

TD ondes n° 6

Interface & ondes acoustiques — solution

1 — Transmission par une paroi

1. La nature *a priori* complexe du coefficient \underline{t} traduit l'introduction d'un déphasage dans la pression lors de la traversée de la paroi.

On peut assimiler la paroi à une masse surfacique si son épaisseur est négligeable devant la longueur caractéristique de la propagation de l'onde, c'est-à-dire sa longueur d'onde : $a \ll \lambda$.

L'impédance acoustique du milieu pour une onde se propageant dans le sens des x croissants étant Z_0 , les champs de pression et de vitesse de l'onde incidente sont donnés par :

$$\begin{cases} \underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp(j(\omega t - kx)) \\ \underline{v}_i(x, t) = \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t - kx)) \end{cases}$$

Lors que cette onde rencontre la paroi, elle donne naissance à une onde réfléchie $\underline{p}_r(x, t)$ et $\underline{v}_r(x, t)$ et à une onde transmise $\underline{p}_t(x, t)$ et $\underline{v}_t(x, t)$.

En notant \underline{r} le coefficient de réflexion, *a priori* complexe, la suppression de l'onde réfléchie vérifie au niveau de la paroi $\underline{p}_r(0, t) = \underline{r}\underline{p}_i(0, t)$.

L'impédance acoustique du milieu pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants étant $-Z_0$, on a $\underline{v}_r(x, t) = -\frac{\underline{p}_r(x, t)}{Z_0}$; on en déduit les champs de l'onde réfléchie :

$$\begin{cases} \underline{p}_r(x, t) = \underline{r}p_{i0} \exp(j(\omega t + kx)) \\ \underline{v}_r(x, t) = -\underline{r}\frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t + kx)) \end{cases}$$

L'impédance acoustique du milieu valant Z_0 pour l'onde transmise, qui se propage dans le sens des x croissants, on en déduit :

$$\begin{cases} \underline{p}_t(x, t) = \underline{t}p_{i0} \exp(j(\omega t - kx)) \\ \underline{v}_t(x, t) = \underline{t}\frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t - kx)) \end{cases}$$

L'onde acoustique est donnée, en $x < 0$, par la superposition des ondes incidente et réfléchies, et en $x > 0$ par l'onde transmise.

On en déduit le champ de pression acoustique.

Pour $x < 0$:

$$\underline{p}(x, t) = p_{i0} \exp(j(\omega t - kx)) + \underline{r}p_{i0} \exp(j(\omega t + kx))$$

Pour $x > 0$:

$$\underline{t}p_{i0} \exp(j(\omega t - kx))$$

Champ des vitesses.

Pour $x < 0$:

$$\underline{v}(x, t) = \frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t - kx)) - \underline{r}\frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t + kx))$$

Pour $x > 0$:

$$\underline{v}(x, t) = \underline{t}\frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j(\omega t - kx))$$

La vitesse normale (qui s'identifie à la vitesse du fluide, l'onde étant longitudinale) du fluide au contact avec la paroi est égale à la vitesse de la paroi; cette condition, qui s'écrit $\underline{v}(x = 0, t) = \underline{v}(x = a, t)$ dans le cas général, s'écrit comme une condition de continuité si l'on néglige l'épaisseur de la paroi :

$$\underline{v}(x = 0^-, t) = \underline{v}(x = 0^+, t) \quad \forall t$$

En utilisant l'expression du champ de vitesse, on en déduit

$$\frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j\omega t) - \underline{r}\frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j\omega t) = \underline{t}\frac{p_{i0}}{Z_0} \exp(j\omega t),$$

d'où

$$1 - \underline{r} = \underline{t}$$

Considérons une surface S de la paroi. Elle est soumise à la pression $p(x = 0^-, t)$ à gauche, et à la pression $p(x = 0^+, t)$ à droite; le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système de masse σS s'écrit

$$\sigma S \frac{\partial \underline{v}(0, t)}{\partial t} = S\underline{p}(0^-, t) - S\underline{p}(0^+, t),$$

soit

$$\sigma j\omega \frac{t}{Z_0} p_{i0} \exp(j\omega t) = p_{i0} \exp(j\omega t) + \underline{r}p_{i0} \exp(j\omega t) - \underline{t}p_{i0} \exp(j\omega t),$$

d'où :

$$j\frac{\sigma\omega}{Z_0} \underline{t} = 1 + \underline{r} - \underline{t}$$

De l'équation précédente, et avec $1 - \underline{r} = \underline{t}$, on déduit

$$2 = \left(2 + j\frac{\sigma\omega}{Z_0}\right) \underline{t},$$

d'où l'expression du coefficient de transmission en surpression :

$$\underline{t} = \frac{1}{1 + j\frac{\sigma\omega}{2Z_0}}$$

2. L'intensité sonore incidente sur la paroi est donnée par

$$I_i = \langle |p_i(0, t) v_i(0, t)| \rangle = \langle p_i(0, t)^2 \rangle Z_0.$$

La surpression acoustique est donnée par

$$p_i(x, t) = \text{Re}(\underline{p}_i(x, t)) = p_{i0} \cos(\omega t - kx).$$

On en déduit :

$$I_i = \frac{p_{i0}^2}{Z_0} \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{p_{i0}^2}{2Z_0}.$$

L'intensité sonore transmise est donnée par

$$I_t = \frac{|t|^2 p_{i0}^2}{2Z_0}.$$

On en déduit le coefficient de transmission en puissance sonore $T = \frac{I_t}{I_i} = |t|^2$, soit

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \sigma^2}{4Z_0^2}}.$$

Il est de la forme $T = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$ avec $\omega_0 = \frac{2Z_0}{\sigma}$. On retrouve l'expression du gain d'un **filtre passe-bas** du premier ordre, de pulsation de coupure ω_c . La fréquence de coupure $f_c = \frac{\omega}{2\pi}$ vaut donc $f_c = \frac{Z_0}{\pi\sigma}$.

Le gain en décibels en transmission vaut

$$G_{dB} = 10 \log T(\omega) = -10 \log \left(1 + \frac{\omega^2 \sigma^2}{4Z_0^2} \right).$$

En basse fréquence ($\omega \ll \frac{2Z_0}{\sigma}$), on a $G_{dB} \approx 0 = G_{dB,BF}$, soit une asymptote horizontale.

En haute fréquence, ($\omega \gg \frac{2Z_0}{\sigma}$), on a

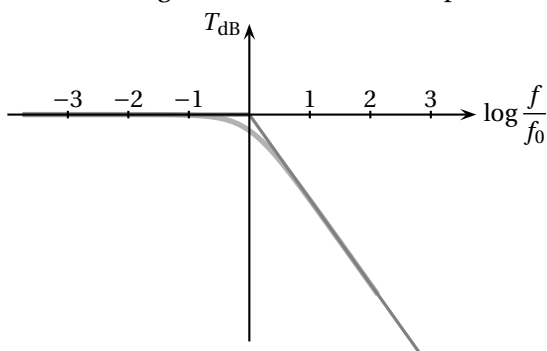
$$G_{dB} \approx -20 \log \left(\frac{\omega \sigma}{2Z_0} \right) = G_{dB,HF},$$

soit une asymptote de pente -20 dB/décade.

Les asymptotes se coupent en ω_0 tel que $G_{dB,BF}(\omega_0) = G_{dB,HF}(\omega_0)$, soit $0 = -20 \log \left(\frac{\omega_0 \sigma}{2Z_0} \right)$, donc pour

$$\omega_0 = \frac{2Z_0}{\sigma} = \omega_c.$$

Représentons le diagramme de Bode en amplitude :



3. Le gain en décibel étant donné par

$$G_{dB} = -10 \log \left(1 + \frac{f^2}{f_c^2} \right).$$

Un affaiblissement de 40 dB se produit à la fréquence f telle que

$$G_{dB}(f) = -40 = -10 \log \left(1 + \frac{f^2}{f_c^2} \right),$$

soit $G_{dB} = -20 \log \left(\frac{f}{f_c} \right) = -40$, un tel affaiblissement se situant dans le domaine linéaire (pente -20 dB/décade).

Pour $f = 100$ Hz, on déduit de $\frac{f}{f_c} = 10^2$ la valeur $f_c = \frac{f}{100} = 1$ Hz. La fréquence de coupure $f_c = 1$ Hz est située dans le domaine des infrasons.

La fréquence de coupure est donnée par

$$f_c = \frac{Z_0}{\pi\sigma} = \frac{\mu_{air} c}{\pi\sigma},$$

d'où $\sigma = \frac{\mu_{air} c}{\pi f_c}.$

Comme $\sigma = \mu_0 a$, on en déduit l'épaisseur du mur :

$$a = \frac{\mu_{air} c}{\pi f_c \mu_0}.$$

Dans le cas d'une paroi en brique, on calcule $a_{brique} = 14$ cm ; pour une paroi en béton cellulaire, on obtient $a_{béton} = 31$ cm.

Pour une fréquence $f = 100$ Hz, la longueur d'onde vaut $\lambda = \frac{c}{f} = 3,4$ m. Dans les deux cas envisagés, on a bien $a \ll \lambda$; l'hypothèse d'une masse surfacique est validée.

Une paroi se comportant comme un filtre passe-bas, elle filtre d'autant mieux les ondes acoustiques que sa fréquence de coupure est basse, donc que sa masse surfacique est élevée. Elle doit donc être épaisse et construite dans un matériau de masse volumique élevée. Les sons de basse fréquence sont les moins bien atténués par un mur.

2 — Couche anti-reflet en échographie

1. On calcule

$$T = \frac{4Z_a Z_m}{(Z_a + Z_m)^2} = 1,8 \times 10^{-3}.$$

Moins de 0,2 % de la puissance sonore est transmise à l'interface air-muscle. On peut réaliser une échographie si une couche d'air s'est immiscée entre la sonde et la peau.

2. Dans le milieu $x > e$, on propose une onde progressive dans le sens des x croissants : c'est l'onde transmise après la traversée de la couche de graisse.

Dans le milieu $x < 0$, on propose une onde progressive dans le sens des x croissants : on se place dans le cas où il n'y a pas d'onde réfléchie (principe de la couche anti-reflet).

Dans la couche de graisse, on a une onde progressive dans le sens des x croissants (issue de la transmission de l'onde incidente), et une onde progressive dans le sens des x décroissants (issue de la réflexion sur l'interface $x = e$).

3. Le champ de surpression est donné par

$$\begin{aligned} \underline{p}(x < 0) &= Z_a A_a e^{j(\omega t - k_a x)} \\ \underline{p}(x > e) &= Z_m A_m e^{j(\omega t - k_m x)} \\ \underline{p}(0 < x < e) &= Z_g \left(A_g e^{j(\omega t - k_g x)} - B_g e^{j(\omega t + k_g x)} \right) \end{aligned}$$

4. Les relations de passage à l'interface $x = 0$ s'écrivent après simplification par $e^{j\omega t}$:

$$A_a = A_g + B_g \quad (1)$$

et

$$Z_a A_a = Z_g [A_g - B_g]. \quad (2)$$

À l'interface $x = e$, on obtient de même

$$A_m e^{-jk_m e} = A_g e^{-jk_g e} + B_g e^{jk_g e} \quad (3)$$

et

$$Z_m A_m e^{-jk_m e} = Z_g [A_g e^{-jk_g e} - B_g e^{jk_g e}] \quad (4)$$

En formant (2)/(1) on obtient

$$Z_a = Z_g \frac{A_g - B_g}{A_g + B_g}$$

d'où

$$(Z_a + Z_g)B_g = (Z_g - Z_a)A_g. \quad (5)$$

En formant (4)/(3) on obtient

$$Z_m = Z_g \frac{A_g e^{-jk_g e} - B_g e^{jk_g e}}{A_g e^{-jk_g e} + B_g e^{jk_g e}}$$

soit

$$Z_m = Z_g \frac{A_g - B_g e^{2jk_g e}}{A_g + B_g e^{2jk_g e}}.$$

Avec (E5) on obtient

$$Z_m = Z_g \frac{1 - \frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} e^{2jk_g e}}{1 - \frac{Z_g + Z_a}{Z_g - Z_a} e^{2jk_g e}} = Z_g \frac{(Z_g + Z_a) - (Z_g - Z_a) e^{2jk_g e}}{(Z_g + Z_a) + (Z_g - Z_a) e^{2jk_g e}}$$

soit

$$\begin{aligned} Z_m \left[(Z_g + Z_a) + (Z_g - Z_a) e^{2jk_g e} \right] \\ = Z_g \left[(Z_g + Z_a) - (Z_g - Z_a) e^{2jk_g e} \right]. \end{aligned}$$

On factorise

$$(Z_g - Z_a)(Z_m + Z_g) e^{2jk_g e} = (Z_g - Z_m)(Z_g + Z_a) e^{2jk_g e}$$

d'où

$$e^{2jk_g e} = \frac{(Z_g - Z_m)(Z_g + Z_a)}{(Z_g - Z_a)(Z_g + Z_m)}.$$

L'égalité des parties imaginaires de l'équation précédente donne

$$\sin(2k_g e) = 0$$

d'où $2k_g e = n\pi$.

On a alors $\cos(2k_g e) = \pm 1$.

La solution $\cos(2k_g e) = 1$ conduit à

$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} = \frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m}$$

d'où $Z_a = Z_m$ ce qui est impossible (on a justement $Z_a \neq Z_m$).

Il faut donc $\cos(2k_g e) = -1$, d'où

$$2k_g e = (2n + 1)\pi.$$

Les valeurs possibles de l'épaisseur sont donc

$$e_g = (2n + 1) \frac{\pi}{2k_g} = (2n + 1) \frac{\lambda_g}{4}$$

où $\lambda_g = 2\pi/k_g$ est la longueur d'onde dans la graisse.

On a alors

$$\frac{(Z_g - Z_m)(Z_g + Z_a)}{(Z_g - Z_a)(Z_g + Z_m)} = -1$$

soit

$$(Z_g - Z_m)(Z_g - Z_a) = (Z_a - Z_g)(Z_g + Z_m).$$

En développant et après simplification, on trouve

$$Z_g = \sqrt{Z_a Z_m}.$$

On calcule $Z_g = 2,6 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

5. La puissance moyenne incidente dans l'air est

$$\langle \Pi_a \rangle = \frac{Z_a A_a^2}{2}.$$

La puissance transmise dans le muscle est

$$\langle \Pi_m \rangle = \frac{Z_m A_m^2}{2}.$$

D'après l'équation (E3) on a

$$A_m = A_g + B_g e^{2jk_g e} = A_g - B_g$$

compte tenu de la relation sur e .

L'équation (E2) permet alors d'écrire

$$A_m = \frac{Z_a}{Z_g} A_a.$$

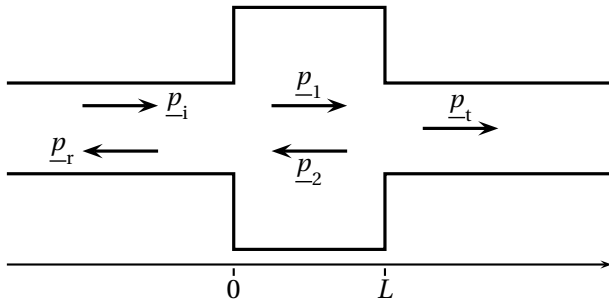
On a donc

$$\langle \Pi_m \rangle = Z_m \frac{Z_a^2}{Z_g^2} \frac{A_a^2}{2} = Z_m \frac{Z_a^2}{Z_a Z_m} \frac{A_a^2}{2} = \frac{Z_a A_a^2}{2} = \langle \Pi_a \rangle.$$

La puissance incidente dans l'air est intégralement transmise dans le muscle.

3 — Silencieux automobile

1. Schématisons le silencieux :



Au niveau de l'interface $x = 0$ (discontinuité de section), l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie \underline{p}_r et une onde transmise \underline{p}_1 .

Au niveau de l'interface $x = L$, l'onde \underline{p}_1 donne naissance à une onde réfléchie \underline{p}_2 et une onde transmise \underline{p}_t .

Les différences ondes s'écrivent

$$\underline{p}_i(x, t) = P_i e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{p}_r(x, t) = \underline{P}_r e^{i(\omega t + kx)},$$

$$\underline{p}_1(x, t) = \underline{P}_1 e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{p}_2(x, t) = \underline{P}_2 e^{i(\omega t + kx)},$$

et

$$\underline{p}_t(x, t) = \underline{P}_t e^{i(\omega t - kx)}.$$

Dans les trois zones, la surpression s'écrit alors

$$\underline{p}(x, t) = \begin{cases} P_i e^{i(\omega t - kx)} + \underline{P}_r e^{i(\omega t + kx)} & \text{pour } x < 0 \\ \underline{P}_1 e^{i(\omega t - kx)} + \underline{P}_2 e^{i(\omega t + kx)} & \text{pour } 0 \leq x < L \\ \underline{P}_t e^{i(\omega t - kx)} & \text{pour } x \geq L. \end{cases}$$

2. En utilisant la relation entre vitesse et surpression pour une onde progressive, l'onde de vitesse s'écrit

$$\underline{v}(x, t) = \begin{cases} \frac{P_i}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{\underline{P}_r}{\mu_0 c} e^{i(\omega t + kx)} & \text{pour } x < 0 \\ \frac{\underline{P}_1}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{\underline{P}_2}{\mu_0 c} e^{i(\omega t + kx)} & \text{pour } 0 \leq x < L \\ \frac{\underline{P}_t}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - kx)} & \text{pour } x \geq L. \end{cases}$$

Le continuité de la surpression en $x = 0$ s'écrit

$$P_i + \underline{P}_r = \underline{P}_1 + \underline{P}_2. \quad (\text{E1})$$

La continuité du débit volumique en $x = 0$ s'écrit

$$S_1 (P_i - \underline{P}_r) = S_2 (\underline{P}_1 - \underline{P}_2). \quad (\text{E2})$$

Le continuité de la surpression en $x = L$ s'écrit

$$\underline{P}_1 e^{-ikL} + \underline{P}_2 e^{ikL} = \underline{P}_t e^{ikL}. \quad (\text{E3})$$

La continuité du débit volumique en $x = L$ s'écrit

$$S_2 [\underline{P}_1 e^{-ikL} - \underline{P}_2 e^{ikL}] = S_1 \underline{P}_t e^{-ikL}. \quad (\text{E4})$$

De (E1) et (E2) on obtient d'une part

$$2\underline{P}_1 = P_i \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) + \underline{P}_r \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)$$

soit

$$\underline{P}_1 = \frac{P_i}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) + \frac{\underline{P}_r}{2} \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right). \quad (\text{E5})$$

D'autre part

$$2\underline{P}_2 = P_i \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) + \underline{P}_r \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right)$$

soit

$$\underline{P}_2 = \frac{P_i}{2} \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) + \frac{\underline{P}_r}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right). \quad (\text{E6})$$

De (E3) et (E4) on obtient d'une part

$$\underline{P}_1 = \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) \frac{\underline{P}_t}{2}. \quad (\text{E7})$$

D'autre part

$$2\underline{P}_2 e^{ikL} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \underline{P}_t e^{-ikL}$$

soit

$$\underline{P}_2 e^{ikL} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \frac{\underline{P}_t}{2} e^{-ikL}. \quad (\text{E8})$$

3. De (E5) et (E7) on obtient

$$\underline{P}_t \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) = P_i \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) + \underline{P}_r \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right),$$

d'où

$$\underline{P}_r = \frac{S_1 + S_2}{S_2 - S_1} \underline{P}_t - \frac{S_1 + S_2}{S_2 - S_1} \underline{P}_i,$$

soit

$$\underline{P}_t (S_2 - S_1) e^{-2ikL} = P_i (S_2 - S_1) + \underline{P}_r (S_2 + S_1).$$

En éliminant \underline{P}_r , on obtient

$$\underline{P}_t (S_2 - S_1) e^{-2ikL} = P_i (S_2 - S_1) + \underline{P}_t \frac{(S_1 + S_2)^2}{S_2 - S_1} - P_i \frac{(S_1 + S_2)^2}{S_2 - S_1}$$

De (E6) et (E8) on obtient

$$\underline{P}_t \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) e^{-2ikL} = P_i \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) + \underline{P}_r \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right).$$

soit

$$P_i [(S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2] = P_t [(S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2 e^{-2ikL}].$$

Après factorisation, on obtient

$$\underline{t} = \frac{\underline{P}_t}{P_i} = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2 e^{-2ikL}}.$$

4. Le coefficient de transmission en énergie est donné par

$$T = |\underline{t}|^2 = \underline{t} \underline{t}^* = \frac{16S_1^2 S_2^2}{[(S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2 e^{-2ikL}][(S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2 e^{2ikL}]}$$

Le dénominateur s'écrit

$$\begin{aligned} & (S_1 + S_2)^4 - (S_1 + S_2)^2 (S_2 - S_1)^2 e^{2ikL} - (S_1 + S_2)^2 (S_1 - S_2)^2 e^{-2ikL} + (S_2 - S_1)^4 \\ &= (S_1 + S_2)^4 + (S_2 - S_1)^4 - (S_1 + S_2)^2 (S_2 - S_1)^2 (e^{2ikL} + e^{-2ikL}) \\ &= (S_1 + S_2)^4 + (S_2 - S_1)^4 - 2(S_1 + S_2)^2 (S_2 - S_1)^2 \cos(2kL) \\ &= (S_1 + S_2)^4 + (S_2 - S_1)^4 - 2(S_1 + S_2)^2 (S_2 - S_1)^2 (1 - 2\sin^2(kL)) \\ &= [(S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2]^2 + 4(S_1 + S_2)^2 (S_2 - S_1)^2 \sin^2(kL) \\ &= (4S_1 S_2)^2 + 4(S_1 + S_2)^2 (S_2 - S_1)^2 \sin^2(kL). \end{aligned}$$

On a donc

$$T = \frac{16S_1^2 S_2^2}{16S_1^2 S_2^2 + 4(S_1 + S_2)^2 (S_2 - S_1)^2 \sin^2(kL)}.$$

On remarque que

$$(S_1 + S_2)^2 (S_2 - S_1)^2 = [(S_1 + S_2)(S_2 - S_1)]^2 = (S_2^2 - S_1^2)^2,$$

d'où

$$T = \frac{16S_1^2 S_2^2}{16S_1^2 S_2^2 + 4(S_2^2 - S_1^2)^2 \sin^2(kL)} = \frac{1}{1 + \frac{(S_2^2 - S_1^2)^2}{4S_1^2 S_2^2} \sin^2(kL)}.$$

Avec la relation de dispersion, on a

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}.$$

On en déduit

$$T = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\pi f}{f_0}} \quad \text{avec} \quad m = \frac{(S_2^2 - S_1^2)^2}{4S_1^2 S_2^2} \quad \text{et} \quad f_0 = \frac{c}{2L}.$$

Le facteur de transmission est maximum pour $f_n = n f_0$ et vaut

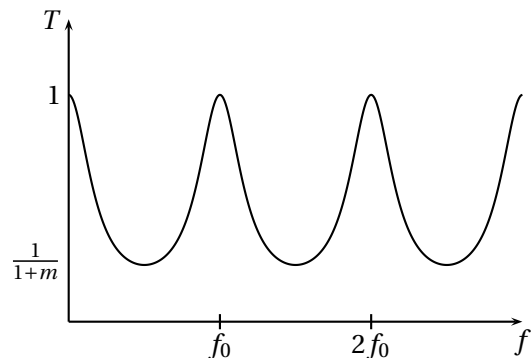
$$T_{\max} = 1.$$

Le facteur de transmission est minimum pour

$$\frac{\pi f_n}{f_0} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

soit $f_n = \frac{f_0}{2} + n f_0$ et vaut

$$T_{\min} = \frac{1}{1 + m}.$$



5. Le premier minimum de T a lieu pour

$$f_{\min} = \frac{f_0}{2} = \frac{c}{4L}$$

On en déduit

$$L = \frac{c}{4f_{\min}} = \frac{340}{4 \times 250} = 0,34 \text{ m}.$$

► En fait, la température et donc la célérité du son est plus élevée dans un peau d'échappement.

En prenant $c = 460 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à 250°C , on obtient $L = 0,45 \text{ cm}$.

4 — Mesure de la vitesse du son dans une mousse

Pour mesurer la vitesse du son dans une mousse, J. Pierre *et al* ont développé un protocole original fondé sur l'étude d'un coefficient de réflexion. On étudie ici le fondement théorique et un exemple d'application de cette méthode.

1. On rappelle l'expression du coefficient de réflexion pour l'onde de pression acoustique :

$$r = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}.$$

2. En $x < 0$, l'onde de pression est

$$p(x, t) = p_{i0} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{r} p_{i0} e^{j(\omega t + kx)}$$

en notant \underline{r} le coefficient de réflexion.

On en déduit l'expression de l'onde de vitesse

$$v(x, t) = \frac{p_{i0}}{Z_0} e^{j(\omega t - kx)} - \frac{\underline{r} p_{i0}}{Z_0} e^{j(\omega t + kx)}.$$

La continuité de la pression à l'interface s'écrit $p(0^-, t) = p(0^+, t)$, soit

$$(p_{i0} + \underline{r} p_{i0}) e^{j\omega t} = p(0^+, t).$$

La continuité de la vitesse s'écrit de même $v(0^-, t) = v(0^+, t)$, soit

$$\left(\frac{p_{i0}}{Z_0} - \frac{\underline{r} p_{i0}}{Z_0} \right) e^{j\omega t} = \frac{p(0^+, t)}{Z^*}.$$

Des deux dernières égalités on déduit

$$p_{i0} + \underline{r} p_{i0} = (p_{i0} - \underline{r} p_{i0}) \frac{Z^*}{Z_0}$$

soit

$$(1 + \underline{r}) Z_0 = (1 - \underline{r}) Z^*.$$

On en déduit

$$\underline{r} = \frac{Z^* - Z_0}{Z^* + Z_0}.$$

3. Le champ de vitesse associé à

$$p(x, t) = p_{i0} e^{j(kx - \omega t)} + p_{20} e^{j(-kx - \omega t)}.$$

est

$$v(x, t) = \frac{1}{Z_1} \left(p_{i0} e^{j(kx - \omega t)} - p_{20} e^{j(-kx - \omega t)} \right).$$

4. La cloison rigide impose $v(d, t) = 0, \forall t$, soit

$$p_{10} e^{jkL} = p_{20} e^{-jkL}$$

d'où

$$p_{20} = p_{10} e^{2jkL}.$$

On a alors

$$p(x, t) = p_{10} e^{j(kx - \omega t)} + p_{10} e^{j[k(2L - x) - \omega t]}$$

et

$$v(x, t) = \frac{1}{Z_1} \left(p_{10} e^{j(kx - \omega t)} - p_{10} e^{j[k(2L - x) - \omega t]} \right).$$

On en déduit

$$p(0^+, t) = p_{10} (1 + e^{j2kL}) e^{j\omega t}$$

et

$$v(0^+, t) = \frac{p_{10}}{Z_1} (1 - e^{j2kL}) e^{j\omega t}$$

d'où

$$Z^* = \frac{p(0^+, t)}{v(0^+, t)} = Z_1 \frac{1 + e^{j2kL}}{1 - e^{j2kL}} = Z_1 \frac{e^{jkL} + e^{jkL}}{e^{-jkL} - e^{jkL}} = Z_1 \frac{2 \cos(kL)}{-2j \sin(kL)}$$

d'où

$$Z^* = \frac{j Z_1}{\tan(kd)}.$$

5. La partie imaginaire de l'impédance Z^* est proportionnelle à $1 / \tan(kd)$.

Elle diverge lorsque $\tan(kd) = 0$, soit pour $kd = n\pi$. On a alors un nœud de vitesse en $x = 0$.

Elle s'annule lorsque $|\tan(kd)| \rightarrow \infty$, soit pour $kd = \frac{\pi}{2} + n\pi$. On a alors un nœud de pression en $x = 0$.

Les pertes dissipatives augmentent avec la fréquence, d'où l'amortissement de la courbe quand la fréquence augmente.

Les zéros de la partie imaginaire de Z^* étant donnés par

$$k_n d = \frac{\omega_n}{c} d = \frac{2\pi f_n}{c} d = n\pi$$

on a

$$f_n = n \frac{c}{2d}.$$

On mesure l'écart moyen entre deux zéros de la courbe :

$$\Delta f = 0,75 \text{ kHz} = \frac{c}{2d}$$

d'où

$$c = 2d\Delta f = 2 \times 1,93 \times 10^{-2} \times 750$$

soit $c = 29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La vitesse du son est très faible dans la mousse.