TD ondes n° 5 — Dispersion & absorption — solution

1 — Pavillon acoustique

1. En l'absence d'onde, le volume de la tranche considérée est

$$\delta V_0 = S(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En présence d'onde, la tranche est comprise entre les plans d'abscisses

$$x + u(x,t) \quad \text{et} \quad x + \mathrm{d}x + u(x+\mathrm{d}x,t)\,.$$

La longueur de la tranche est donc

$$\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x + u(x+\mathrm{d}x,t) - u(x,t) = \mathrm{d}x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

La position de la tranche étant à l'abscisse $x + u(x,t)$, la section à considérer au premier ordre est

$$S(x+u) = S(x) + u(x,t)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,.$$

Le volume de la tranche perturbée est donc

$$\delta V = S(x+u)\,\mathrm{d}\ell = \left(S(x) + u(x,t)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,.$$

La variation de volume vaut donc

$$\mathrm{d}(\delta V) = \delta V - \delta V_0 = \left(u\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + S\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x}S(x)\right)\mathrm{d}x$$

La perturbation $u(x,t)$ étant un infiniment petit, le terme $u\dfrac{\partial u}{\partial x}S(x)$ est d'ordre deux. Au premier ordre, la variation de volume s'écrit

$$\mathrm{d}(\delta V) = \left(u\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + S\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}(Su)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,.$$

La variation relative de volume vaut donc

$$\frac{\mathrm{d}(\delta V)}{\delta V_0} = \frac{1}{S(x),\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}(Su)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(\delta V)}{\delta V_0} = \frac{1}{S}\frac{\partial(Su)}{\partial x}}\,.$$

On considère une tranche de fluide située, au repos, entre les plans d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Déterminer sa variation relative de volume lorsqu'elle est perturbée.

2. L'équation de la dynamique linéarisée s'écrit

$$\mu_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0\frac{\partial v}{\partial t}}\,.$$

Le coefficient de compressibilité isentropique est défini par

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = -\frac{\delta V}{V}\frac{1}{\delta P}$$

où δV est la variation de volume entraînée par une variation δP de pression.

La variation de pression est ici la surpression acoustique $p(x,t)$. On retrouve la variation relative de volume

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{1}{S}\frac{\partial(Su)}{\partial x}\,.$$

On a donc

$$\chi_S = -\frac{1}{S}\frac{\partial(Su)}{\partial x}\frac{1}{p}$$

d'où

$$\boxed{p = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial(Su)}{\partial x}}\,.$$

3. La vitesse est reliée au déplacement selon

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,.$$

D'après la question précédente, on a

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(Su)}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial(Sv)}{\partial x}\,.$$

De plus

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial x} = \frac{1}{\mu_0\chi_S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial(Sv)}{\partial x}\right)$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial(Sv)}{\partial x}\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}}\,.$$

On a de plus

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = -\frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{1}{\chi_S S}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{S}{\mu_0}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)}\,.$$

4. L'équation vérifiée par $v(x,t)$ dévient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} v\right) = c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + 2mv\right)$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2mc^2 \frac{\partial v}{\partial x}}\,.$$

L'équation vérifiée par $p(x,t)$ dévient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\frac{\partial p}{\partial x} + c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2mc^2 \frac{\partial p}{\partial x}}\,.$$

On obtient la même équation.

5. Écrivons que $\underline{v} = V_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)}$ vérifie l'équation d'onde :

$$-\omega^2 = -\underline{k}^2 c^2 - 2mc^2 \mathrm{j}\underline{k}$$

soit

$$\boxed{\underline{k}^2 + 2\mathrm{j}m\underline{k} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0}\,.$$

6. L'équation précédente est une équation du second degré dont le discriminant réduit est

$$\Delta' = -m^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{c}^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_\mathrm{c} = mc\,.$$

Si $\omega < \omega_\mathrm{c}$, on a $\Delta' < 0$ et la solution de la relation de dispersion est

$$\underline{k} = -\mathrm{j}m \pm \mathrm{j}\sqrt{\frac{\omega_\mathrm{c}^2 - \omega^2}{c^2}}\,.$$

Le nombre d'onde est imaginaire pur : $k' = 0$; il n'y a donc pas de propagation (on obtient une onde évanescente).

Si $\omega > \omega_\mathrm{c}$, on a $\Delta' > 0$ et

$$\underline{k} = -\mathrm{j}m \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{c}^2}{c^2}}\,.$$

Le nombre d'onde possède une partie réelle non nulle : il y a propagation.

Le pavillon se comporte donc comme un filtre passe-haut : il y a propagation si $\omega < \omega_\mathrm{c}$.

On calcule $\omega_\mathrm{c} = 343\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

7. En choisissant le signe de façon à avoir une onde se propageant dans le sens des x croissants, on a $\underline{k} = k' + \mathrm{j}k''$, avec

$$k' = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{c}^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad k'' = -m\,.$$

On a alors

$$\underline{v}(x,t) = V_0\,\mathrm{e}^{-mx} \exp\left(\mathrm{j}\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{c}^2}{c^2}}\,x\right)\right)$$

soit pour l'onde réelle

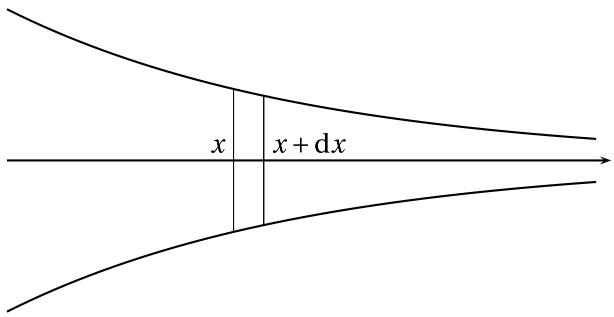
$$v(x,t) = V_0\,\mathrm{e}^{-mx} \cos\left[\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{c}^2}{c^2}}\,x\right)\right]$$

Il s'agit d'une onde se propageant selon les x croissants, dont l'amplitude s'atténue sur une distance caractéristique $\delta = -1/m$.

8. Se reporter au cours.

2 — Cornet acoustique

1. On considère la tranche comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$:



La masse de ce système est

$$\delta m(x,t) = \mu(x,t) S(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pendant $\mathrm{d}t$, elle varie de

$$\mathrm{d}(\delta m) = \delta m(x, t + \mathrm{d}t) - \delta m(x,t) = \frac{\partial \mu_1}{\partial t} S(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

La masse reçue par ce système pendant $\mathrm{d}t$ est

$$\begin{aligned}\delta^2 m_\text{reçu} &= \mu(x,t)\,v_1(x,t) S(x)\,\mathrm{d}t \\ &\quad - \mu(x+\mathrm{d}x,t)\,v_1(x+\mathrm{d}x,t) S(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\partial\left(\mu(x,t)\,v_1(x,t) S(x)\right)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

En se limitant au premier ordre, comme $\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$, on a

$$\begin{aligned}\delta^2 m_\text{reçu} &= -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} S(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \mu_0 v_1 \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} S(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \mu_0 \sigma v_1 S(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

avec $S(x) = S_0\,\mathrm{e}^{-\sigma x}$.

Le bilan $\mathrm{d}(\delta m) = \delta^2 m_\text{reçu}$, conduit alors à

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1}\,.$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

L'équation linéarisée traduisant l'adiabaticité de l'évolution s'écrit

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1 .$$

2. La conservation de la matière s'écrit alors

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1 .$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} + \mu_0 \sigma \frac{\partial v_1}{\partial t}.$$

D'après l'équation d'Euler, on a donc

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Avec $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_S}$, on en déduit l'équation d'onde vérifiée par la surpression :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \sigma c^2 \frac{\partial p_1}{\partial x}}.$$

➤ Ce n'est pas l'équation de d'Alembert; cependant, dans le cas d'un tuyau de section constante, caractérisé par $\sigma = 0$, on retrouve bien l'équation de d'Alembert, le phénomène étant unidimensionnel.

En cherchant une solution proportionnelle à $\exp[\mathrm{i}(\omega t - kx)]$, on obtient

$$-\omega^2 = -\underline{k}^2 c^2 + \mathrm{i}\underline{k}\sigma c^2 ,$$

d'où la relation de dispersion :

$$\boxed{\underline{k}^2 - \mathrm{i}\sigma \underline{k} - \omega^2/c^2 = 0}.$$

Le discriminant de la relation de dispersion s'écrit

$$\Delta = (-\mathrm{i}\sigma)^2 + \frac{4\omega^2}{c^2} = \frac{4\omega^2}{c^2} - \sigma^2 .$$

Il apparaît une pulsation caractéristique $\omega_c = \dfrac{\sigma c}{2}$.

1er cas : $\omega < \omega_c$. On a $\Delta < 0$, et

$$\underline{k} = \frac{\mathrm{i}\sigma \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Le module d'onde est imaginaire pur : il n'y a pas de propagation possible (pas de partie réelle pour $\underline{k}$) ; on observe une onde évanescente.

2e cas : $\omega > \omega_c$. On a $\Delta > 0$, et

$$\underline{k} = \frac{\mathrm{i}\sigma \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\mathrm{i}\sigma}{2} \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}.$$

La surpression s'écrit alors

$$\underline{p}_1(x,t) = \underline{p}_{01}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t \pm \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{c} x)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\mathrm{i}\sigma}{2} x)} .$$

On conserve la solution correspondant à une progression dans le sens des x croissants, soit

$$\underline{p}_1(x,t) = \underline{p}_{01}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{c} x)}\, \mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2} x} .$$

On a donc

$$p_1(x,t) = p_{10}\, \mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2} x} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi} + \varphi\right)\right]$$

La partie imaginaire $k'' = \dfrac{\sigma}{2} > 0$ se traduit pas une **amplification** de l'amplitude de l'onde acoustique (c'est le rôle du cornet !). Cette amplification n'est pas due au milieu de propagation, mais à la géométrie du système. La partie réelle $k' = \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{c}$ traduit la propagation de l'onde à la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$.

En conclusion :

— le cornet permet de transmettre les ondes de pulsation $\omega > \omega_c = \dfrac{\sigma c}{2}$; il se comporte donc comme un filtre passe-haut ;

— lorsque les ondes sont transmises, le cornet réalise une amplification, d'autant plus important que σ est grand (c'est-à-dire que la section du cornet diminue rapidement), mais la fréquence de coupure f_c est alors plus élevée ;

— la propagation, quand elle se produit, est dispersive : c'est un amplificateur de piètre qualité musicale.

---

3 — Équation des télégraphistes

1. Loi des mailles :

$$u(x,t) = u(x+\mathrm{d}x, t) + r\, i(x,t)\, \mathrm{d}x + \lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \mathrm{d}x ,$$

soit

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = r\, i(x,t) + \lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial}.$$

Loi des nœuds :

$$i(x,t) = g u(x+\mathrm{d}x, t)\, \mathrm{d}x + \gamma \frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t} \mathrm{d}x + i(x+\mathrm{d}x, t)$$

soit

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = g u(x,t) + \gamma \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -r \frac{\partial i}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = r g u(x,t) + r\gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \\ &= r g u(x,t) + r\gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda g \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r\gamma + \lambda g) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u(x,t)}.$$

2. On retrouve l'équation de d'Alembert dans le cas où
— $r = 0$, la résistance des conducteurs est négligeable ;
— $g = 0$, la résistance de fuite de l'isolant est infinie.

On a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}}.$$

3. L'équation d'onde conduit à

$$-\underline{k}^2 = -\omega^2\gamma\lambda + \mathrm{j}\omega(r\gamma + \lambda g) = rg$$

soit avec l'expression de c

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mathrm{j}\omega(r\gamma + \lambda g) - rg\,.$$

On peut écrire

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \mathrm{j}\frac{(r\gamma+\lambda g)c^2}{\omega} - \frac{rgc^2}{\omega^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \mathrm{j}\frac{r\gamma+\lambda g}{\omega\lambda\gamma} - \frac{rg}{\omega^2\lambda\gamma}\right]$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \mathrm{j}\left(\frac{r}{\lambda\omega} + \frac{g}{\gamma\omega}\right) - \left(\frac{r}{\lambda\omega}\frac{g}{\gamma\omega}\right)\right].$$

L'expression proposée s'écrivant

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \mathrm{j}(a+b) - ab\right]$$

on identifie facilement

$$\boxed{a = \frac{r}{\lambda\omega}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = \frac{g}{\gamma\omega}}.$$

4. La condition de Heaviside s'écrit

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{g}{\gamma},$$

et la relation de dispersion devient

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - 2\mathrm{j}\frac{r}{\lambda\omega} - \frac{r^2}{\lambda^2\omega^2}\right].$$

En notant $\underline{k} = k_\mathrm{r} + \mathrm{j}k_\mathrm{i}$, on a

$$\underline{k}^2 = k_\mathrm{r}^2 - k_\mathrm{i}^2 + 2\mathrm{j}k_\mathrm{r}k_\mathrm{i}\,.$$

Par identification avec la relation de dispersion :

$$k_\mathrm{r}^2 - k_\mathrm{i}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{r^2}{\lambda^2\omega^2}\right] \quad \text{et} \quad 2k_\mathrm{r}k_\mathrm{i} = -2\frac{\omega^2}{c^2}\frac{r}{\lambda\omega}.$$

On identifie facilement

$$\boxed{k_\mathrm{r} = \frac{\omega}{c}}$$

et

$$k_\mathrm{i} = -\frac{\omega}{c}\frac{r}{\lambda\omega} = -\frac{r}{c\lambda} = -\frac{r}{\lambda}\sqrt{\gamma\lambda}$$

soit

$$\boxed{k_\mathrm{i} = -r\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}}.$$

La vitesse de phase vaut $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_\mathrm{r}} = c$: la propagation n'est pas dispersive.

On a $k_\mathrm{i} < 0$: il y a absorption de l'onde au cours de sa propagation. L'onde peut s'écrire

$$\underline{u}(x,t) = \underline{u}_0\,\mathrm{e}^{k_\mathrm{i}x}\cos^{\mathrm{j}(\omega t - k_\mathrm{r}x)} = \underline{u}_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos^{\mathrm{j}(\omega t - k_\mathrm{r}x)}\,.$$

L'absorption se fait sur une distance caractéristique $\delta = -\dfrac{1}{k_\mathrm{i}}$, soit $\boxed{\delta = -\dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{\lambda}{\gamma}}}$.

---

4 — Corde vibrante verticale

1. Considérons l'élément de corde compris en l'abscisse z et l'extrémité $z = L$, de masse $m = \lambda(L-z)$. Il est soumis :
— à son poids $m\vec{g} = \lambda(L-z)g\vec{e}_z$;
— à la tension $\vec{T} = -T(z)\vec{e}_z$ au point de jonction avec la partie supérieure de la corde.

L'élément de corde étant au repos, la condition d'équilibre s'écrit, en projection sur $\vec{e}_z$:

$$\lambda(L-z)g - T(z) = 0\,, \tag{1}$$

d'où

$$\boxed{T(z) = \lambda(L-z)g}.$$

2. On note $\alpha(z,t)$ l'angle que fait la tangente à la corde en z avec la verticale ; on considère des oscillations de faible amplitude : $|\alpha| \ll 1$. La projection selon $\vec{e}_z$ du principe de la dynamique appliqué à l'élément de corde précédent conduit à

$$0 = \lambda g\mathrm{d}z + T(z+\mathrm{d}z,t)\cos\alpha(z+\mathrm{d}z,t) - T(z)\cos\alpha(z,t) \simeq \lambda g\mathrm{d}z + T(z+\mathrm{d}z,t) - T(z,t)$$

On retrouve l'équation(1) ; au premier ordre, la tension reste indépendante du temps et est donnée par $T(z) = \lambda(L-z)g$.

La projection selon $\vec{e}_x$ du principe de la dynamique s'écrit :

$$\lambda\mathrm{d}z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T(z+\mathrm{d}z)\sin\alpha(z+\mathrm{d}z,t) - T(z)\sin\alpha(z,t) \simeq T(z+\mathrm{d}z)\alpha(z+\mathrm{d}z,t) - T(z)\alpha(z,t) = \frac{\partial(T(z)\alpha(z,t))}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

Comme $\alpha(z,t) \simeq \tan\alpha(z,t) = \dfrac{\partial x}{\partial z}$, on a

$$\lambda \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(L-z)g\frac{\partial x}{\partial z}\right] = -\lambda g \frac{\partial x}{\partial z} + \lambda g(L-z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

L'équation d'onde s'écrit donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g\frac{\partial x}{\partial z} + g(L-z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}$$

3. En tenant compte du frottement visqueux, le principe de la dynamique s'écrit, en projection sur $\vec{e}_x$:

$$\lambda \mathrm{d}z \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T(z+\mathrm{d}z)\sin\alpha(z+\mathrm{d}z,t) - T(z)\sin\alpha(z,t) - \alpha\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}z.$$

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial x}{\partial t}}.$$

4. Avec la solution proposée, l'équation d'onde s'écrit

$$-\omega^2 \underline{x}_0 = -k^2 g(L-z)\underline{x}_0 + \mathrm{i}kg\underline{x}_0 - \mathrm{i}\omega\frac{\alpha}{\mu}\underline{x}_0$$

Elle admet une solution $x_0 \neq 0$ si :

$$\omega^2 - k^2 g(L-z) + \mathrm{i}\left[kg - \omega\frac{\alpha}{\mu}\right] = 0.$$

Le complexe $\omega^2 - k^2 g(L-z) + \mathrm{i}\left[kg - \omega\dfrac{\alpha}{\mu}\right]$ est nul si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont nulles.
On a donc d'une part $kg - \omega\dfrac{\alpha}{\mu} = 0$, d'où la valeur du coefficient de frottement $\alpha_0 = g\mu\dfrac{k}{\omega}$.
D'autre part, on a $\omega^2 - k^2 g(L-z) = 0$, d'où

$$\omega = k\sqrt{g(L-z)} \simeq k\sqrt{gL}$$

avec $z \ll L$. On a donc $\alpha_0 = g\mu\dfrac{k}{k\sqrt{gL}}$, soit

$$\boxed{\alpha_0 = \mu\sqrt{\frac{g}{L}}}.$$

5. Si $\alpha = \alpha_0$, on a $\omega = k\sqrt{g(L-z)} \simeq k\sqrt{gL}$, et la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ est donnée par $\boxed{v_\varphi = \sqrt{gL}}$.

La vitesse de groupe $v_\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ est alors donnée par $\boxed{v_\mathrm{g} = \sqrt{gL}}$.
On a $v_\varphi = v_\mathrm{g}$ indépendant de la pulsation ω :
petitfondgrisil n'y a pas dispersion.

6. Avec la solution proposée, l'équation d'onde s'écrit

$$-\omega^2\underline{a} = \mathrm{i}\underline{k}g\underline{a} - g(L-z)\underline{k}^2\underline{a} \simeq \mathrm{i}\underline{k}g\underline{a} - gL\underline{k}^2\underline{a}$$

en négligeant les frottements et si $z \ll L$. Le nombre d'onde $\underline{k}$ doit donc vérifier l'équation

$$gL\underline{k}^2 - \mathrm{i}g\underline{k} - \omega^2 = 0.$$

En posant $\underline{k} = k_1 + \mathrm{i}k_2$, on a donc

$$gL(k_1^2 - k_2^2 + 2\mathrm{i}k_1k_2) - \mathrm{i}g(k_1 + \mathrm{i}k_2) - \omega^2 = 0$$

soit :

$$gL(k_1^2 - k_2^2) + gk_2 - \omega^2 + \mathrm{i}gk_1(2Lk_2 - 1) = 0. \qquad (2)$$

La partie imaginaire de l'équation (2) doit être nulle, d'où $\boxed{k_2 = \dfrac{1}{2L}}$.
La solution $k_1 = 0$ est à rejeter car elle ne correspond pas à une onde se propageant.
L'élongation s'écrit alors

$$\underline{x}(z,t) = \underline{x}_0 \exp(\mathrm{i}(\omega t - k_1 z - \mathrm{i}k_2 z)) = \underline{x}_0 \exp(k_2 z)\exp(\mathrm{i}(\omega t - k_1 z))$$

avec $k_2 > 0$. L'amplitude de l'onde augmente comme $\exp(k_2 z)$ pendant la propagation.
À la question 4, nous avons trouvé qu'une onde progressive (non amortie) pouvait exister avec des frottements, si le coefficient de frottement a la valeur α_0.
Il est donc cohérent de trouver une augmentation de l'amplitude en l'absence de frottement ; ce terme d'amplification s'oppose exactement au terme de frottement lorsque $\alpha = \alpha_0$.

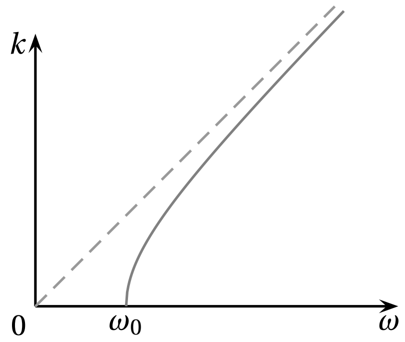
7. La partie imaginaire de l'équation (2) étant nulle, on obtient la relation de dispersion :

$$gL(k_1^2 - k_2^2) + gk_2 - \omega^2 = 0$$

avec $k_2 = \dfrac{1}{2L}$, soit $k_1^2 + \dfrac{1}{4L^2} - \dfrac{\omega^2}{gL} = 0$.
En posant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{4L}$, on a $4Lk_1^2 + 1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0$, d'où :

$$\boxed{k_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}}.$$

Pour que k_1 soit réel, il faut donc $\boxed{\omega > \omega_0}$: la corde se comporte comme un filtre passe-haut.
Représentons le nombre d'onde k en fonction de la pulsation ω :



La courbe $k(\omega)$ est une branche d'hyperbole, admettant pour asymptote la droite $k = \dfrac{\omega}{\sqrt{gL}}$.

8. On a $k_1^2 = \dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{4L^2\omega_0^2} = \dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{gL}$. En différenciant cette relation, on obtient $2k_1\mathrm{d}k_1 = \dfrac{2\omega\mathrm{d}\omega}{gL}$, soit $\dfrac{\omega}{k_1}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_1} = gL$. On a donc $\boxed{v_\varphi v_\mathrm{g} = gL}$.

---

5 — Chaîne infinie de pendules couplés

1. Appliquons le théorème du moment cinétique en O_n, projeté sur l'axe Ox, au pendule (n). Ce pendule est soumis à son poids $m\vec{g}$, qui s'applique en son centre de gravité G_n, de moment

$$\overrightarrow{O_nG_n} \wedge m\vec{g} = -\frac{L}{2}mg\sin(\theta_n)\,\vec{e}_x\,.$$

Le couple de rappel exercé par le fil de torsion compris entre O_{n-1} et O_n est $-C(\theta_n-\theta_{n-1})\,\vec{e}_x$; le fil de torsion compris entre O_n et O_{n+1} exerce le couple de rappel $-C(\theta_n-\theta_{n+1})\,\vec{e}_x$. La projection selon $\vec{e}_x$ du théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\frac{mL^2}{3}\frac{\mathrm{d}^2\theta_n}{\mathrm{d}t^2} = C\left[\theta_{n+1}-2\theta_n+\theta_{n-1}\right] - \frac{mgL}{2}\sin\theta_n - \alpha\frac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}t}\,.$$

Dans le cas des oscillations de faible amplitude, on peut linéariser $\sin\theta_n \approx \theta_n$ et l'équation du mouvement devient :

$$\frac{mL^2}{3}\frac{\mathrm{d}^2\theta_n}{\mathrm{d}t^2} = C\left[\theta_{n+1}-2\theta_n+\theta_{n-1}\right] - \frac{mgL}{2}\theta_n - \alpha\frac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}t}$$

2. On peut alors remplacer θ_{n-1} et θ_{n+1} dans l'équation précédente par leur développement de Taylor au voisinage de $x = nd$:

$$\theta_{n+1}(t) = \theta(x+d,t) = \theta(x,t) + d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \theta_n(t) + d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

et :

$$\theta_{n-1}(t) = \theta(x-d,t) = \theta(x,t) - d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \theta_n(t) - d\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\,.$$

On a alors $\theta_{n+1}-2\theta_n+\theta_{n-1} = d^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ et l'équation de récurrence s'écrit :

$$\frac{mL^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Cd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mgL}{2}\theta(x,t) - \alpha\frac{\partial\theta}{\partial t}\,. \qquad (3)$$

Nous obtenons une équation d'onde, qui n'est pas l'équation de d'Alembert.

3. Écrivons que l'onde

$$\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)}$$

est solution de l'équation d'onde précédente. Après simplification par $\exp\left(\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)\right)$, on obtient

$$-\omega^2\frac{mL^2}{3}\underline{A} = \left[-\underline{k}^2Cd^2 - \frac{mgL}{2} + \mathrm{i}\omega\alpha\right]\underline{\theta}_0\,.$$

L'onde cherchée est solution si $\underline{\theta}_0 \neq 0$, soit si :

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2 - \frac{mgL}{2Cd^2} - \mathrm{i}\frac{\omega\alpha}{Cd^2}\,. \qquad (4)$$

Cette relation entre $\underline{k}$ et ω est appelée relation de dispersion.

4.a) Si $\alpha = 0$, la relation de dispersion (4) devient :

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2 - \frac{mgL}{2Cd^2} = \frac{mL^2}{3Cd^2}\left[\omega^2 - \frac{3g}{2L}\right]\,.$$

Elle est de la forme

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}}$$

avec

$$\boxed{\omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2L}}} \quad \text{et} \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2}}}\,.$$

4.b) Si $\omega > \omega_c$, on a $\underline{k}^2 > 0$. Le nombre d'onde est réel :

$$k'(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{c} = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2}\left[\omega^2 - \frac{3g}{2L}\right]}\,.$$

Il y a propagation. La vitesse de phase vaut

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2 - \frac{3mgL}{2\omega^2}}}\,.$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation : **la propagation est dispersive**. Comme $k'' = 0$, il n'y a pas absorption.

Si $\omega < \omega_c$, on a $\underline{k}^2 < 0$. Le nombre d'onde est imaginaire pur :

$$k = \mathrm{i}k'' = \pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c},$$

soit

$$k'' = \pm\sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2}}\sqrt{\frac{3g}{2L} - \omega^2}.$$

Il y a donc absorption. Comme $k' = 0$, **il n'y a pas propagation**.

5. Si ω est élevé, on peut négliger le terme constant devant le terme en ω^2 de la partie réelle de $\underline{k}^2$ dans la relation (4). Il faut donc

$$\frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2 \gg \frac{mgL}{2Cd2}$$

soit

$$\omega \gg \sqrt{\frac{3g}{2L}}.$$

Cela revient à

$$\omega \gg \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

La pulsation de l'onde doit être grande devant la pulsation propre de chaque pendule pesant.

5.a)

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2 - \frac{\mathrm{i}\alpha}{Cd^2}\omega = \frac{mL^2\omega^2}{3Cd^2}\left[1 - \mathrm{i}\frac{3\alpha}{mL^2\omega}\right].$$

Le terme sans dimension $\dfrac{3\alpha}{mL^2\omega}$ peut être considéré comme un infiniment petit quand ω est grand, d'où la linéarisation :

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{mL^2\omega^2}{3Cd^2}}\left[1 - \mathrm{i}\frac{3\alpha}{mL^2\omega}\right]^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{mL^2\omega^2}{3Cd^2}}\left[1 - \mathrm{i}\frac{3\alpha}{2mL^2\omega}\right].$$

La relation de dispersion s'écrit alors :

$$\boxed{\underline{k}(\omega) = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2}}\omega - \mathrm{i}\alpha\sqrt{\frac{3}{4mL^2Cd^2}} = k'(\omega) + \mathrm{i}k''(\omega)}$$

avec :

$$\boxed{k'(\omega) = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2}}\omega} \quad \text{et} \quad \boxed{k''(\omega) = -\alpha\sqrt{\frac{3}{4mL^2Cd^2}}}.$$

5.b) Comme $k' \neq 0$, il y a propagation. La vitesse de phase vaut

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2}}.$$

Elle est indépendante de ω : **la propagation n'est pas dispersive**.

5.c) On a $k''(\omega) < 0$ (avec $k'(\omega) > 0$) : il y a absorption. On remarque que l'absorption est d'autant plus importante que le coefficient α caractéristique du couple de frottement est grand, ce qui était prévisible.

5.d) Si $\alpha = 0$, on a $k'' = 0$: on a un phénomène de propagation non dispersif, sans absorption. La relation de dispersion s'écrit alors

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2}\omega^2.$$

Considérer ω grand revient à négliger le terme dû à la pesanteur. L'équation d'onde est alors donnée par

$$\frac{mL^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Cd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

On retrouve l'équation de d'Alembert, qui décrit bien un phénomène non dispersif, sans absorption.

---

6 — Tuyau d'orgue

Commentaire préliminaire : l'onde sonore obéit à l'équation de d'Alembert. Nous cherchons ici une solution sous forme d'onde stationnaire. Le milieu étant borné, seuls des modes propres peuvent exister.

1. On écrit que $p_1(x, y, z, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

soit

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

On a donc $\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}}$.

2. ➤ On ne peut pas utiliser la relation $p_1 = \mu_0 c v_1$ faisant intervenir l'impédance acoustique $Z_\mathrm{a} = \mu_0 c$, car cette dernière n'est valable que pour une onde progressive ; nous avons ici une onde stationnaire.

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1.$$

La projection sur les trois axes donne

$$\mu_0\frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = -k_x p_\mathrm{m}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(\omega t)$$

$$\mu_0\frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = -k_y p_\mathrm{m}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(\omega t)$$

$$\mu_0\frac{\partial v_{1z}}{\partial t} = -k_z p_\mathrm{m}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(\omega t)$$

En intégrant par rapport au temps, on en déduit

$$v_{1x} = \frac{p_\mathrm{m} k_x}{\mu_0 \omega} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(\omega t)$$

$$v_{1y} = \frac{p_\mathrm{m} k_y}{\mu_0 \omega} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(\omega t)$$

$$v_{1z} = \frac{p_\mathrm{m} k_z}{\mu_0 \omega} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(\omega t)$$

La vitesse normale aux parois étant nulle sur chaque paroi, les conditions aux limites s'écrivent

$$v_{1x} = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = L$$

$$v_{1y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } y = D$$

$$v_{1z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = D$$

Les conditions en $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ sont vérifiées.
La condition en $x = L$ s'écrit $\sin(k_x L) = 0$, soit $k_x L = n_1\pi$,
la condition en $y = D$ s'écrit $\sin(k_y D) = 0$, soit $k_y D = n_2\pi$,
la condition en $z = D$ s'écrit $\sin(k_z D) = 0$, soit $k_z D = n_2\pi$, où n_1 et n_2 et n_3 sont trois entiers.
On a donc

$$\boxed{k_x = \frac{n_1\pi}{L}} \;;\quad \boxed{k_y = \frac{n_2\pi}{D}} \;;\quad \boxed{k_z = \frac{n_3\pi}{D}}\,.$$

3. La relation de dispersion s'écrit donc, avec $\omega = 2\pi f$:

$$\frac{n_1^2\pi^2}{L^2} + \frac{n_2^2\pi^2}{D^2} + \frac{n_3^2\pi^2}{D^2} = \frac{4\pi^2 f^2}{c^2}$$

d'où

$$\boxed{f_{n_1 n_2 n_3} = \sqrt{n_1^2\frac{c^2}{4L^2} + n_2^2\frac{c^2}{4D^2} + n_3^2\frac{c^2}{4D^2}}}$$

4. Les modes propres sont caractérisés par les triplets (n_1, n_2, n_3). Comme $D \gg L$, la plus basse fréquence, qui correspond au mode fondamental, est donnée par $n_1 = 1$ et $n_2 = n_3 = 0$, soit

$$f_{100} = \frac{c}{2L}$$

Les modes correspondant à $n_2 = n_3 = 0$ correspondent aux harmoniques de fréquence multiple de celle du fondamental :

$$f_{n_1 00} = n_1\frac{c}{2L} = n_1 f_{100}$$

donnant un son harmonieux.
La fréquence minimale non multiple du fondamental f_{100} correspond à $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ et $n_3 = 0$ (ou $n_2 = 0$ et $n_3 = 1$), soit

$$f_\mathrm{m} = f_{010} = \frac{c}{2D}$$

On calcule $\boxed{f_\mathrm{m} = 17\ \mathrm{kHz}}$. Cette valeur est à la limite supérieure de la bande passante de l'oreille ; les sons non harmonieux sont alors inaudibles.

7 — Dispersion dans une chaîne infinie d'atomes [***]

1. On applique le PFD à la masse de rang n :

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2} = -K(x_n - x_{n-1}) - K(x_n - x_{n+1})}\,.$$

2. Écrivons que $\underline{x}_n = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kX_n)}$ vérifie l'équation précédente :

$$-m\omega^2 = -K\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}\right) - K\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\right)$$

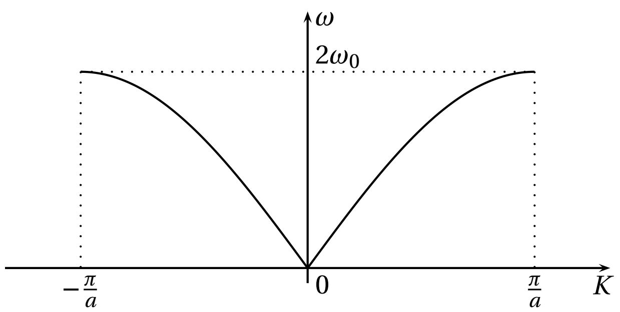
soit

$$m\omega^2 = K\left(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\right) = K(2 - 2\cos ka)$$
$$= 2K(1 - \cos ka) = 4K\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

soit

$$\boxed{\omega = 2\omega_0\left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}\,.$$

3. Si $\omega > 2\omega_0$, aucune valeur réelle de k satisfait la relation de dispersion : il n'y a pas de propagation possible.
La chaîne se comporte donc comme un **filtre passe-bas** de pulsation de coupure $\boxed{\omega_\mathrm{c} = 2\omega_0}$.
Compte tenu de la périodicité de la relation de dispersion, on peut la représenter pour $-\pi/a < k < \pi/a$:



4. Le cas $\omega \ll \omega_\mathrm{c}$ correspond à $\dfrac{ka}{2} \ll 1$; la relation de dispersion peut se linéariser selon

$$\omega = 2\omega_0\frac{ka}{2}$$

soit

$$\boxed{\omega = a\omega_0 k}\,.$$

On a alors

$$\boxed{v_\varphi = v_\mathrm{g} = a\omega_0 = a\sqrt{\frac{K}{m}}}\,.$$

Le phénomène est alors non dispersif.

8 — Propagation d'un signal électrique dans un axone [**]

1. La loi des mailles s'écrit

$$u(x+\mathrm{d}x,t)+r_\mathrm{a}\,\mathrm{d}x\,i(x,t)-u(x,t)=0$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=-r_\mathrm{a}\,i(x,t)}\,.$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i(x,t)=i(x+\mathrm{d}x,t)+g_\mathrm{m}\,\mathrm{d}x\,u(x,t)+c_\mathrm{m}\,\mathrm{d}x\frac{\partial u}{\partial t}$$

soit

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x}=g_\mathrm{m}\,u(x,t)+c_\mathrm{m}\frac{\partial u}{\partial t}}\,.$$

2. En éliminant l'intensité, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=g_\mathrm{m}r_\mathrm{a}\,u(x,t)+r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}}\,.$$

On a en ordre de grandeur pour une onde harmonique $\dfrac{\partial u}{\partial t}\approx\omega u$.
Si $r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}\omega\gg g_\mathrm{m}r_\mathrm{a}$, soit si

$$\omega\gg\omega_\mathrm{c}=\frac{g_\mathrm{m}}{c_\mathrm{m}}$$

on peut écrire

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}\frac{\partial u}{\partial t}}\,.$$

3. On retrouve l'équation de la diffusion. Elle décrit aussi la diffusion de particules, la diffusion thermique.

4. En écrivant que $\underline{u}(x,t)=\underline{u}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\underline{k}x)}$ est solution de l'équation précédente on obtient

$$-\underline{k}^2=\mathrm{j}\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}$$

soit la relation de dispersion

$$\boxed{\underline{k}^2=-\mathrm{j}\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}\,.$$

On peut écrire

$$\underline{k}=\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$$

d'où

$$\underline{k}=\sqrt{\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}=\sqrt{\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}\,\frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\,.$$

On a donc $\underline{k}=k'(\omega)+\mathrm{j}k''(\omega)$ avec

$$\boxed{k'(\omega)=\sqrt{\frac{\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}{2}}}\quad\text{et}\quad\boxed{k''(\omega)=-\sqrt{\frac{\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}{2}}}\,.$$

On a $k''<0$: le milieu est absorbant.
La vitesse de phase vaut

$$v_\varphi=\frac{\omega}{k'}=\omega\sqrt{\frac{2}{\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}}$$

soit

$$\boxed{v_\varphi=\sqrt{\frac{2\omega}{r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}}}\,.$$

Elle dépend de ω : le milieu est dispersif.
On a

$$k'^2=\frac{r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}\omega}{2}$$

d'où

$$2k'\,\mathrm{d}k'=\frac{r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}{2}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

On en déduit

$$v_\mathrm{g}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}=\frac{4k'}{r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}=\frac{4}{r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}\sqrt{\frac{\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}{2}}}$$

soit

$$\boxed{v_\mathrm{g}=\sqrt{\frac{8\omega}{r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}}}\,.$$

On a $\boxed{v_\mathrm{g}=2v_\varphi}$.

5. L'onde s'atténue sur la distance caractéristique $\delta=-1/k''$ soit

$$\boxed{\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega r_\mathrm{a}c_\mathrm{m}}}}\,.$$

Cette distance est d'autant plus petite que la fréquence est élevée : on retrouve l'effet de peau.