

TD ondes n° 4

Ondes acoustiques

1 — Ordres de grandeur

Un niveau acoustique de 60 dB correspond à une intensité $I = I_0 \times 10^6 = 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Avec

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{\langle p_1^2 \rangle}{\mu_0 c} = \frac{p_m^2}{2\mu_0 c},$$

on en déduit $p_m = \sqrt{2\mu_0 c I}$.

D'après l'équation d'état du gaz parfait, on a

$$\mu_0 = \frac{MP_0}{RT_0} = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

et

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

d'où $\mu_0 c = 408 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

On en déduit $p_m = 2,9 \times 10^{-2} \text{ Pa}$.

L'amplitude de la vitesse se déduit de $v_m = \frac{p_m}{\mu_0 c}$, soit

$$v_m = 7,0 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pour un signal sinusoïdal de fréquence f , on a $v_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}$,

la vitesse vaut $v_m = \omega \xi_m = 2\pi f \xi_m$, d'où $\xi_m = 11 \text{ nm}$.

Pour une évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait, la température et la pression vérifient la loi de Laplace $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$, soit en différentielle logarithmique

$$(1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0.$$

Les variations de pression et de température étant très faibles, nous les assimilons aux différentielles; d'où

$$\Delta T = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_0}{P_0} \Delta P.$$

Comme en amplitude $\Delta P = p_m$, on a $\Delta T = 2,4 \times 10^{-5} \text{ K}$

On vérifie que $p_m \ll P_0$ et $\Delta T \ll T_0$, ainsi que $v_m \ll c$ et $\xi_m \ll \lambda$ où la longueur d'onde est $\lambda = c/f = 0,34 \text{ m}$. On est tout à fait dans le cadre de l'approximation acoustique.

2 — Linéarisation

[*]

On considère une onde acoustique décrite par le champ des vitesses

$$\vec{v}_1 = v_1(x, t) \vec{e}_x = U_1 \cos(\omega t - kx).$$

1. C'est une onde plane progressive harmonique (OPPH) dans le sens des x croissants.

[*] 2. L'accélération d'une particule de fluide s'écrit

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}.$$

3. Le terme local a pour ordre de grandeur

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} \approx \omega U_1.$$

4. On a $\frac{\partial v_1}{\partial x} = k V_1 \sin(\omega t - kx) \approx k U_1$ en ordre de grandeur, donc le terme convectif a pour ordre de grandeur

$$\|(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}\| \approx k U_1^2.$$

5. On peut écrire

$$\frac{\|(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\frac{\partial v_1}{\partial t}} \approx \frac{\omega U_1}{k U_1^2} = \frac{c}{U_1} \ll 1$$

dans le cadre de l'approximation acoustique ($|v_1| \ll c$).

On peut alors écrire $\vec{a} \approx \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$ (linéarisation).

3 — Onde sonore dans un gaz

[*]

1. Le déplacement de la tranche de fluide est, en pratique, très inférieur à la longueur d'onde d'une onde sonore harmonique se propageant dans le tuyau : $|\xi| \ll \lambda$. On a donc $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\xi}{x} \right| \ll 1$.

2. La masse de la tranche de fluide au repos est $dm = \mu_0 S dx$. La conservation de sa masse s'écrit :

$$\begin{aligned} \mu_0 S dx &= \mu S [dx + \xi(x+dx, t) - \xi(x, t)] \\ &\approx \mu S \left[dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right] \end{aligned}$$

avec $\mu = \mu_0 + \mu_1$, soit :

$$\mu_0 = (\mu_0 + \mu_1) \left[1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \approx \mu_0 + \mu_1 + \mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

en négligeant le terme du second ordre. On a donc :

$$\mu_1 = -\mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

3. Appliquons le principe de la dynamique à la tranche de masse $dm = \mu_0 S dx$:

$$\mu_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = [P(x) - P(x+dx, t)] S$$

au premier ordre, soit avec $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$:

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

4. Pour le fluide au repos, l'équation d'état s'écrit

$$P_0 = \frac{RT_0}{M} \mu_0.$$

Pour le fluide perturbé, elle s'écrit

$$P_0 + p(x, t) = \frac{RT_0}{M} (\mu_0 + \mu_1(x, t)),$$

d'où :

$$p = \frac{RT_0}{M} \mu_1.$$

On a donc :

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{RT_0}{M} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} = \mu_0 \frac{RT_0}{M} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_T = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}.$$

5. Un gaz parfait subissant une évolution adiabatique réversible obéit à la loi de Laplace $P\mu^{-\gamma} = \text{cte}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} P_0 \mu_0^{-\gamma} &= (P_0 + p)(\mu_0 + \mu_1)^{-\gamma} \\ &= P_0 \mu_0^{-\gamma} \left(1 + \frac{p}{P_0}\right) \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{-\gamma} \end{aligned}$$

soit :

$$1 = \left(1 + \frac{p}{P_0}\right) \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{-\gamma} \approx \left(1 + \frac{p}{P_0}\right) \left(1 - \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0}\right).$$

En se limitant au premier ordre, on a donc :

$$p = -\frac{\gamma P_0}{\mu_0} \mu_1 = -\frac{\gamma RT_0}{M} \mu_1.$$

On en déduit donc comme précédemment

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}.$$

6. On calcule $c_T = 290 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La seconde valeur est en accord avec l'expérience, et c'est l'hypothèse d'adiabaticité qui est à retenir.

5 — Isotherme ou adiabatique? [**]

1. L'équation d'Euler et l'équation de conservation de la masse ne dépendent pas de la nature de l'évolution du fluide; elles sont inchangées :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0.$$

L'évolution du fluide n'étant plus adiabatique, il est évidemment exclu d'utiliser la relation traduisant l'adiabaticité de cette évolution. Il faut utiliser le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T.$$

En suivant le même raisonnement qu'en cours, on établit la relation linéarisée :

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_T p_1.$$

2. On établit l'équation d'onde vérifiée par la surpression de la même façon qu'en cours :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \chi_T} \Delta p_1 = 0.$$

La célérité des ondes acoustiques vaut alors :

$$c_T = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_T}}.$$

Dans le cas du gaz parfait, le coefficient de compressibilité isotherme à la température T_0 vaut :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{nRT_0}{P} \right)_{P_0} = \frac{nRT_0}{VP_0^2} = \frac{1}{P_0}.$$

On a donc :

$$\mu_0 \chi_T = \frac{\mu_0}{P_0} = \frac{M}{RT_0}$$

en utilisant l'équation d'état $\frac{P_0}{\mu} = \frac{RT_0}{M}$.

On en déduit l'expression de la célérité :

$$c_T = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}.$$

L'expression de la célérité peut être établie plus directement dans le cas du gaz parfait. L'équation d'état du gaz parfait permet d'écrire $\mu_0 = \frac{M}{RT_0} P_0$ en l'absence d'onde sonore. En présence de l'onde, la température restant égale à T_0 , on obtient :

$$\mu_0 + \mu_1 = \frac{M}{RT_0} (P_0 + p_1)$$

d'où :

$$\mu_1 = \frac{M}{RT_0} p_1.$$

Les équations d'Euler et de la conservation de la masse permettent d'écrire :

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} p_1) = \Delta p_1 = -\frac{\partial(\mu_0 \text{div} \vec{v}_1)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

d'où

$$\Delta p_1 = \frac{M}{RT_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}.$$

On retrouve l'expression de la célérité $c_T = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}$.

3. On calcule $c_T = 293 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur n'est pas en accord avec les résultats expérimentaux.

4.a) Il s'agit de la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f}$.

4.b) Pendant une période $T = 1/f$, la diffusion thermique se fait sur une longueur caractéristique

$$L_{th} \approx \sqrt{D_{th} T} = \sqrt{\frac{D_{th}}{f}}.$$

L'évolution peut être considérée comme adiabatique si on peut négliger la diffusion thermique, c'est-à-dire si, pendant une période, elle se fait sur une longueur $L_{th} \ll \lambda$. Il faut donc

$$\sqrt{\frac{D_{th}}{f}} \ll \frac{c}{f} \quad \text{soit} \quad f \ll \frac{c^2}{D_{th}}.$$

Pour l'air, il faut $f \ll 6 \times 10^9 \text{ Hz} = 6 \text{ GHz}$. Cette condition est largement vérifiée dans le domaine des ondes acoustiques.

6 — Onde dans un tuyau élastique [**]

1. Considérons la tranche de fluide comprise entre les abscisses x et les abscisses $x+dx$. Nous allons effectuer un bilan de masse sur ce système.

La masse de fluide vaut $dm(x, t) = \mu(x, t)S(x, t)dx$. Pendant dt , elle varie de

$$\begin{aligned} d^2m &= dm(x, t+dt) - dm(x, t) = \frac{\partial(dm(x, t))}{\partial t} dt \\ &= \left[\mu(x, t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + S(x, t) \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t} \right] dx dt. \end{aligned}$$

La masse échangée à travers les frontières pendant dt vaut (on compte positivement la masse reçue par le système)

$$\begin{aligned} \delta^2 m_{\text{éch}} &= \mu(x, t)S(x, t)v(x, t)dt \\ &\quad - \mu(x+dx, t)S(x+dx, t)v(x+dx, t)dt \\ &= -\frac{\partial(\mu S v)}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

Le bilan de masse s'écrit $d^2m = \delta^2 m_{\text{éch}}$, soit après simplification par $dx dt$:

$$\frac{\partial(\mu S)}{\partial t} = -\frac{\partial(\mu S v)}{\partial x}.$$

Comme $S(x, t) = S_0 + S_1(x, t)$, $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$ et $v(x, t) = v_1(x, t)$, en notant avec l'indice 1 les grandeurs infiniment petites d'ordre 1, le bilan s'écrit

$$\mu \frac{\partial S_1}{\partial t} + S \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu S \frac{\partial v}{\partial x} - \mu v \frac{\partial S}{\partial x} - S v \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

soit en explicitant chaque grandeur

$$\begin{aligned} (\mu_0 + \mu_1) \frac{\partial S_1}{\partial t} + (S_0 + S_1) \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \\ = -(\mu_0 + \mu_1)(S_0 + S_1) \frac{\partial v_1}{\partial x} - (\mu_0 + \mu_1)v_1 \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ - (S_0 + S_1)v_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial x}. \end{aligned}$$

En se limitant au premier ordre vis-à-vis des termes d'indice 1, on obtient

$$\mu_0 \frac{\partial S_1}{\partial t} + S_0 \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 S_0 \frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

2. La relation traduisant l'adiabaticité de l'évolution du fluide s'écrit

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

La section du tuyau dépend de la pression P . En l'absence d'onde, elle vaut $S(P_0) = S_0$. En présence de l'onde sonore, elle vaut

$$\begin{aligned} S(P) &= S(P_0 + p_1) = S(P_0) + p_1 \left(\frac{dS}{dP} \right)_{P_0} \\ &= S_0 + p_1 S(P_0) D = S_0 + p_1 S_0 D \end{aligned}$$

d'après la définition de D . On en déduit

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_1}{dt} = S_0 D \frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

Le bilan de masse s'écrit alors

$$\mu_0 S_0 D \frac{\partial p_1}{\partial t} + S_0 \mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 S_0 \frac{\partial v_1}{\partial x},$$

$$\text{soit } (D + \chi_S) \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

En utilisant le théorème de Schwarz entre cette équation et le bilan de masse, on obtient

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -(D + \chi_S) \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}.$$

La surpression vérifie donc l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0(D + \chi_S)} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0.$$

La célérité des ondes vaut

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0(D + \chi_S)}}.$$

3. On calcule pour le tuyau métallique

$$c_m = 1390 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et pour le tuyau souple

$$c_{el} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La célérité est considérablement réduite dans un tuyau souple.

8 — Clarinette

[**]

1. Les extrémités imposent des conditions aux limites de type « nœud » de surpression (extrémité fermée) ou « ventre » de surpression (extrémité ouverte).

Elles justifient donc de chercher une solution de l'équation de d'Alembert sous forme d'une onde stationnaire.

2. 'Equation de la dynamique linéarisée en projection selon Ox :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} = p_{10} k \cos(\omega t) \sin(kx)$$

d'où

$$v_1(x, t) = \frac{p_{10} k}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

soit comme $\omega = kc$

$$v_1(x, t) = \frac{p_{10}}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx) .$$

3. Les conditions aux limites sont :

$$p_1(L, t) = 0 \quad \text{et} \quad v_1(0, t) = 0 .$$

La paroi en $x = 0$ impose $v_1 = 0$, car la vitesse est normale à la paroi (condition de cinématique des fluides).

La pression atmosphérique extérieure impose $P(L, t) = P_0$ soit $p_1(L, t) = 0$.

4. La condition $v_1(0, t) = 0$ est déjà vérifiée par le champ des vitesses obtenu.

En $x = L$, on doit avoir

$$p_1(L, t) = P_{10} \cos(\omega t) \cos(kL) = 0 \quad \forall t$$

Cette condition impose $\cos(kL) = 0$, soit

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi .$$

Avec $\omega_n = k_n c$, on obtient les pulsations propres

$$\omega_n = \frac{c\pi}{2L} + (n-1) \frac{c\pi}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}^* .$$

Le fondamental a pour pulsation

$$\omega_1 = \frac{c\pi}{2L} .$$

Le fondamental a pour pulsation $\omega_1 = \frac{c\pi}{2L}$, soit la fréquence

$$f_1 = \frac{c\pi}{4L} .$$

On remarque que

$$\omega_n = [2(n-1) + 1] \frac{c\pi}{2L} .$$

On peut donc écrire

$$f_p = (2p+1)f_1 \quad \text{avec} \quad p \in \mathbf{N} .$$

Le son ne comporte que les harmoniques de rang impair.

5. La fréquence du fondamental pour une flûte est donc

$$f_{1,fl} = \frac{c}{2L} .$$

Pour une clarinette, elle vaut

$$f_{1,cl} = \frac{c}{4L} = \frac{f_{1,fl}}{2} .$$

À longueur de tuyau égale, le son émis par une clarinette est plus grave (une octave plus grave) que le son émis par une flûte.

6. Avec $L = 65 \text{ cm}$ et $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la fréquence du fondamental est $f_1 = 130,8 \text{ Hz}$.

Si on ouvre le trou central, on force un nœud de pression à se former aux environs du milieu du tuyau. Dans la pratique, cela force l'émission de l'harmonique suivant, c'est-à-dire $f_3 = 3f_1 = 392,3 \text{ Hz}$.

7. Le fondamental $f_1 = 130,8 \text{ Hz}$ correspond à un do_3 . Le troisième harmonique $f_3 = 392,3 \text{ Hz}$ correspond au sol_4 , situé à un intervalle de douzième (une octave plus une quinte) du fondamental.

Le timbre est la « couleur » du son, défini en première approximation par les amplitudes des harmoniques qui le constituent.

9 — Bruit d'explosion

[**]

1. La vitesse du son dans un gaz parfait est donnée par

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} .$$

Le temps mis pour parcourir la distance D vaut donc

$$\tau_h = \frac{D}{c_0} = D \sqrt{\frac{M}{\gamma R T_0}} .$$

2. La célérité du son est donnée ici par

$$c(z) = \sqrt{\frac{\gamma R T(z)}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma R (T_0 - Bz)}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \sqrt{1 - \frac{Bz}{T_0}}$$

soit

$$c(z) = c_0 \sqrt{1 - \frac{B}{T_0} z} .$$

La durée mise pour parcourir une distance dz vaut donc

$$dt = \frac{dz}{c(z)} = \frac{1}{c_0} \left(1 - \frac{B}{T_0} z\right)^{-1/2} dz .$$

La durée mise pour aller de $z = 0$ à $z = D$ vaut donc

$$\begin{aligned} \tau_v &= \frac{1}{c_0} \int_0^D \left(1 - \frac{B}{T_0} z\right)^{-1/2} dz \\ &= -\frac{T_0}{B c_0} \int_1^{1-\frac{BD}{T_0}} u^{-1/2} du = -\frac{2T_0}{B c_0} \sqrt{u} \Big|_1^{1-\frac{BD}{T_0}} \\ &= -\frac{2T_0}{B c_0} \left(\sqrt{1 - \frac{BD}{T_0}} - 1 \right) \end{aligned}$$

soit

$$\tau_v = \frac{2T_0}{Bc_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{BD}{T_0}} \right).$$

3. Avec les valeurs numériques données, on a $\frac{B}{T_0} \approx 10^{-5} \text{ m}^{-1}$.

Nous allons donc faire l'hypothèse (dont il faudra vérifier la validité *a posteriori*) que $\frac{BD}{T_0} \ll 1$, soit

$$1 - \sqrt{1 - \frac{BD}{T_0}} \approx 1 - \frac{BD}{2T_0} + \frac{3}{8} \left(\frac{BD}{T_0} \right)^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \tau_h - \tau_v &= \frac{D}{c_0} - \frac{2T_0}{Bc_0} \left[1 - 1 + \frac{BD}{2T_0} - \frac{3}{8} \left(\frac{BD}{T_0} \right)^2 \right] \\ &= \frac{D}{c_0} - \frac{D}{c_0} + \frac{2T_0}{Bc_0} \frac{3}{8} \frac{B^2 D^2}{T_0^2} \\ &= \frac{3}{4} \frac{BD^2}{c_0 T_0} = \frac{3}{4} \tau_h \frac{BD}{T_0}. \end{aligned}$$

On en déduit l'écart relatif

$$\frac{\tau_h - \tau_v}{\tau_h} = \frac{3BD}{4T_0}.$$

On en déduit que $\frac{\tau_h - \tau_v}{\tau_h} > 0,01$ pour

$$D > \frac{0,04}{3} \frac{T_0}{B} \quad \text{soit} \quad D > 7,7 \times 10^2 \text{ m}.$$

► On vérifie $\frac{BD}{T_0} = 1,3 \times 10^{-2} \ll 1$, l'approximation faite pour utiliser un développement limité est donc justifiée.

12 — Fréquences propres d'une sphère rigide [***]

On considère

$$\underline{p}(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} + \frac{B}{r} e^{i(\omega t + kr)}.$$

1. Le premier terme correspond à une onde divergente (après passage au centre de la sphère); le second à une onde convergente (après réflexion sur la paroi de la sphère).

L'équation d'Euler conduit à

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r = -\underline{A} \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_r \\ &\quad - \underline{B} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t + kr)} \vec{e}_r \\ &= \left[\frac{\underline{A}}{r^2} (1 + ikr) e^{i(\omega t - kr)} + \frac{\underline{B}}{r^2} (1 - ikr) e^{i(\omega t + kr)} \right] \vec{e}_r \end{aligned}$$

d'où

$$\underline{v} = \frac{1}{i\omega\mu_0 r^2} \left[\underline{A}(1 + ikr) e^{i(\omega t - kr)} + \underline{B}(1 - ikr) e^{i(\omega t + kr)} \right] \vec{e}_r$$

soit

$$\underline{v} = \frac{1}{\mu_0 \omega r^2} \left[\underline{A}(kr - i) e^{i(\omega t - kr)} - \underline{B}(kr + i) e^{i(\omega t + kr)} \right] \vec{e}_r.$$

2. On doit avoir

$$\lim_{r \rightarrow 0} D_v = 0.$$

Le débit volumique est donné par

$$D_v = 4\pi r^2 v(r, t).$$

On a donc en notation complexe

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} D_v &= \frac{4\pi}{\mu_0 \omega} [-i\underline{A} e^{i\omega t} - i\underline{B} e^{i\omega t}] \\ &= -\frac{4\pi i}{\mu_0 \omega} [\underline{A} + \underline{B}] e^{i\omega t} = 0, \end{aligned}$$

d'où $\underline{B} = -\underline{A}$.

Le champ des vitesses s'écrit alors

$$\vec{v} = \frac{\underline{A}}{\mu_0 \omega r^2} \left[(kr - i) e^{i(\omega t - kr)} + (kr + i) e^{i(\omega t + kr)} \right] \vec{e}_r$$

La composante radiale de la vitesse doit être nulle sur la paroi : $v(R, t) = 0, \forall t$, soit après simplification

$$\underline{A}(kR - i) e^{ikR} + \underline{A}(kR + i) e^{ikR} = 0.$$

Comme $\underline{A} \neq 0$, on en déduit

$$(kR - i) e^{-ikR} + (kR + i) e^{ikR} = 0,$$

soit

$$kR \left(e^{ikR} + e^{-ikR} \right) + i \left(e^{ikR} - e^{-ikR} \right) = 0,$$

qui s'écrit

$$kR \cos(kR) - \sin(kR) = 0.$$

Les modes propres vérifient donc

$$\tan(kR) = kR.$$

Avec la relation de dispersion $\omega = 2\pi f = kc$, on en déduit la relation vérifiée par les fréquences propres :

$$\tan\left(\frac{2\pi f R}{c}\right) = \frac{2\pi f R}{c}.$$

3. La plus basse de ces fréquences est donc la plus petite racine positive de $\tan x = x$.

Une résolution numérique conduit à $x \approx 4,5$. Avec $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on calcule $f = \frac{4,5c}{2\pi R}$, soit $f = 4,9 \text{ kHz}$.

13 — Sphère pulsante et impédance de rayonnement [***]

1. L'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta P_1 = 0$$

soit dans le cas d'un champ radial

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2 (P_1)}{\partial r^2}.$$

En posant $F(r, t) = r P_1(r, t)$, on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0.$$

La solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle est

$$F(r, t) = A f\left(t - \frac{r}{c}\right) + B g\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

d'où

$$P_1(r, t) = \frac{A}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{B}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right).$$

Le premier terme représente une onde divergente, le second une onde convergente.

La source des ondes étant à l'origine O , il est naturel de ne considérer que des ondes qui s'éloignent de la source, c'est-à-dire divergente :

$$P_1(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

2. Dans le cas d'une sinusoïdale de la forme

$$P_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \alpha),$$

l'équation de d'Alembert conduit à la relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

L'équation de la dynamique linéarisée s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial v_1(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial P_1}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \cos(\omega t - kr - \alpha) - \frac{kA}{r} \sin(\omega t - kr - \alpha)$$

d'où

$$\rho_0 v_1(r, t) = \frac{A}{\omega r^2} \sin(\omega t - kr - \alpha) + \frac{kA}{\omega r} \cos(\omega t - kr - \alpha).$$

Avec la relation de dispersion, on obtient

$$v_1(r, t) = \frac{1}{\rho_0 c r} \cos(\omega t - kr - \alpha) + \frac{A}{\rho_0 k c r^2} \sin(\omega t - kr - \alpha).$$

Le champ vectoriel est $\vec{v}_1(M, t) = v_1(r, t) \vec{e}_r$.

Dans la zone de rayonnement, on a $kr \gg 1$. Le champ des vitesses devient alors

$$v_1(r, t) = \frac{A}{\rho_0 c r^2} \cos(\omega t - kr - \alpha).$$

L'onde a une structure locale d'onde plane, et on a

$$p f g d f r a c P_1(r, t) v_1(r, t) = \rho_0 c.$$

3. À la surface de la sphère, on est en $r \ll \lambda$, dans la zone de champ proche. Le champ des vitesses s'écrit alors

$$v_1(r, t) = \frac{A}{\rho_0 k c r^2} \sin(\omega t - kr - \alpha).$$

La vitesse sur la surface de la sphère est égale à la vitesse radiale des points de la surface de la sphère, soit

$$v_1(a(t), t) = \frac{da}{dt}.$$

Au premier ordre, $a(t) = a_0 \approx a_0$ car $a_1 \ll a_0$. La vitesse à la surface de la sphère est

$$\frac{da}{dt} = -a_1 \omega \sin(\omega t),$$

d'où

$$-a_1 \omega \sin(\omega t) = \frac{A}{\rho_0 k c a_1^2} \sin(\omega t - k a_0 - \alpha).$$

Comme $k a_0 \ll 1$ (car $a_0 \ll \lambda$), on peut écrire

$$-a_1 \omega \sin(\omega t) = \frac{A}{\rho_0 k c a_1^2} \sin(\omega t - \alpha) \quad \forall t.$$

La dépendance temporelle implique $\alpha = 0$.

On a alors

$$A = -\rho_0 \omega^2 a_1 a_0^2.$$

4. Le vecteur densité de courant énergétique est

$$\vec{\Pi}(M, t) = \Pi(r, t) \vec{e}_r = P_1(r, t) v_1(r, t) \vec{e}_r.$$

En moyenne temporelle, il ne reste que le terme de champ lointain pour lequel $v_1 = P_1/(\rho_0 c)$, d'où

$$\langle \Pi(r, t) \rangle = \frac{\langle P_1^2 \rangle}{\rho_0 c}.$$

Avec $P_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$, on obtient

$$\langle \Pi(r, t) \rangle = \frac{A^2}{2 \rho_0 c r^2}.$$

La puissance rayonnée dans tout l'espace est

$$\mathcal{P} = 4\pi r^2 \langle \Pi(r, t) \rangle$$

soit avec l'expression de A établie

$$\mathcal{P} = \frac{2 \rho_0 a_1^2 a_0^4 \omega^4}{c}.$$

5. En notation complexe, on a

$$\underline{P}_1(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{v}_1(r, t) &= \frac{A}{\rho_0 c r} e^{i(\omega t - kr)} + \frac{A}{\rho_0 c k r^2} e^{i(\omega t - kr - \pi/2)} \\ &= \frac{A}{\rho_0 c r} e^{i(\omega t - kr)} - \frac{iA}{\rho_0 c k r^2} e^{i(\omega t - kr)} \\ &= \frac{A}{\rho_0 c a_0} \left(1 - \frac{i}{k a_0} \right) e^{i(\omega t - kr)} \end{aligned}$$

On a alors après simplification

$$\frac{\underline{P}_1(r, t)}{\underline{v}_1(r, t)} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{\rho_0 c r} - \frac{i}{\rho_0 c k r^2}}$$

soit avec $\omega = kc$

$$\frac{\underline{P}_1(r, t)}{\underline{v}_1(r, t)} = \frac{\rho_0 c}{1 - \frac{ic}{\omega r}}.$$

6. En $r = a_0$, le rapport précédent vaut

$$\underline{Z}_{\text{ray}} = \frac{\rho_0 c}{1 - \frac{i}{k a_0}} = \rho_0 c \frac{1 + \frac{i}{k a_0}}{1 + \frac{A}{(k a_0)^2}} = \rho_0 c \frac{(k a_0)^2 + i k a_0}{1 + (k a_0)^2}.$$

Comme $k a_0 \ll 1$, on peut approximer¹

$$\underline{Z}_{\text{ray}} \approx \rho_0 c [(k a_0)^2 + i k a_0]$$

soit avec la relation de dispersion

$$\underline{Z}_{\text{ray}} \approx \rho_0 c \left[\left(\frac{\omega a_0}{c} \right)^2 + j \frac{\omega a_0}{c} \right].$$

7. L'impédance acoustique pour une onde incidente dans le tuyau est $Z = \rho_0 c$. Comme $k a_0 \ll 1$, on a

$$Z \gg |\underline{Z}_{\text{ray}}|.$$

La sortie du tuyau peut donc être considérée comme une interface entre un milieu d'impédance élevée vers un milieu d'impédance très faible.

En reprenant les résultats établis en cours dans le cas $Z_2 \ll Z_1$, les coefficients de réflexion en amplitudes sont alors

$$r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \approx -1 \quad \text{et} \quad r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_1} \approx +1.$$

L'onde de pression change de signe à la réflexion; la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie peut alors être considérée comme nulle à la sortie du tuyau, où l'on a alors un nœud de pression.

La vitesse réfléchie est quasiment égale à la vitesse incidente : on a alors un ventre de vitesse à la sortie du tuyau.

1. On garde l'ordre le plus bas non nul d'une part pour la partie réelle, d'autre part pour la partie imaginaire.