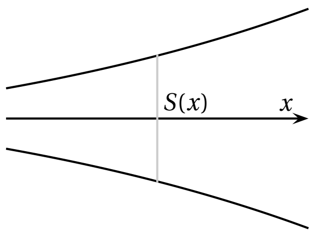
TD ondes n° 5 — Dispersion & absorption

1 — Pavillon acoustique [**]

On considère un tuyau de révolution d'axe Ox, de section $S(x)$.



Au repos, la pression vaut P_0 et la masse volumique μ_0. On désigne par $u(x,t)$ le déplacement élémentaire de la section d'abscisse x, $v(x,t)$ la vitesse de déplacement de cette section selon Ox et $p(x,t) = P(x,t) - P_0$ la surpression à l'abscisse x.
Les grandeurs u, p et v sont considérées comme des infiniment petits dans le cadre de l'approximation acoustique.

1. On considère une tranche de fluide située, au repos, entre les plans d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Déterminer sa variation relative de volume lorsqu'elle est perturbée.

2. Montrer que l'on a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{et} \quad p = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial (Su)}{\partial x}.$$

3. En déduire deux équations aux dérivées partielles du second ordre, reliant S, v, x et t pour l'une, S, p, x et t pour l'autre. On posera $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \chi_S}$.

4. Le modèle utilisé est tel que $S(x) = S_0\,\mathrm{e}^{2mx}$, où S_0 est la section en $x = 0$ et m un réel positif. Simplifier les deux équations différentielles précédentes et montrer qu'elles sont du même type.

5. On cherche à propager dans le tuyau une onde sinusoïdale décrite par la notation complexe

$$\underline{v} = V_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}.$$

Établir la relation à laquelle satisfait k en fonction de ω, c, m et j.

6. Montrer l'existence d'une pulsation de coupure ω_c séparant un domaine de pulsation où la propagation est impossible.
Calculer ω_c pour $c = 343\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $m = 1\ \mathrm{m^{-1}}$.

7. Exprimer alors $\underline{v}(x,t)$. Caractériser cette onde.

8. Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g, et donner une relation entre elles. Les tracer sur un même graphe en fonction de ω.

2 — Cornet acoustique [*]

Pour amplifier le son perçu par l'oreille, on peut placer à son extrémité un cornet acoustique limité par une surface de révolution d'axe Ox et de section variable $S(x) = S_0 \exp(-\sigma x)$, où σ et S_0 sont des constantes. Au repos, la pression p_0 et la masse volumique μ_0 sont uniformes. On note χ_s le coefficient de compressibilité isentropique de l'air et $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_s}$. L'onde sonore est décrite par les champs $p_1(x,t)$ et $\mu_1(x,t)$ et le champ des vitesses $\vec{v}_1$ pour lequel on fait l'approximation de l'écoulement quasi unidimensionnel en posant $\vec{v}_1 = v_1(x,t)\,\vec{e}_x$. On traite le problème dans l'approximation acoustique.

1. En faisant un bilan de masse pour le système ouvert (V) compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, établir l'équation

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1.$$

À l'aide de l'équation d'Euler et de l'équation traduisant l'évolution thermodynamique du fluide, établir deux autres équations reliant les champs p_1, μ_1 et v_1.

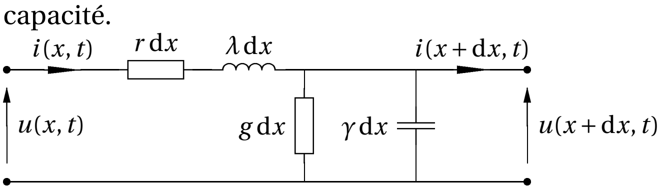
2. En déduire que la relation de dispersion pour des ondes proportionnelles à $\exp[\mathrm{i}(\omega t - kx)]$ s'écrit

$$k^2 - \mathrm{i}\sigma k - \omega^2/c^2 = 0.$$

Discuter la nature des ondes suivants les valeurs de la pulsation. Vérifier l'effet amplificateur du cornet.

3 — Équation des télégraphistes [**]

On modélise un câble coaxial par une ligne à constantes réparties. Le schéma ci-dessous représente une longueur $\mathrm{d}x$ du câble, où $r\,\mathrm{d}x$ est une résistance, $\lambda\,\mathrm{d}x$ une inductance, $g\,\mathrm{d}x$ une conductance et $\gamma\,\mathrm{d}x$ une capacité.



1. Montrer que la tension $u(x,t)$ vérifie l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r\gamma + \lambda g)\frac{\partial u}{\partial t} + r g u(x,t).$$

2. Dans quel cas retrouve-t-on l'équation de d'Alembert ? Exprimer alors la célérité c.

3. Dans le cas général, on cherche une solution de l'équation établie à la question 1 en régime harmonique de la forme $\underline{u}(x,t) = \underline{u}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)}$, où $\mathrm{j}^2 = -1$ et $\underline{k}$ est *a priori* complexe. Établir la relation de dispersion entre ω et $\underline{k}$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

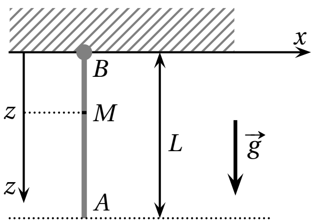
$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \mathrm{j}a\right)\left(1 - \mathrm{j}b\right)$$

où a et b sont des grandeurs que l'on exprimera en fonction de r, g, λ, γ et ω.

4. On se place dans la condition dite de Heaviside : $r\gamma = g\lambda$. La propagation est-elle dispersive ? Y a-t-il absorption ? Si oui, préciser la distance caractéristique.

4 — Corde vibrante verticale [**]

On étudie une corde AB de longueur L, parfaitement flexible et sans frottements internes, de section négligeable, homogène de masse totale m_T et de densité linéique uniforme μ.



La corde est verticale ; l'axe des z est orienté vers le bas et l'origine est à l'extrémité B. L'axe Ox est dans un plan horizontal. La position d'un point M de la corde est repérée par sa cote z dans un référentiel galiléen lié à B.

1. La corde est en équilibre.

Montrer que la tension de la corde au point M est donnée par $T(z) = \mu g(L - z)$.

2. La corde vibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément $\mathrm{d}z$ de corde à la cote z, montrer que l'élongation vérifie l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\frac{\partial x}{\partial z}\,.$$

3. Que devient l'équation d'onde si l'on tient compte de la force de frottement visqueux

$$\mathrm{d}\vec{f} = -\alpha\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$$

agissant sur l'élément de corde $\mathrm{d}z$, $\alpha > 0$ étant la constante de frottement ?

4. On cherche une solution à l'équation d'onde au voisinage du point de fixation ($z \ll L$). Montrer qu'une onde sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude complexe $\underline{x}(z,t) = \underline{x}_0\exp\left[\mathrm{i}(\omega t - kz)\right]$, où k est une constante réelle, ne peut se propager que pour une certaine valeur α_0 de la constante de frottement, que l'on exprimera en fonction de μ, g et L.

5. Donner, pour $\alpha = \alpha_0$, les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde. Y a-t-il dispersion ?

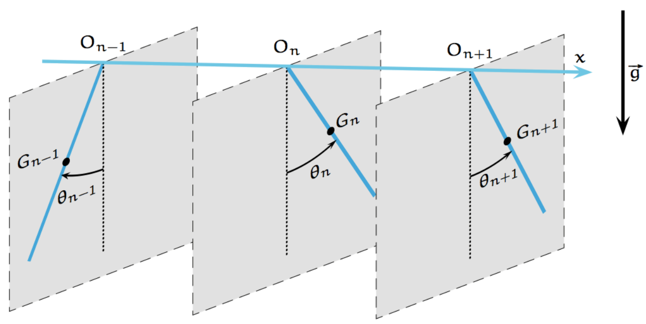
6. On néglige maintenant le terme de frottement et on cherche une solution à l'équation d'onde dans la région $z \ll L$ sous la forme $\underline{x}(z,t) = \underline{a}\exp\left[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)\right]$ avec $\underline{k} = k_1 + \mathrm{i}k_2$ complexe (k_1 et k_2 étant réels). Exprimer k_2. En déduire que l'amplitude de l'onde augmente pendant la propagation. Le résultat est-il cohérent avec celui de la question 4 ?

7. Établir alors et représenter graphiquement la relation de dispersion. Poser $\omega_0^2 = \dfrac{g}{4L}$ et montrer que la corde se comporte comme un filtre passe-haut.

8. Déterminer la relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

5 — Chaîne infinie de pendules couplés [***]

On considère une chaîne infinie de pendules pesants couplés par un fil de torsion.



Chaque pendule est une barre homogène de longueur L, de masse m, fixée à l'axe de rotation Ox au point O_n d'abscisse $x_n = nd$.
Il oscille dans le plan yO_nz perpendiculaire à l'axe de rotation, et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J = \frac{1}{3}mL^2$.
Sa position angulaire par rapport à la verticale est repérée par l'angle $\theta_n(t)$. Le fil de torsion, de constante C, exerce entre deux pendules successifs un couple de rappel proportionnel à l'écart angulaire entre ces pendules.
Les effets des phénomènes dissipatifs sur le pendule (n) sont modélisés par un couple de frottement fluide d'expression $\Gamma = -\alpha\dfrac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}t}$.

1. Établir une équation différentielle reliant $\theta_n(t)$ à $\theta_{n-1}(t)$ et $\theta_{n+1}(t)$.

2. On se place dans le cas d'oscillations de faible amplitude ($\theta_n \ll 1$). On suppose que la distance d entre deux pendules successifs est très faible devant les longueurs d'onde étudiées, ce qui permet de construire une fonction $\theta(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\theta(x = nd, t) = \theta_n(t)\,.$$

Montrer que l'équation précédente se ramène à une équation aux dérivées partielles linéaire vérifiée par $\theta(x,t)$.

3. On cherche une solution en régime harmonique sous la forme

$$\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)} \, .$$

Établir la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$.

4. On se place dans le cas où $\alpha = 0$.

4.a) Que devient la relation de dispersion ?

4.b) Selon les valeurs de la pulsation ω, déterminer s'il y a propagation. Préciser si la propagation est alors dispersive.

5. On se place dans le cas $\alpha \neq 0$ et on considère la pulsation ω « grande » (devant quoi ?).

5.a) Comment se simplifie la relation de dispersion ?

5.b) Y a-t-il propagation ? Si oui, est-elle dispersive ?

5.c) Y a-t-il absorption ?

5.d) Que peut-on dire si l'amortissement est négligeable ($\alpha = 0$) ?

6 — Tuyau d'orgue [**]

On modélise un tuyau d'orgue par un cylindre d'axe $\vec{e}_x$, de longueur L et de section carrée de coté $D \ll L$ fermé à ses extrémités $x = 0$ et $x = L$.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles vérifiées par la surpression acoustique $p_1(x, y, z, t,)$.

2. On étudie la propagation d'un son monochromatique dans le tuyau, assimilé au domaine

$$\{0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant D, 0 \leqslant z \leqslant D\} \, .$$

On cherche une solution de l'équation de d'Alembert de la forme

$$p_1(x,y,z,t) = p_\mathrm{m} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(\omega t) \, .$$

Quelle relation doivent vérifier k_x, k_y, k_z, ω et la célérité c du son dans l'air ?

3. Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}_1$ associé. Déduire des conditions aux limites les expressions de k_x, k_y et k_z en fonction de D, L et de trois entiers n_1, n_2 et n_3.

4. En déduire les expressions des fréquences que peut émettre le tuyau en fonction de L, D, c, n_1, n_2 et n_3.

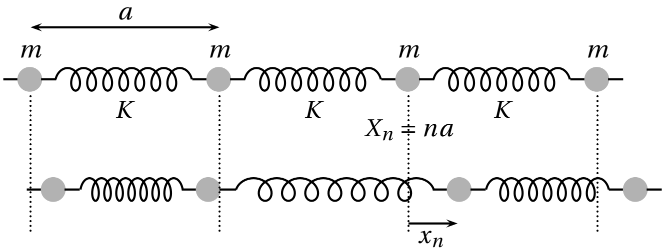
5. Le tuyau est harmonieux s'il n'émet que les multiples de la fréquence fondamentale.

Quelle est la fréquence minimale f_m d'un son non harmonieux ?

Calculer f_m pour $D = 1$ cm et $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Commenter.

7 — Dispersion dans une chaîne infinie d'atomes [***]

On considère une chaîne infinie linéaire d'atomes ponctuels de masse m, liés par des ressorts de raideur K. La chaîne est portée par l'axe OX. À l'équilibre, les atomes occupent les positions $X = na$, avec $n \in \mathbf{Z}$, où a est la longueur à vide des ressorts.



1. Établir les équations différentielles régissant la position x_n de l'atome de rang n par rapport à sa position d'équilibre.

2. On cherche des solutions sous la forme

$$\underline{x}_n = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kX_n)} \, ,$$

où A est une constante réelle. Déterminer la relation de dispersion.

3. Montrer que la chaîne se comporte comme un filtre passe-bas dont on calculera la pulsation de coupure ω_c. Tracer le graphe $\omega(k)$.

4. Que devient la relation de dispersion quand $\omega \ll \omega_\mathrm{c}$? Commenter. Déterminer alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde.

8 — Propagation d'un signal électrique dans un axone [**]

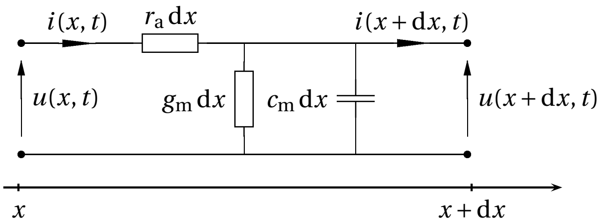
L'axone, ou fibre nerveuse, est le prolongement du neurone qui conduit les signaux électriques émis par le centre du neurone (potentiel d'action) vers les synapses. Les axones les plus simples sont formés d'une membrane lipidique enfermant un liquide physiologique riche en ions (l'axoplasme) et baignant dans un liquide cellulaire également riche en ions. Les propriétés conductrices de l'axone sont déterminées par :

— la résistance linéique de l'axoplasme ($r_\mathrm{a} = 6{,}4 \times 10^9 \ \Omega\cdot\text{m}^{-1}$) s'opposant au passage du courant le long de l'axone ;

— la conductance linéique de la membrane ($g_\mathrm{m} = 63 \text{ mS}\cdot\text{m}^{-1}$) déterminant la fuite du courant ;

— la capacité linéique de la membrane ($c_\mathrm{m} = 0{,}32 \ \mu\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$) capable d'emmagasiner des charges électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane.

Chaque longueur élémentaire de longueur dx de la fibre nerveuse est modélisée part une cellule représentée ci-dessous.



1. Déterminer les équations aux dérivées partielles vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$, puis celle vérifiée par $u(x,t)$ seulement. On envisage dans la suite une solution sous forme d'onde plane pseudo-progressive harmonique $\underline{u}(x,t) = u_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)}$.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$. Montrer que si ω est très inférieure à une pulsation ω_c que l'on exprimera en fonction de c_m et g_m, l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ se simplifie en

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{r_\mathrm{a} c_\mathrm{m}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,.$$

On supposera cette condition vérifiée par la suite.

3. Quel est le phénomène décrit par cette équation? Citer d'autres exemples analogues.

4. Déterminer la relation de dispersion entre ω et k. Montrer que le milieu est dispersif et absorbant. Que valent les vitesses de phase et de groupe? Quelle relation lie ces deux grandeurs?

5. Mettre en évidence une distance caractéristique d'atténuation. Comment dépend-elle de la fréquence?

9 — Influence de la viscosité de l'air sur les ondes acoustiques [***]

On étudie la propagation du son dans un fluide de masse volumique μ_0 au repos et de compressibilité isentropique χ_S. On prend en compte les effets de la viscosité du fluide en ajoutant la force volumique

$$\vec{f}_\mathrm{v} = \frac{4}{3}\eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\vec{e}_x\,,$$

où η est la viscosité du fluide.

1. Préciser l'unité de η.

2. On rappelle l'équation d'Euler :

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \vec{f}_\mathrm{v}\,.$$

Que devient-elle dans le cadre de l'acoustique linéaire?

3. Rappeler les deux autres équations de l'acoustique linéaire.

4. En déduire l'équation de propagation vérifiée par $v(x,t)$ ou par $p(x,t)$.

On posera $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$.

On cherche une solution de l'équation de propagation sous la forme d'une onde pseudo-progressive harmonique de nombre d'onde complexe $\underline{k}$.

5. Rappeler l'expression générale d'une telle onde.

6. Montrer que la relation de dispersion s'écrit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2/c^2}{1+\mathrm{i}\alpha}$$

où on exprimera α en fonction des données.

7. On étudie la propagation du son dans l'air à 300 K sous 1 bar pour une fréquence $f = 1$ kHz.

On donne $M = 29\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $\eta = 2\times10^{-5}$ SI. L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1{,}40$).

Justifier que l'on peut linéariser l'expression de $\underline{k}$.

8. En déduire l'expression de $\underline{k} = k' + \mathrm{i}k''$. Interpréter k', et k'' en faisant intervenir une distance caractéristique δ.

9. Calculer les longueurs caractéristiques sur lesquelles le son dans l'air est amorti à 20 Hz et à 20 kHz.