

TD ondes n° 5

Dispersion & absorption — solution

1 — Pavillon acoustique

1. En l'absence d'onde, le volume de la tranche considérée est

$$\delta V_0 = S(x) dx.$$

En présence d'onde, la tranche est comprise entre les plans d'abscisses

$$x + u(x, t) \quad \text{et} \quad x + dx + u(x + dx, t).$$

La longueur de la tranche est donc

$$d\ell = dx + u(x + dx, t) - u(x, t) = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

La position de la tranche étant à l'abscisse $x + u(x, t)$, la section à considérer au premier ordre est

$$S(x + u) = S(x) + u(x, t) \frac{dS}{dx}.$$

Le volume de la tranche perturbée est donc

$$\delta V = S(x + u) d\ell = \left(S(x) + u(x, t) \frac{dS}{dx} \right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

La variation de volume vaut donc

$$d(\delta V) = \delta V - \delta V_0 = \left(u \frac{dS}{dx} + S \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} S(x) \right) dx$$

La perturbation $u(x, t)$ étant un infiniment petit, le terme $u \frac{\partial u}{\partial x} S(x)$ est d'ordre deux. Au premier ordre, la variation de volume s'écrit

$$d(\delta V) = \left(u \frac{dS}{dx} + S \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \frac{d(Su)}{dx} dx.$$

La variation relative de volume vaut donc

$$\frac{d(\delta V)}{\delta V_0} = \frac{1}{S(x), dx} \frac{d(Su)}{dx} dx$$

soit

$$\frac{d(\delta V)}{\delta V_0} = \frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x}.$$

On considère une tranche de fluide située, au repos, entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Déterminer sa variation relative de volume lorsqu'elle est perturbée.

2. L'équation de la dynamique linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

soit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Le coefficient de compressibilité isentropique est défini par

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\frac{\delta V}{V} \frac{1}{\delta P}$$

où δV est la variation de volume entraînée par une variation δP de pression.

La variation de pression est ici la surpression acoustique $p(x, t)$. On retrouve la variation relative de volume

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x}.$$

On a donc

$$\chi_S = -\frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \frac{1}{p}$$

d'où

$$p = -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial(Su)}{\partial x}.$$

3. La vitesse est reliée au déplacement selon

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(Su)}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial(Sv)}{\partial x}. \end{aligned}$$

De plus

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\mu_0 \chi_S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial(Sv)}{\partial x} \right)$$

soit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial(Sv)}{\partial x} \right) \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}.$$

On a de plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{S}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

4. L'équation vérifiée par $v(x, t)$ dévient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} v \right) = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + 2mv \right)$$

soit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2mc^2 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

L'équation vérifiée par $p(x, t)$ dévient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial p}{\partial x} + c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2mc^2 \frac{\partial p}{\partial x}.$$

On obtient la même équation.

5. Écrivons que $\underline{v} = V_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ vérifie l'équation d'onde :

$$-\omega^2 = -\underline{k}^2 c^2 - 2mc^2 j \underline{k}$$

soit

$$\underline{k}^2 + 2j m \underline{k} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

6. L'équation précédente est une équation du second degré dont le discriminant réduit est

$$\Delta' = -m^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_c = mc.$$

Si $\omega < \omega_c$, on a $\Delta' < 0$ et la solution de la relation de dispersion est

$$\underline{k} = -jm \pm j \sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c^2}}.$$

Le nombre d'onde est imaginaire pur : $k' = 0$; il n'y a donc pas de propagation (on obtient une onde évanescente).

Si $\omega > \omega_c$, on a $\Delta' > 0$ et

$$\underline{k} = -jm \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}}.$$

Le nombre d'onde possède une partie réelle non nulle : il y a propagation.

Le pavillon se comporte donc comme un filtre passe-haut : il y a propagation si $\omega > \omega_c$.

On calcule $\omega_c = 343 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

7. En choisissant le signe de façon à avoir une onde se propageant dans le sens des x croissants, on a $\underline{k} = k' + jk''$, avec

$$k' = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad k'' = -m.$$

On a alors

$$\underline{v}(x, t) = V_0 e^{-mx} \exp \left(j \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}} x \right) \right)$$

soit pour l'onde réelle

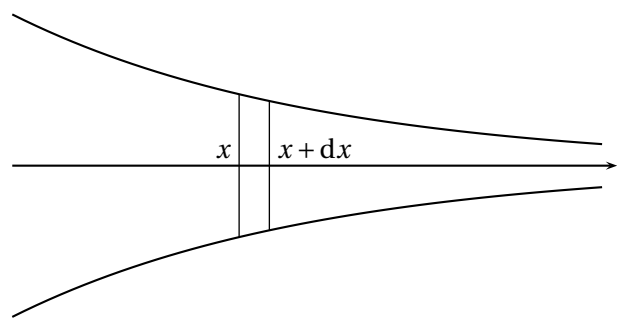
$$v(x, t) = V_0 e^{-mx} \cos \left[\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}} x \right) \right]$$

Il s'agit d'une onde se propageant selon les x croissants, dont l'amplitude s'atténue sur une distance caractéristique $\delta = -1/m$.

8. Se reporter au cours.

2 — Cornet acoustique

1. On considère la tranche comprise entre les abscisses x et $x + dx$:



La masse de ce système est

$$\delta m(x, t) = \mu(x, t) S(x) dx.$$

Pendant dt , elle varie de

$$d(\delta m) = \delta m(x, t + dt) - \delta m(x, t) = \frac{\partial \mu_1}{\partial t} S(x) dx dt.$$

La masse reçue par ce système pendant dt est

$$\begin{aligned} \delta^2 m_{\text{reçu}} &= \mu(x, t) v_1(x, t) S(x) dt \\ &\quad - \mu(x + dx, t) v_1(x + dx, t) S(x + dx) dt \\ &= - \frac{\partial (\mu(x, t) v_1(x, t) S(x))}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

En se limitant au premier ordre, comme $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$, on a

$$\begin{aligned} \delta^2 m_{\text{reçu}} &= -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} S(x) dx dt - \mu_0 v_1 \frac{dS}{dx} dx dt \\ &= -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} S(x) dx dt + \mu_0 \sigma v_1 S(x) dx dt \end{aligned}$$

avec $S(x) = S_0 e^{-\sigma x}$.

Le bilan $d(\delta m) = \delta^2 m_{\text{reçu}}$, conduit alors à

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1.$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

L'équation linéarisée traduisant l'adiabaticité de l'évolution s'écrit

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1.$$

2. La conservation de la matière s'écrit alors

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \sigma v_1.$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} + \mu_0 \sigma \frac{\partial v_1}{\partial t}.$$

D'après l'équation d'Euler, on a donc

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Avec $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_S}$, on en déduit l'équation d'onde vérifiée par la surpression :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \sigma c^2 \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

► Ce n'est pas l'équation de d'Alembert; cependant, dans le cas d'un tuyau de section constante, caractérisé par $\sigma = 0$, on retrouve bien l'équation de d'Alembert, le phénomène étant unidimensionnel.

En cherchant une solution proportionnelle à $\exp[i(\omega t - kx)]$, on obtient

$$-\omega^2 = -\underline{k}^2 c^2 + i \underline{k} \sigma c^2,$$

d'où la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 - i \sigma \underline{k} - \omega^2 / c^2 = 0.$$

Le discriminant de la relation de dispersion s'écrit

$$\Delta = (-i\sigma)^2 + \frac{4\omega^2}{c^2} = \frac{4\omega^2}{c^2} - \sigma^2.$$

Il apparaît une pulsation caractéristique $\omega_c = \frac{\sigma c}{2}$.

1^{er} cas : $\omega < \omega_c$. On a $\Delta < 0$, et

$$\underline{k} = \frac{i\sigma \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Le module d'onde est imaginaire pur : il n'y a pas de propagation possible (pas de partie réelle pour \underline{k}); on observe une onde évanescence.

2^e cas : $\omega > \omega_c$. On a $\Delta > 0$, et

$$\underline{k} = \frac{i\sigma \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{i\sigma}{2} \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}.$$

La surpression s'écrit alors

$$\underline{p}_1(x, t) = \underline{p}_{01} e^{i(\omega t \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} x)} e^{-i(\frac{i\sigma}{2} x)}.$$

On conserve la solution correspondant à une progression dans le sens des x croissants, soit

$$\underline{p}_1(x, t) = \underline{p}_{01} e^{i(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} x)} e^{\frac{\sigma}{2} x}.$$

On a donc

$$p_1(x, t) = p_{10} e^{\frac{\sigma}{2} x} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_\varphi} + \varphi \right) \right]$$

La partie imaginaire $k'' = \frac{\sigma}{2} > 0$ se traduit pas une **amplification** de l'amplitude de l'onde acoustique (c'est le rôle du cornet!). Cette amplification n'est pas due au milieu de propagation, mais à la géométrie du système.

La partie réelle $k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$ traduit la propagation de l'onde à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$.

En conclusion :

- le cornet permet de transmettre les ondes de pulsation $\omega > \omega_c = \frac{\sigma c}{2}$; il se comporte donc comme un filtre passe-haut;
- lorsque les ondes sont transmises, le cornet réalise une amplification, d'autant plus important que σ est grand (c'est-à-dire que la section du cornet diminue rapidement), mais la fréquence de coupure f_c est alors plus élevée;
- la propagation, quand elle se produit, est dispersive : c'est un amplificateur de piètre qualité musicale.

3 — Équation des télégraphistes

1. Loi des mailles :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + r i(x, t) dx + \lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} dx,$$

soit

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = r i(x, t) + \lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}.$$

Loi des nœuds :

$$i(x, t) = g u(x + dx, t) dx + \gamma \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} dx + i(x + dx, t)$$

soit

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = g u(x, t) + \gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -r \frac{\partial i}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = r g u(x, t) + r \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \\ &= r g u(x, t) + r \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda g \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r \gamma + \lambda g) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u(x, t).$$

2. On retrouve l'équation de d'Alembert dans le cas où et
 — $r = 0$, la résistance des conducteurs est négligeable;
 — $g = 0$, la résistance de fuite de l'isolant est infinie.

On a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma}}.$$

3. L'équation d'onde conduit à

$$-\underline{k}^2 = -\omega^2 \gamma \lambda + j\omega(r\gamma + \lambda g) = rg$$

soit avec l'expression de c

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega(r\gamma + \lambda g) - rg.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \underline{k}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - j \frac{(r\gamma + \lambda g)c^2}{\omega} - \frac{rgc^2}{\omega^2} \right] \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - j \frac{r\gamma + \lambda g}{\omega \lambda \gamma} - \frac{rg}{\omega^2 \lambda \gamma} \right] \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - j \left(\frac{r}{\lambda \omega} + \frac{g}{\gamma \omega} \right) - \left(\frac{r}{\lambda \omega} \frac{g}{\gamma \omega} \right) \right].$$

L'expression proposée s'écrivant

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [1 - j(a + b) - ab]$$

on identifie facilement

$$a = \frac{r}{\lambda \omega} \quad \text{et} \quad b = \frac{g}{\gamma \omega}.$$

4. La condition de Heaviside s'écrit

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{g}{\gamma},$$

et la relation de dispersion devient

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - 2j \frac{r}{\lambda \omega} - \frac{r^2}{\lambda^2 \omega^2} \right].$$

En notant $\underline{k} = k_r + jk_i$, on a

$$\underline{k}^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2jk_r k_i.$$

Par identification avec la relation de dispersion :

$$k_r^2 - k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{r^2}{\lambda^2 \omega^2} \right] \quad \text{et} \quad 2k_r k_i = -2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r}{\lambda \omega}.$$

On identifie facilement

$$k_r = \frac{\omega}{c}$$

$$k_i = -\frac{\omega}{c} \frac{r}{\lambda \omega} = -\frac{r}{c \lambda} = -\frac{r}{\lambda} \sqrt{\gamma \lambda}$$

soit

$$k_i = -r \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}.$$

La vitesse de phase vaut $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = c$: la propagation n'est pas dispersive.

On a $k_i < 0$: il y a absorption de l'onde au cours de sa propagation. L'onde peut s'écrire

$$\underline{u}(x, t) = \underline{u}_0 e^{k_i x} \cos^{j(\omega t - k_r x)} = \underline{u}_0 e^{-x/\delta} \cos^{j(\omega t - k_r x)}.$$

L'absorption se fait sur une distance caractéristique $\delta =$

$$-\frac{1}{k_i}, \text{ soit } \delta = -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}.$$

4 — Corde vibrante verticale

1. Considérons l'élément de corde compris en l'abscisse z et l'extrémité $z = L$, de masse $m = \lambda(L - z)$. Il est soumis :

- à son poids $m \vec{g} = \lambda(L - z)g \vec{e}_z$;
- à la tension $\vec{T} = -T(z) \vec{e}_z$ au point de jonction avec la partie supérieure de la corde.

L'élément de corde étant au repos, la condition d'équilibre s'écrit, en projection sur \vec{e}_z :

$$\lambda(L - z)g - T(z) = 0, \tag{1}$$

d'où

$$T(z) = \lambda(L - z)g.$$

2. On note $\alpha(z, t)$ l'angle que fait la tangente à la corde en z avec la verticale; on considère des oscillations de faible amplitude : $|\alpha| \ll 1$. La projection selon \vec{e}_z du principe de la dynamique appliqué à l'élément de corde précédent conduit à

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda g dz + T(z + dz, t) \cos \alpha(z + dz, t) - T(z) \cos \alpha(z, t) \\ &\simeq \lambda g dz + T(z + dz, t) - T(z, t) \end{aligned}$$

On retrouve l'équation(1); au premier ordre, la tension reste indépendante du temps et est donnée par $T(z) = \lambda(L - z)g$.

La projection selon \vec{e}_x du principe de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \lambda dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= T(z + dz) \sin \alpha(z + dz, t) - T(z) \sin \alpha(z, t) \\ &\simeq T(z + dz) \alpha(z + dz, t) - T(z) \alpha(z, t) \\ &= \frac{\partial(T(z) \alpha(z, t))}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Comme $\alpha(z, t) \simeq \tan \alpha(z, t) = \frac{\partial x}{\partial z}$, on a

$$\lambda \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(L-z)g \frac{\partial x}{\partial z} \right] = -\lambda g \frac{\partial x}{\partial z} + \lambda g(L-z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

L'équation d'onde s'écrit donc

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(L-z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

3. En tenant compte du frottement visqueux, le principe de la dynamique s'écrit, en projection sur \vec{e}_x :

$$\lambda dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T(z+dz) \sin \alpha(z+dz, t) - T(z) \sin \alpha(z, t) - \alpha \frac{\partial x}{\partial t} dz.$$

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, on obtient :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial x}{\partial t}.$$

4. Avec la solution proposée, l'équation d'onde s'écrit

$$-\omega^2 \underline{x}_0 = -k^2 g(L-z) \underline{x}_0 + ikg \underline{x}_0 - i\omega \frac{\alpha}{\mu} \underline{x}_0$$

Elle admet une solution $x_0 \neq 0$ si :

$$\omega^2 - k^2 g(L-z) + i \left[kg - \omega \frac{\alpha}{\mu} \right] = 0.$$

Le complexe $\omega^2 - k^2 g(L-z) + i \left[kg - \omega \frac{\alpha}{\mu} \right]$ est nul si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont nulles.

On a donc d'une part $kg - \omega \frac{\alpha}{\mu} = 0$, d'où la valeur du coefficient de frottement $\alpha_0 = g\mu \frac{k}{\omega}$.

D'autre part, on a $\omega^2 - k^2 g(L-z) = 0$, d'où

$$\omega = k\sqrt{g(L-z)} \simeq k\sqrt{gL}$$

avec $z \ll L$. On a donc $\alpha_0 = g\mu \frac{k}{k\sqrt{gL}}$, soit

$$\alpha_0 = \mu \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

5. Si $\alpha = \alpha_0$, on a $\omega = k\sqrt{g(L-z)} \simeq k\sqrt{gL}$, et la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ est donnée par $v_\varphi = \sqrt{gL}$.

La vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ est alors donnée par

$$v_g = \sqrt{gL}.$$

On a $v_\varphi = v_g$ indépendant de la pulsation ω : le petit fond grisil n'y a pas dispersion.

6. Avec la solution proposée, l'équation d'onde s'écrit

$$-\omega^2 \underline{a} = ikg \underline{a} - g(L-z) \underline{k}^2 \underline{a} \simeq ikg \underline{a} - gL \underline{k}^2 \underline{a}$$

en négligeant les frottements et si $z \ll L$. Le nombre d'onde \underline{k} doit donc vérifier l'équation

$$gL \underline{k}^2 - ig \underline{k} - \omega^2 = 0.$$

En posant $\underline{k} = k_1 + ik_2$, on a donc

$$gL(k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1 k_2) - ig(k_1 + ik_2) - \omega^2 = 0$$

soit :

$$gL(k_1^2 - k_2^2) + gk_2 - \omega^2 + igk_1(2Lk_2 - 1) = 0. \quad (2)$$

La partie imaginaire de l'équation (2) doit être nulle,

d'où $k_2 = \frac{1}{2L}$.

La solution $k_1 = 0$ est à rejeter car elle ne correspond pas à une onde se propageant.

L'élongation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \underline{x}(z, t) &= \underline{x}_0 \exp(i(\omega t - k_1 z - ik_2 z)) \\ &= \underline{x}_0 \exp(k_2 z) \exp(i(\omega t - k_1 z)) \end{aligned}$$

avec $k_2 > 0$. L'amplitude de l'onde augmente comme $\exp(k_2 z)$ pendant la propagation.

À la question 4, nous avons trouvé qu'une onde progressive (non amortie) pouvait exister avec des frottements, si le coefficient de frottement a la valeur α_0 .

Il est donc cohérent de trouver une augmentation de l'amplitude en l'absence de frottement ; ce terme d'amplification s'oppose exactement au terme de frottement lorsque $\alpha = \alpha_0$.

7. La partie imaginaire de l'équation (2) étant nulle, on obtient la relation de dispersion :

$$gL(k_1^2 - k_2^2) + gk_2 - \omega^2 = 0$$

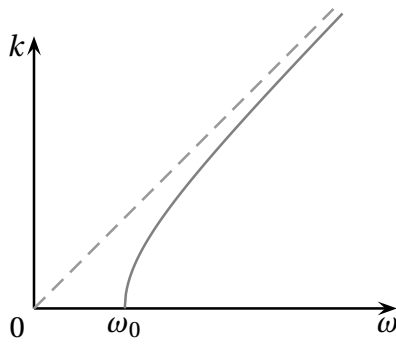
avec $k_2 = \frac{1}{2L}$, soit $k_1^2 + \frac{1}{4L^2} - \frac{\omega^2}{gL} = 0$.

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{4L}$, on a $4Lk_1^2 + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0$, d'où :

$$k_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}.$$

Pour que k_1 soit réel, il faut donc $\omega > \omega_0$: la corde se comporte comme un filtre passe-haut.

Représentons le nombre d'onde k en fonction de la pulsation ω :



La courbe $k(\omega)$ est une branche d'hyperbole, admettant pour asymptote la droite $k = \frac{\omega}{\sqrt{gL}}$.

8. On a $k_1^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4L^2\omega^2} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{gL}$. En différenciant cette

relation, on obtient $2k_1 dk_1 = \frac{2\omega d\omega}{gL}$, soit $\frac{\omega}{k_1} \frac{d\omega}{dk_1} = gL$.

On a donc $v_\varphi v_g = gL$.

5 — Chaîne infinie de pendules couplés

1. Appliquons le théorème du moment cinétique en O_n , projeté sur l'axe Ox , au pendule (n) . Ce pendule est soumis à son poids $m\vec{g}$, qui s'applique en son centre de gravité G_n , de moment

$$\overrightarrow{O_n G_n} \wedge m\vec{g} = -\frac{L}{2} mg \sin(\theta_n) \vec{e}_x.$$

Le couple de rappel exercé par le fil de torsion compris entre O_{n-1} et O_n est $-C(\theta_n - \theta_{n-1}) \vec{e}_x$; le fil de torsion compris entre O_n et O_{n+1} exerce le couple de rappel $-C(\theta_n - \theta_{n+1}) \vec{e}_x$. La projection selon \vec{e}_x du théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\frac{mL^2}{3} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = C[\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}] - \frac{mgL}{2} \sin\theta_n - \alpha \frac{d\theta_n}{dt}.$$

Dans le cas des oscillations de faible amplitude, on peut linéariser $\sin\theta_n \approx \theta_n$ et l'équation du mouvement devient :

$$\frac{mL^2}{3} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = C[\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}] - \frac{mgL}{2} \theta_n - \alpha \frac{d\theta_n}{dt}$$

2. On peut alors remplacer θ_{n-1} et θ_{n+1} dans l'équation précédente par leur développement de Taylor au voisinage de $x = nd$:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}(t) = \theta(x+d, t) &= \theta(x, t) + d \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ &= \theta_n(t) + d \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \theta_{n-1}(t) = \theta(x-d, t) &= \theta(x, t) - d \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ &= \theta_n(t) - d \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

On a alors $\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1} = d^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ et l'équation de récurrence s'écrit :

$$\frac{mL^2}{3} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Cd^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mgL}{2} \theta(x, t) - \alpha \frac{\partial\theta}{\partial t}. \quad (3)$$

Nous obtenons une équation d'onde, qui n'est pas l'équation de d'Alembert.

3. Écrivons que l'onde

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{\theta}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$$

est solution de l'équation d'onde précédente. Après simplification par $\exp(i(\omega t - \underline{k}x))$, on obtient

$$-\omega^2 \frac{mL^2}{3} \underline{A} = \left[-\underline{k}^2 Cd^2 - \frac{mgL}{2} + i\omega\alpha \right] \underline{\theta}_0.$$

L'onde cherchée est solution si $\underline{\theta}_0 \neq 0$, soit si :

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2} \omega^2 - \frac{mgL}{2Cd^2} - i \frac{\omega\alpha}{Cd^2}. \quad (4)$$

Cette relation entre \underline{k} et ω est appelée relation de dispersion.

4.a) Si $\alpha = 0$, la relation de dispersion (4) devient :

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2} \omega^2 - \frac{mgL}{2Cd^2} = \frac{mL^2}{3Cd^2} \left[\omega^2 - \frac{3g}{2L} \right].$$

Elle est de la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$$

avec

$$\omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2}}.$$

4.b) Si $\omega > \omega_c$, on a $\underline{k}^2 > 0$. Le nombre d'onde est réel :

$$k'(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2} \left[\omega^2 - \frac{3g}{2L} \right]}.$$

Il y a propagation. La vitesse de phase vaut

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2 - \frac{3mgL}{2\omega^2}}}.$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation : **la propagation est dispersive**. Comme $k'' = 0$, il n'y a pas absorption.

Si $\omega < \omega_c$, on a $\underline{k}^2 < 0$. Le nombre d'onde est imaginaire pur :

$$k = ik'' = \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c},$$

soit

$$k'' = \pm \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2} \sqrt{\frac{3g}{2L} - \omega^2}}.$$

Il y a donc absorption. Comme $k' = 0$, **il n'y a pas propagation.**

5. Si ω est élevé, on peut négliger le terme constant devant le terme en ω^2 de la partie réelle de \underline{k}^2 dans la relation (4). Il faut donc

$$\frac{mL^2}{3Cd^2} \omega^2 \gg \frac{mgL}{2Cd^2}$$

soit

$$\omega \gg \sqrt{\frac{3g}{2L}}.$$

Cela revient à

$$\omega \gg \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

La pulsation de l'onde doit être grande devant la pulsation propre de chaque pendule pesant.

5.a)

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2} \omega^2 - \frac{i\alpha}{Cd^2} \omega = \frac{mL^2 \omega^2}{3Cd^2} \left[1 - i \frac{3\alpha}{mL^2 \omega} \right].$$

Le terme sans dimension $\frac{3\alpha}{mL^2 \omega}$ peut être considéré comme un infiniment petit quand ω est grand, d'où la linéarisation :

$$\begin{aligned} \underline{k} &= \sqrt{\frac{mL^2 \omega^2}{3Cd^2} \left[1 - i \frac{3\alpha}{mL^2 \omega} \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &\approx \sqrt{\frac{mL^2 \omega^2}{3Cd^2} \left[1 - i \frac{3\alpha}{2mL^2 \omega} \right]}. \end{aligned}$$

La relation de dispersion s'écrit alors :

$$\underline{k}(\omega) = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2} \omega - i\alpha \sqrt{\frac{3}{4mL^2 Cd^2}}} = k'(\omega) + ik''(\omega)$$

avec :

$$k'(\omega) = \sqrt{\frac{mL^2}{3Cd^2} \omega} \quad \text{et} \quad k''(\omega) = -\alpha \sqrt{\frac{3}{4mL^2 Cd^2}}.$$

5.b) Comme $k' \neq 0$, il y a propagation. La vitesse de phase vaut

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{3Cd^2}{mL^2}}.$$

Elle est indépendante de ω : **la propagation n'est pas dispersive.**

5.c) On a $k''(\omega) < 0$ (avec $k'(\omega) > 0$) : il y a absorption. On remarque que l'absorption est d'autant plus importante que le coefficient α caractéristique du couple de frottement est grand, ce qui était prévisible.

5.d) Si $\alpha = 0$, on a $k'' = 0$: on a un phénomène de propagation non dispersif, sans absorption. La relation de dispersion s'écrit alors

$$\underline{k}^2 = \frac{mL^2}{3Cd^2} \omega^2.$$

Considérer ω grand revient à négliger le terme dû à la pesanteur. L'équation d'onde est alors donnée par

$$\frac{mL^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = Cd^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

On retrouve l'équation de d'Alembert, qui décrit bien un phénomène non dispersif, sans absorption.

6 — Tuyau d'orgue

Commentaire préliminaire : l'onde sonore obéit à l'équation de d'Alembert. Nous cherchons ici une solution sous forme d'onde stationnaire. Le milieu étant borné, seuls des modes propres peuvent exister.

1. On écrit que $p_1(x, y, z, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

soit

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

On a donc $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

2. ➤ On ne peut pas utiliser la relation $p_1 = \mu_0 c v_1$ faisant intervenir l'impédance acoustique $Z_a = \mu_0 c$, car cette dernière n'est valable que pour une onde progressive ; nous avons ici une onde stationnaire.

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1.$$

La projection sur les trois axes donne

$$\mu_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = -k_x p_m \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t)$$

$$\mu_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = -k_y p_m \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t)$$

$$\mu_0 \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} = -k_z p_m \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t)$$

En intégrant par rapport au temps, on en déduit

$$v_{1x} = \frac{\rho_m k_x}{\mu_0 \omega} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(\omega t)$$

$$v_{1y} = \frac{\rho_m k_y}{\mu_0 \omega} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(\omega t)$$

$$v_{1z} = \frac{\rho_m k_z}{\mu_0 \omega} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t)$$

La vitesse normale aux parois étant nulle sur chaque paroi, les conditions aux limites s'écrivent

$$v_{1x} = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = L$$

$$v_{1y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ et } y = D$$

$$v_{1z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = D$$

Les conditions en $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ sont vérifiées.

La condition en $x = L$ s'écrit $\sin(k_x L) = 0$, soit $k_x L = n_1 \pi$,

la condition en $y = D$ s'écrit $\sin(k_y D) = 0$, soit $k_y D = n_2 \pi$,

la condition en $z = D$ s'écrit $\sin(k_z D) = 0$, soit $k_z D = n_3 \pi$, où n_1 et n_2 et n_3 sont trois entiers.

On a donc

$$k_x = \frac{n_1 \pi}{L}; \quad k_y = \frac{n_2 \pi}{D}; \quad k_z = \frac{n_3 \pi}{D}.$$

3. La relation de dispersion s'écrit donc, avec $\omega = 2\pi f$:

$$\frac{n_1^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n_2^2 \pi^2}{D^2} + \frac{n_3^2 \pi^2}{D^2} = \frac{4\pi^2 f^2}{c^2}$$

d'où

$$f_{n_1 n_2 n_3} = \sqrt{n_1^2 \frac{c^2}{4L^2} + n_2^2 \frac{c^2}{4D^2} + n_3^2 \frac{c^2}{4D^2}}$$

4. Les modes propres sont caractérisés par les triplets (n_1, n_2, n_3) . Comme $D \gg L$, la plus basse fréquence, qui correspond au mode fondamental, est donnée par $n_1 = 1$ et $n_2 = n_3 = 0$, soit

$$f_{100} = \frac{c}{2L}$$

Les modes correspondant à $n_2 = n_3 = 0$ correspondent aux harmoniques de fréquence multiple de celle du fondamental :

$$f_{n_1 0 0} = n_1 \frac{c}{2L} = n_1 f_{100}$$

donnant un son harmonieux.

La fréquence minimale non multiple du fondamental f_{100} correspond à $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ et $n_3 = 0$ (ou $n_2 = 0$ et $n_3 = 1$), soit

$$f_m = f_{010} = \frac{c}{2D}$$

On calcule $f_m = 17 \text{ kHz}$. Cette valeur est à la limite supérieure de la bande passante de l'oreille; les sons non harmonieux sont alors inaudibles.

7 — Dispersion dans une chaîne infinie d'atomes [***]

1. On applique le PFD à la masse de rang n :

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -K(x_n - x_{n-1}) - K(x_n - x_{n+1}).$$

2. Écrivons que $x_n = A e^{i(\omega t - k x_n)}$ vérifie l'équation précédente :

$$-m\omega^2 = -K(1 - e^{ika}) - K(1 - e^{-ika})$$

soit

$$m\omega^2 = K(2 - e^{ika} - e^{-ika}) = K(2 - 2 \cos ka)$$

$$= 2K(1 - \cos ka) = 4K \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

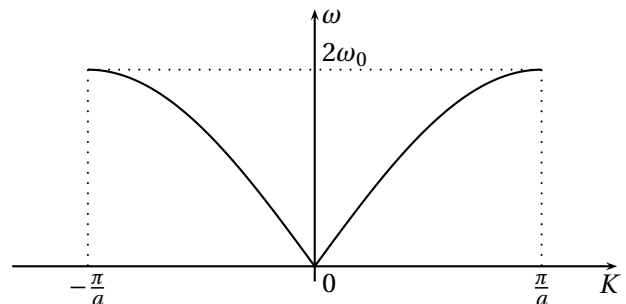
soit

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

3. Si $\omega > 2\omega_0$, aucune valeur réelle de k satisfait la relation de dispersion : il n'y a pas de propagation possible.

La chaîne se comporte donc comme un **filtre passe-bas** de pulsation de coupure $\omega_c = 2\omega_0$.

Compte tenu de la périodicité de la relation de dispersion, on peut la représenter pour $-\pi/a < k < \pi/a$:



4. Le cas $\omega \ll \omega_c$ correspond à $\frac{ka}{2} \ll 1$; la relation de dispersion peut se linéariser selon

$$\omega = 2\omega_0 \frac{ka}{2}$$

soit

$$\omega = a\omega_0 k.$$

On a alors

$$v_\varphi = v_g = a\omega_0 = a\sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Le phénomène est alors non dispersif.

8 — Propagation d'un signal électrique dans un axone d'où [**]

$$\underline{k} = \sqrt{\omega r_a c_m} e^{-j\pi/4} = \sqrt{\omega r_a c_m} \frac{1-j}{\sqrt{2}}.$$

1. La loi des mailles s'écrit

$$u(x+dx, t) + r_a dx i(x, t) - u(x, t) = 0$$

soit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -r_a i(x, t).$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i(x, t) = i(x+dx, t) + g_m dx u(x, t) + c_m dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

soit

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_m u(x, t) + c_m \frac{\partial u}{\partial t}.$$

2. En éliminant l'intensité, on obtient

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = g_m r_a u(x, t) + r_a c_m \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

On a en ordre de grandeur pour une onde harmonique

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \omega u.$$

Si $r_a c_m \omega \gg g_m r_a$, soit si

$$\omega \gg \omega_c = \frac{g_m}{c_m}$$

on peut écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t}.$$

3. On retrouve l'équation de la diffusion. Elle décrit aussi la diffusion de particules, la diffusion thermique.

4. En écrivant que $\underline{u}(x, t) = \underline{u}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ est solution de l'équation précédente on obtient

$$-\underline{k}^2 = j\omega r_a c_m$$

soit la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = -j\omega r_a c_m.$$

On peut écrire

$$\underline{k} = \omega r_a c_m e^{-j\pi/2}$$

On a donc $\underline{k} = k'(\omega) + jk''(\omega)$ avec

$$k'(\omega) = \sqrt{\frac{\omega r_a c_m}{2}} \quad \text{et} \quad k''(\omega) = -\sqrt{\frac{\omega r_a c_m}{2}}.$$

On a $k'' < 0$: le milieu est absorbant.

La vitesse de phase vaut

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \omega \sqrt{\frac{2}{\omega r_a c_m}}$$

soit

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{r_a c_m}}.$$

Elle dépend de ω : le milieu est dispersif.

On a

$$k'^2 = \frac{r_a c_m \omega}{2}$$

d'où

$$2k' dk' = \frac{r_a c_m}{2} d\omega.$$

On en déduit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{4k'}{r_a c_m} = \frac{4}{r_a c_m \sqrt{\frac{\omega r_a c_m}{2}}}$$

soit

$$v_g = \sqrt{\frac{8\omega}{r_a c_m}}.$$

On a $v_g = 2v_\varphi$.

5. L'onde s'atténue sur la distance caractéristique $\delta = -1/k''$ soit

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega r_a c_m}}.$$

Cette distance est d'autant plus petite que la fréquence est élevée : on retrouve l'effet de peau.