisse que sans?

3. Estimer la célérité des ondes dans le diapason.

11 — Puissance sonore du violon [**]

1. On considère un violon avec une corde de longueur ℓ, fixée à ses deux extrémités, selon l'axe (Ox). Un musicien pince la corde donnant naissance à une onde de célérité c. Donner l'équation vérifiée par l'élongation $y(x,t)$, ainsi que la relation liant la fréquence et le mode.

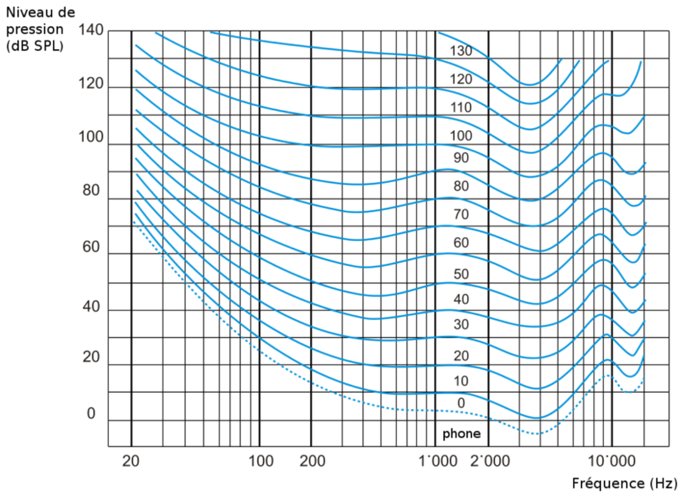
2. On donne $\ell = 33$ cm. Un musicien pince la corde en son centre. Quelle est la fréquence du son émis? Quel est l'utilité d'un archet?

3. Le niveau d'intensité sonore est défini par

$$L(\text{dB}) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

où $I_0 = 1{,}2\times10^{-12}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ est le seuil d'audibilité, ou seuil de perception. À $a = 1{,}0$ m du violon, on mesure $L = 70$ dB. Jusqu'à quelle distance d peut-on entendre le violon? Utiliser les approximations qui vous semblent pertinentes.

La figure suivante représente les courbes d'égale sensation auditive (isosonies).



12 — Fréquences propres d'une sphère rigide [***]

On cherche à étudier les modes propres de vibration à l'intérieur d'une sphère rigide de rayon R. On écrit la surpression sous la forme

$$\underline{p}(r,t) = \frac{A}{r}\,\text{e}^{\text{i}(\omega t - kr)} + \frac{B}{r}\,\text{e}^{\text{i}(\omega t + kr)}.$$

1. Justifier cette expression et écrire le champ des vitesses.

2. En notant D_v le débit volumique à travers une sphère de rayon r, que peut-on dire de $\lim_{r\to 0} D_v$? Quelles sont les conditions aux limites ? Déterminer l'équation vérifiée par les fréquences propres.

3. Donner une valeur numérique approchée de la plus basse de ces fréquences. Effectuer l'application numérique pour $R = 5{,}0$ cm.

13 — Sphère pulsante et impédance de rayonnement [***]

Une sphère de centre fixe O dont le rayon

$$a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$$

varie sinusoïdalement avec une amplitude $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$ émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique ρ_0 où la célérité des ondes sonores vaut c. Compte tenu de la symétrie sphérique du problème, on cherche pur les ondes de pression et de. vitesse des solutions de la forme $P_1(r,t)$ et $v_1(r,t)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques. Le laplacien d'un champ scalaire $f(r,t)$ s'écrit

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}.$$

1. Déterminer la forme générale des solutions $P_1(r,t)$ de l'équation de d'Alembert et interpréter.

Dans tout le suite, on ne conserve que la solution

$$P_1(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Justifier ce choix.

2. Dans toute la suite, on cherche une solution sinusoïdale de la forme

$$P_1(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr - \alpha).$$

Que vaut k ?

Déterminer le champ des vitesses correspondant en tout point.

Que devient-il dans la « zone de rayonnement », i.e. pour $r \gg \lambda$?

Quelle est alors localement la structure de l'onde ?

Que vaut le rapport $\dfrac{P_1(r,t)}{v_1(r,t)}$ dans ce domaine ?

3. Déterminer A et α en fonction des données du problème en examinant le champ des vitesses au voisinage de la sphère (zone de « champ proche »).

4. Calculer la puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace par la sphère.

On modélise l'extrémité ouverte d'un tuyau cylindrique de rayon a_0 (d'une flûte par exemple) par la sphère pulsante précédente, et on cherche à interpréter la condition aux limites usuelle que l'on écrit à la sortie d'un tel tuyau : « nœud de pression, ventre de vitesse ».

5. Exprimer le rapport complexe $\dfrac{\underline{P}_1(r,t)}{\underline{v}_1(r,t)}$ dans le cas de la sphère pulsante à une distance r quelconque, en fonction de ρ_0, c, ω et r.

6. En déduire que l'« impédance de rayonnement » du tuyau sonore, définie en $r = a_0$, vaut sensiblement

$$\underline{Z}_{\text{ray}} \approx \rho_0 c\left[\left(\frac{\omega a_0}{c}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega a_0}{c}\right].$$

On justifiera quantitativement l'approximation faite.

7. Interpréter la condition aux limites usuelles que l'on écrit à la sortie d'un tel tuyau : « nœud de pression, ventre de vitesse ».

14 — Accordons-nous [***]

Imaginez vous un concert, salle Pleyel ; il fait chaud et au bout d'un moment les instruments sont moins performants.
La température augmente de 5 °C, de combien de 1/2 tons est désaccordé le *la* d'un instrument à vent ?

15 — Hautbois [***]

Un hautbois est modélisé par un tuyau conique de sommet O, d'axe de symétrie Ox, de longueur ℓ et d'angle au sommet α. L'extrémité du cône est ouverte sur l'atmosphère. On suppose que l'onde sonore régnant dans le hautbois est caractérisée par une surpression acoustique $p_1(x,t)$, une fluctuation de masse volumique $\mu 1(x,t)$ et un champ de vitesse $\vec{v}(x,t)$. On note $S(x)$ la section du tuyau conique à l'abscisse x.

1. En effectuant un bilan de masse sur une tranche de cône comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, montrer qu'à l'ordre 1 on a

$$S\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial (S v_1)}{\partial x} = 0.$$

2. En déduire que l'équation de propagation régissant la surpression acoustique s'écrit

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{c^2}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p_1}{\partial x}\right).$$

3. Que vaut $S(x)$? En déduire que

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{c^2}{x}\frac{\partial^2 (x p_1)}{\partial x^2}.$$

4. On cherche une solution de la forme

$$p_1(x,t) = \frac{f(x)}{x}\cos\omega t.$$

Déterminer complètement le champ de surpression acoustique $p_1(x,t)$. Quelles sont les fréquences propres d'un hautbois de longueur ℓ ?