

Partie I – Étude d'une éolienne (ENS Lyon PC 2016)

Conversion de puissance d'un aérogénérateur. Limite de Betz.

❑ 1 — Le vent cédant de l'énergie à l'éolienne, son énergie cinétique diminue entre l'amont et l'aval du rotor, d'où $v_2 < v_1$.

L'air étant considéré comme incompressible, le débit volumique est conservé, soit $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

On en déduit $S_2 > S_1$: le tube de courant s'évase.

❑ 2 — Le débit massique s'écrit

$$q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S v = \rho S_2 v_2.$$

Détermination de la vitesse v .

❑ 3 — On définit un système fermé associé à la portion $[1, 2]$:

à l'instant t : fluide dans la portion $[1, 2]$ et la masse $\delta m_1 = q_m dt$ de fluide qui y entre entre t et $t + dt$;

à l'instant $t + dt$: fluide dans la portion $[1, 2]$ et la masse $\delta m_2 = q_m dt$ de fluide qui y sort entre t et $t + dt$.

La quantité de mouvement du système fermé s'écrit

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{[1,2]}(t) + \delta m \vec{v}_1 = \vec{P}_{[1,2]}(t) + q_m dt \vec{v}_1$$

et de même

$$\vec{P}(t + dt) = \vec{P}_{[1,2]}(t + dt) + q_m dt \vec{v}_2,$$

où $\vec{P}_{[1,2]}$ est la quantité de mouvement de la portion $[1, 2]$.

Le régime étant stationnaire, $\vec{P}_{[1,2]}(t + dt) = \vec{P}_{[1,2]}(t)$. On a donc

$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = q_m dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

d'où

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t)}{dt} = q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Les actions exercées sur le fluide du système fermé sont :

- la force de pression en amont \vec{F}_1 ;
- la force de pression en aval \vec{F}_2 ;
- la force de pression sur la surface latérale \vec{F}_{lat} ;
- la force exercée par le rotor sur l'air $\vec{F}_{r/a}$.

Le poids est négligé.

La loi de la quantité de mouvement appliquée au système fermé s'écrit

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{lat}} + \vec{F}_{r/a}.$$

Au niveau des surfaces S_1 et S_2 , la pression vaut p_0 . La surface fermée $S_1 \cup S_2 \cup pS_{\text{lat}}$ est donc soumise à une pression uniforme, d'où

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{lat}} = \vec{0}.$$

On a donc

$$q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{0} + \vec{F}_{r/a}.$$

La force exercée par le rotor sur l'air vaut donc

$$\vec{F}_{r/a} = q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

❑ 4 — L'écoulement est parfait, stationnaire, homogène et isotrope. On peut appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les sections (1) et (E). Le poids étant négligé, on obtient

$$p_0 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_E + \rho \frac{v^2}{2}.$$

De même entre les sections (S) et (2) on obtient

$$p_S + \rho \frac{v^2}{2} = p_0 + \rho \frac{v_2^2}{2}.$$

On en déduit

$$p_E = p_0 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v^2) \quad \text{et} \quad p_S = p_0 + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v^2).$$

❑ 5 — Connaissant les pressions s'appliquant sur les surface (E) et (S), on peut faire un bilan de quantité de mouvement en considérant la surface de contrôle entre les sections (E) et (S).

La surface de contrôle Σ qui définit le système ouvert est délimitée par les sections S_E et S_S .

Le système fermé associé est défini comme suit :

à l'instant t : fluide compris entre S_E et S_S , et la masse $\delta m_E = q_m dt$ de fluide qui y entre entre t et $t + dt$;

à l'instant $t + dt$: fluide compris entre S_E et S_S , et la masse $\delta m_S = q_m dt$ de fluide qui y sort entre t et $t + dt$.

La quantité de mouvement du système fermé s'écrit

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_\Sigma(t) + q_m dt \vec{v}_E$$

et

$$\vec{P}(t + dt) = \vec{P}_\Sigma(t + dt) + q_m dt \vec{v}_S,$$

où \vec{P}_Σ est la quantité de mouvement du fluide contenu dans entre S_E et S_S .

Le régime étant stationnaire, $\vec{P}_\Sigma(t+dt) = \vec{P}_\Sigma(t)$. On a donc

$$\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = q_m dt (\vec{v}_S - \vec{v}_E)$$

d'où

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t)}{dt} = q_m (\vec{v}_S - \vec{v}_E).$$

Comme $v_E = v_S = v$, on a finalement

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{0}.$$

Les actions exercées sur le fluide du système fermé sont :

- la force $\vec{F}_{r/a}$ exercée par le rotor;
- la force de pression en amont $\vec{F}_E \vec{e}_x = p_E S_E = p_E S \vec{e}_x$;
- la force de pression en aval $\vec{F}_S = -p_S S_S \vec{e}_x = -p_S S \vec{e}_x$;
- la force de pression sur la surface latérale \vec{F}_{lat} .

Par symétrie, on a $\vec{F}_{lat} = \vec{0}$.

La loi de la dynamique s'écrit alors

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{0} = (p_E - p_S) S \vec{e}_x + \vec{F}_{r/a}.$$

On a donc

$$\vec{F}_{r/a} = (p_S - p_E) S \vec{e}_x.$$

On peut utiliser les expressions établies précédemment à l'aide du théorème de Bernoulli pour exprimer

$$\vec{F}_{lat} = \frac{\rho S}{2} (v_2^2 - v_1^2) \vec{e}_x.$$

□ 6 — On a donc

$$\vec{F}_{lat} = \frac{\rho S}{2} (v_2^2 - v_1^2) \vec{e}_x = q_m (v_2 - v_1) \vec{e}_x = \rho S v (v_2 - v_1) \vec{e}_x$$

comme $q_m = \rho S v$.

En remarquant que $v_2^2 - v_1^2 = (v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$ il vient

$$\frac{\rho S}{2} (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = \rho S v (v_2 - v_1)$$

d'où

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Puissance transférée de l'écoulement à l'éolienne et rendement de la conversion.

□ 7 — On raisonne sur le système fermé défini à la question 3.

Son énergie mécanique à l'instant t est

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_{[1,2]}(t) + \frac{1}{2} \delta m v_1^2$$

soit comme $\delta m = \rho S_1 v_1 dt$:

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_{[1,2]}(t) + \frac{1}{2} \rho S_1 v_1^3 dt$$

en ne considérant pas l'énergie potentielle de pesanteur (le poids est négligé).

À l'instant $t + dt$ elle vaut

$$\mathcal{E}_m(t+dt) = \mathcal{E}_{[1,2]}(t+dt) + \frac{1}{2} \delta m v_2^2$$

soit comme $\delta m = \rho S_2 v_2 dt$:

$$\mathcal{E}_m(t+dt) = \mathcal{E}_{[1,2]}(t) + \frac{1}{2} \rho S_2 v_2^3 dt.$$

On a $\mathcal{E}_{[1,2]}(t+dt) = \mathcal{E}_{[1,2]}(t)$ car le régime est stationnaire.

Avec $\delta m = q_m dt$, on a donc

$$\mathcal{E}_m(t+dt) - \mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2} \rho (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) dt,$$

d'où

$$\frac{D\mathcal{E}_m}{Dt} = \frac{\mathcal{E}_m(t+dt) - \mathcal{E}_m(t)}{dt} = \frac{1}{2} \rho (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3).$$

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{D\mathcal{E}_m}{Dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}.$$

Le fluide étant parfait, on a $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ (pas de puissance interne dissipée par viscosité).

Les forces extérieures fournissant une puissance au système sont :

- la force de pression en amont $\vec{F}_1 = p_0 S_1 \vec{e}_x$ qui fournit

$$\mathcal{P}_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 = p_0 S_1 v_1;$$

- la force de pression en aval $\vec{F}_2 = -p_0 S_2 \vec{e}_x$ qui fournit

$$\mathcal{P}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2 = -p_0 S_2 v_2;$$

- le rotor qui fournit la puissance \mathcal{P} que l'on cherche à exprimer.

On a donc

$$\frac{1}{2} \rho (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) = p_0 S_1 v_1 - p_0 S_2 v_2 + \mathcal{P}$$

d'où

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) - p_0 S_1 v_1 + p_0 S_2 v_2.$$

On a $q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$, donc $S_1 v_1 = S_2 v_2$ et

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3).$$

Comme $\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 = q_m$, on peut écrire

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} q_m (v_2^2 - v_1^2).$$

□ 8 — Considérons l'air incident de vitesse v_1 . L'énergie cinétique traversant pendant dt la section S de l'éolienne, en l'absence de cette dernière est

$$dE_{c,inc} = \frac{1}{2} q_m dt v_1^2.$$

Avec $q_m = \rho S v_1$, on a

$$dE_{c,inc} = \frac{1}{2} \rho S dt v_1^3.$$

On a donc

$$\mathcal{P}^* = \frac{1}{2} \rho S v_1^3 = \frac{dE_{c,inc}}{dt}.$$

La grandeur \mathcal{P}^* représente donc la puissance cinétique qui traverserait la section S en l'absence de l'éolienne; on peut l'interpréter comme la puissance maximale disponible pour l'éolienne.

□ 9 — Le rendement de l'éolienne relativement à \mathcal{P}^* peut être défini par

$$\eta^+ = \frac{\text{puissance cinétique fournie à l'éolienne}}{\text{puissance cinétique disponible}}.$$

La puissance cinétique fournie à l'éolienne de la part de l'air est $-P$; on peut donc écrire

$$\eta^+ = -\frac{P}{\mathcal{P}^*}.$$

Avec les expressions précédentes, on a donc

$$\eta^+ = -\frac{q_m(v_2^2 - v_1^2)}{\rho S v_1^3}.$$

Avec

$$q_m = \rho S v = \rho S \frac{v_1 + v_2}{2}$$

on a

$$\eta^+ = \frac{\rho S (v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2)}{2 \rho S v_1^3} = \frac{(v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2)}{2 v_1^3}.$$

En posant $r = v_2/v_1$, on obtient

$$\eta^+ = \frac{1}{2} (1+r)(1-r^2).$$

On peut développer l'identité remarquable

$$1 - r^2 = (1+r)(1-r),$$

ce qui permet d'écrire

$$\eta^+ = \frac{1}{2} (1+r)^2 (1-r).$$

□ 10 — On a $0 \leq r \leq 1$.

Les valeurs extrêmes sont $\eta^+(0) = \frac{1}{2}$ et $\eta^+(1) = 0$.

On calcule

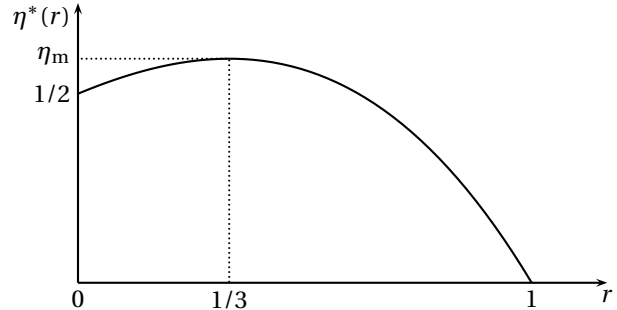
$$\begin{aligned} \frac{d\eta^+}{dr} &= \frac{1}{2} [2(1+r)(1-r) - (1+r)^2] \\ &= \frac{1}{2} (1+r) [2 - 2r - 1 - r] \end{aligned}$$

soit

$$\frac{d\eta^+}{dr} = \frac{1}{2} (1+r)(1-3r).$$

La dérivée est nulle pour $r_m = \frac{1}{3}$, et le rendement présente le maximum

$$\eta_m^+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{16}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{27} \approx 0,59.$$



□ 11 — Le cas $r = 1$ correspond au cas où $v_2 = v_1$: l'éolienne ne perturbe pas l'écoulement de l'air et ne prélève aucune puissance.

Le cas $r = 0$ correspond au cas où $v_2 = 0$: le débit serait nul.

La situation optimale est pour $r_m = 1/3$ soit $v_2 = v_1/3$: la vitesse du vent est divisée par 3. On a alors le rendement maximum $\eta_m^+ = 59\%$.

Quelques remarques :

— on a $\eta^+ = \frac{(v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2)}{2 v_1^3}$. Le rendement augmente d'autant plus que l'on freine le vent (différence $v_1^2 - v_2^2$ grande); mais dans ce cas, v_2 est plus faible, et le débit proportionnel à $v_1 + v_2$ diminue, ce qui fait baisser le rendement. On a donc une compétition entre deux termes, d'où un rendement maximal pour une valeur intermédiaire de r ;

— pour $r_m = 1/3$, la section de sortie est trois fois plus grande que la section d'entrée;

— la courbe est assez plate au voisinage de r_m : le rendement reste bon même quand on s'éloigne de l'optimum.

Quelques remarques sur le cadre de l'étude.

□ 12 — La section du tube de courant se modifie assez rapidement au niveau du rotor. Comme la vitesse est tangente aux lignes de courant, on ne peut considérer une vitesse purement axiale au niveau du rotor. C'est donc une hypothèse forte.

□ 13 — Entre les sections (E) et (S), le fluide n'est pas soumis qu'aux forces de pression: il y a des pièces mobiles (le rotor) qui échangent une puissance mécanique. On ne peut donc y appliquer le théorème de Bernoulli.

□ 14 — En pratique, c'est la **forme des pales** qui détermine le rapport r .

1 — Étude du mouvement de la houle en eau peu profonde

□ 1 — La relation de l'hydrostatique s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \overrightarrow{g} = -\rho g \overrightarrow{e}_z.$$

En projetant selon (Oz) on a donc

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y,t} = -\rho g.$$

On intègre par rapport à z , les autres variables étant fixées :

$$p(x, z, t) = -\rho g z + A(x, t)$$

la « constante » d'intégration dépendant *a priori* des autres variables, soit x et t (le problème est indépendant de y par hypothèse).

Écrivons que la pression à la surface libre vaut p_0 :

$$p_0 = -\rho g[H + \eta(x, t)] + A(x, t).$$

On en déduit $A(x, t) = p_0 + \rho g[H + \eta(x, t)]$, d'où

$$p(x, z, t) = p_0 + \rho g[H + \eta(x, t) - z].$$

□ 2 — L'équation de la dynamique appliquée à une particule de fluide de masse $dm = \rho d\tau$ s'écrit

$$\rho \overrightarrow{a} d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}} p d\tau + \rho \overrightarrow{g} d\tau,$$

avec

$$\overrightarrow{a} = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{v} \approx \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$$

en linéarisant, soit

$$\rho \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \overrightarrow{g}.$$

En projetant selon (Ox) , on obtient

$$\rho \frac{\partial v_x(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x, z, t)}{\partial x}.$$

□ 3 — D'après l'expression de $p(x, z, t)$ obtenue à la question 1, on a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}.$$

On a donc

$$\rho \frac{\partial v_x(x, t)}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}$$

d'où

$$\frac{\partial v_x(x, t)}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}.$$

(1)

□ 4 — La masse d'eau dans la tranche d'épaisseur dx , de largeur L et de hauteur $H + \eta(x, t)$ est

$$m(x, t) = \rho L [H + \eta(x, t)] dx.$$

Sa variation temporelle est donc

$$\frac{\partial m(x, t)}{\partial t} = \rho L \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx.$$

□ 5 — La masse qui entre dans le volume de contrôle en x par unité de temps est donnée par le débit massique à travers la section $L[H + \eta(x, t)]$, soit

$$\frac{\delta m_e}{dt} = \rho v_x(x, t) L [H + \eta(x, t)]$$

d'où

$$\delta m_e = \rho v_x(x, t) L [H + \eta(x, t)] dt.$$

□ 6 — La masse qui sort dans le volume de contrôle en x par unité de temps est donnée par le débit massique à travers la section $L[H + \eta(x + dx, t)]$, soit

$$\frac{\delta m_s}{dt} = \rho v_x(x + dx, t) L [H + \eta(x + dx, t)]$$

d'où

$$\delta m_s = \rho v_x(x + dx, t) L [H + \eta(x + dx, t)] dt.$$

□ 7 — Le bilan de masse pour le volume de contrôle s'écrit

$$\frac{\partial m(x, t)}{\partial t} = \frac{\delta m_e}{dt} - \frac{\delta m_s}{dt}$$

soit

$$\begin{aligned} \rho L \frac{\partial \eta}{\partial t} dx &= \rho v_x(x, t) L [H + \eta(x, t)] \\ &\quad - \rho v_x(x + dx, t) L [H + \eta(x + dx, t)] \\ &= \rho L H [v_x(x, t) - v_x(x + dx, t)] \\ &\quad - \rho L [v_x(x, t) \eta(x, t) - v_x(x + dx, t) \eta(x + dx, t)] \\ &= -\rho L H \frac{\partial v_x}{\partial x} dx - \rho L \frac{\partial (v_x \eta)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Les grandeurs v_x et η étant des infiniment petits du même ordre, le terme $\frac{\partial (v_x \eta)}{\partial x}$ est un infiniment petit d'ordre deux. À l'ordre le plus bas, en ne gardant que le terme du premier ordre, on obtient donc

$$\rho L \frac{\partial \eta}{\partial t} dx = -\rho L H \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$$

soit

$$\frac{\partial v_x(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t}.$$

(2)

□ 8 — Dérivons l'équation (2) par rapport à t :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -H \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x}.$$

Dérivons l'équation (1) par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} = -g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Comme $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x}$ d'après le théorème de Schwarz, on a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = Hg \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{gH} \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2}.$$

On retrouve l'équation de d'Alembert.

□ 9 — Écrivons que $\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega t - kx)$ vérifie l'équation d'onde précédente :

$$-k^2 \eta(x, t) = -\omega^2 \frac{\eta(x, t)}{gH}$$

d'où la relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{gH}}.$$

□ 10 — La vitesse de phase est définie par $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, d'où

$$v_\varphi = \sqrt{gH}.$$

La vitesse de phase ne dépend pas de la pulsation ω de l'onde : **le phénomène de propagation n'est pas dispersif.**

2 — Aspects énergétiques

□ 11 — Lorsque l'on écrit que l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} d'un système de masse m est donnée par $E_{pp} = mgz + \text{cte}$, la cote z est celle du **centre de masse du système**.

□ 12 — L'origine de l'énergie potentielle étant prise à la cote $z = H$, i.e. lorsque $\eta(x, t) = 0$, l'énergie potentielle de la tranche de fluide d'épaisseur dx est associée à la masse de fluide qui s'écartere de la cote $z = H$.

Considérons $\eta > 0$. La masse de fluide au-dessus de la surface libre au repos est

$$\delta m = \rho L \eta(x, t) dx.$$

La hauteur de son centre de masse (situé au milieu) par rapport à la cote de référence $z = H$ est $\eta/2$.

L'énergie potentielle de cette masse est donc

$$dE_{pp}(x, t) = \delta m g \frac{\eta(x, t)}{2} = \rho L \eta(x, t) dx \frac{\eta(x, t)}{2},$$

soit

$$dE_{pp}(x, t) = \rho g L \frac{(\eta(x, t))^2}{2} dx,$$

► On a $dE_{pp}(x, t) > 0$ même si $\eta < 0$, ce qui peut paraître contre-intuitif.

Si $\eta < 0$, il faut retirer la masse $\delta m = \rho L |\eta(x, t)| dx$ à la colonne de fluide au repos. On revient donc à « ajouter » au fluide au repos la masse négative $-\delta m = -\rho L |\eta(x, t)| dx = \rho L \eta(x, t) dx$ comme $\eta < 0$.

Son énergie potentielle est alors $dE_{pp} = -\delta m g \eta(x, t)/2$ et on retrouve l'expression établie.

□ 13 — Avec $\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega t - kx)$, on a

$$dE_{pp}(x, t) = \frac{\rho g L}{2} \eta_0^2 \cos^2(\omega t - kx) dx.$$

La densité linéique d'énergie potentielle est donc

$$\frac{dE_{pp}(x, t)}{dx} = \frac{\rho g L}{2} \eta_0^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Comme $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = 1/2$, sa moyenne temporelle est

$$\langle e \rangle = \frac{\rho g L \eta_0^2}{4}.$$

□ 14 — La tranche de fluide considérée a une masse

$$\delta m = \rho L [H + \eta(x, t)] dx.$$

Le fluide ayant la vitesse $v_x(x, t)$, son énergie cinétique est

$$dE_c(x, t) = \frac{1}{2} \delta m (v_x(x, t))^2$$

soit

$$dE_c(x, t) = \frac{\rho L}{2} [H + \eta(x, t)] (v_x(x, t))^2 dx.$$

Comme $\eta(x, t)$ et $v_x(x, t)$ sont des infiniment petits du même ordre, on obtient à l'ordre le plus bas

$$dE_c(x, t) = \frac{\rho L H}{2} (v_x(x, t))^2 dx.$$

□ 15 — Avec $\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega t - kx)$ on a

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = \eta_0 k \sin(\omega t - kx)$$

et l'équation (1) donne

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \eta_0 k \sin(\omega t - kx).$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient

$$v_x(x, t) = \frac{g \eta_0 k}{\omega} \cos(\omega t - kx).$$

► La « constante » d'intégration par rapport à t est *a priori* une fonction de x : $B(x)$. Un tel terme n'a aucun caractère ondulatoire; on le prend donc nul.

Avec la relation de dispersion $k = \omega / \sqrt{gH}$, on a

$$v_x(x, t) = \frac{g\eta_0}{\sqrt{gH}} \cos(\omega t - kx)$$

soit

$$v_x(x, t) = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H}} \cos(\omega t - kx) .$$

□ 16 — L'énergie cinétique de la tranche de fluide s'écrit alors

$$\begin{aligned} dE_c(x, t) &= \frac{\rho LH}{2} \eta_0^2 \frac{g}{H} \cos^2(\omega t - kx) dx \\ &= \frac{\rho g L \eta_0^2}{2} \cos^2(\omega t - kx) dx . \end{aligned}$$

La densité linéique d'énergie cinétique est donc

$$\kappa(x, t) = \frac{dE_c(x, t)}{dx} = \frac{\rho g L \eta_0^2}{2} \cos^2(\omega t - kx) .$$

Sa moyenne temporelle vaut alors

$$\langle \kappa \rangle = \frac{\rho g L \eta_0^2}{4} .$$

□ 17 — On remarque que $\langle e \rangle = \langle \kappa \rangle$.

Cette égalité traduit **l'équipartition en moyenne de l'énergie mécanique sous les formes potentielle et cinétique**.

□ 18 — La densité linéique moyenne totale est donnée par $\langle w \rangle = \langle e \rangle + \langle \kappa \rangle$, soit

$$\langle w \rangle = \frac{\rho g L \eta_0^2}{2} .$$

□ 19 — On suppose que l'énergie se propage à la célérité de l'onde v_{varphi} .

Pendant dt , l'onde se propage d'une distance $dx = v_{\varphi} dt$. L'énergie propagée pendant dt est donc l'énergie contenue sur cette longueur dx , soit

$$\langle dW \rangle = \langle w \rangle dx = \langle w \rangle v_{\varphi} dt .$$

La puissance transport vaut alors

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle dW \rangle}{dt} = \langle w \rangle v_{\varphi} .$$

Par unité de largeur de front, on obtient la puissance moyenne

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{L} = \frac{\langle w \rangle v_{\varphi}}{L} .$$

Avec les expressions obtenues, on a

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle = \frac{\rho g L \eta_0^2}{2L} \sqrt{gH}$$

soit

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle = \frac{\rho \eta_0^2}{2} \sqrt{H} \sqrt{g^3} .$$

□ 20 — La dimension d'une énergie est $[W] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$. Celle d'une puissance est donc $[\mathcal{P}] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}$.

La puissance par unité de longueur a donc comme dimension

$$[\mathcal{P}_L] = \text{MLT}^{-3} .$$

On a

$$[\rho] = \text{ML}^{-3} ; \quad [g] = \text{LT}^{-2} \quad \text{et} \quad [\eta_0] = \text{L} .$$

On a donc

$$\left[\rho \eta_0^2 \sqrt{H} \sqrt{g^3} \right] = \text{ML}^{-3} \text{L}^2 \text{L}^{1/2} \text{L}^{3/2} \text{T}^{-3} = \text{ML} \cdot \text{T}^{-3} .$$

L'expression obtenue est bien homogène.

□ 21 — Pour $L = 1 \text{ m}$, on calcule

$$\langle \mathcal{P}_1 \rangle = \frac{10^3 \times (0,36)^2}{2} \times \sqrt{100} \times \sqrt{10^3} .$$

soit

$$\langle \mathcal{P}_1 \rangle = 20,5 \text{ kW} .$$

□ 22 — L'énergie fournie pendant un jour, soit 24 h est

$$W = 20,5 \times 24 = 492 \text{ kWh} .$$

On peut donc alimenter 492/12 foyers par ce dispositif, soit **41 foyers**.

Partie III — Accumulateur cadmium-nickel (E3A MP 2023)

1 — Généralité

□ 1 — On calcule les nombres d'oxydations :

espèce	Cd(s)	Cd(OH) ₂ (s)	Ni(OH) ₂ (s)	Ni ₂ O ₃ (s)
n.o.	0	II	II	III

□ 2 — On a deux nombres d'oxydation à envisager : 0 pour Cd(s) et II pour Cd²⁺ et Cd(OH)₂(s).

L'espèce Cd sera dans la partie basse du diagramme, tandis que les deux autres seront dans la partie haute.

Au degré II, la cation Cd²⁺ a son domaine pour les pH acides, tandis que Cd(OH)₂(s) a son domaine pour les pH plus élevés.

Frontière Cd²⁺/Cd(OH)₂

L'équilibre de précipitation entre les deux espèces est



On a

$$K_{s2} = [\text{Cd}^{2+}][\text{HO}^-]^2.$$

À la frontière, on a $K_{s2} = c_0[\text{HO}^-]_{\text{fr}}^2$, d'où

$$[\text{HO}^-]_{\text{fr}} = \sqrt{K_{s2}c_0} = 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

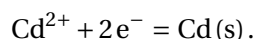
On en déduit

$$\text{pH}_{\text{fr}} = 14 + \log [\text{HO}^-]_{\text{fr}}$$

soit $\text{pH}_{\text{fr}} = 8,0$ pour la frontière verticale entre Cd²⁺ et Cd(OH)₂.

Frontière Cd²⁺/Cd

L'équation électrochimique est



La loi de Nernst s'écrit alors

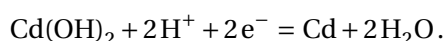
$$E = E^\circ(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}) + 0,03 \log \left(\frac{[\text{Cd}^{2+}]}{c^\circ} \right).$$

À la frontière, on a $[\text{Cd}^{2+}] = c_0 = 1 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, d'où

$$E_{\text{fr}} = -0,46 \text{ V}.$$

Frontière Cd(OH)₂/Cd

L'équation électrochimique est



La relation de Nernst s'écrit

$$E = E^\circ(\text{Cd(OH)}_2/\text{Cd}) + 0,03 \log \left(\frac{[\text{H}^+]^2}{(c^\circ)^2} \right)$$

soit pour la frontière

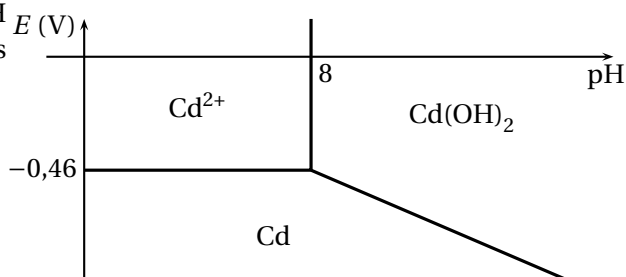
$$E_{\text{fr}} = E^\circ(\text{Cd(OH)}_2/\text{Cd}) - 0,06\text{pH}.$$

Le potentiel standard $E^\circ(\text{Cd(OH)}_2/\text{Cd})$ n'est pas donné. Le plus simple pour tracer le graphe et d'utiliser la continuité de la frontière entre Cd(0) et Cd(II) à pH = 8,0, soit

$$-0,46 = E^\circ(\text{Cd(OH)}_2/\text{Cd}) - 0,06\text{pH}$$

d'où $E^\circ(\text{Cd(OH)}_2/\text{Cd}) = 0,02 \text{ V}$; l'équation de la frontière est alors

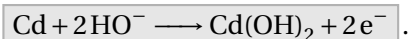
$$E_{\text{fr}} = 0,02 - 0,06\text{pH}.$$



2 — Étude de la décharge

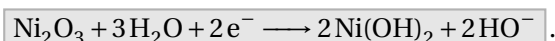
□ 3 — En superposant les diagrammes E-pH du cadmium et du nickel, on constate que Cd et Ni₂O₃ ont des domaines disjoints. On en déduit la réaction spontanée de fonctionnement de la pile.

anode : oxydation de Cd en Cd(OH)₂ selon

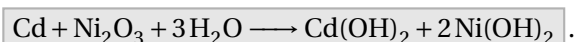


On équilibre les charges avec HO⁻ et non avec H⁺ car on est en milieu très basique (pH = 14).

cathode : réduction de Ni₂O₃ en Ni(OH)₂ selon



On obtient la réaction de fonctionnement de la pile en éliminant les électrons :



□ 4 — Le potentiel du couple Ni₂O₃/Ni(OH)₂ à pH = 14 est donné par

$$E_+ = 1,02 - 0,06 \times 14$$

soit $E_+ = 0,18 \text{ V}$.

Le potentiel du couple Cd(OH)₂/Cd à pH = 14 est donné par

$$E_- = 0,02 - 0,06 \times 14$$

soit $E_- = -0,82 \text{ V}$.

La différence de potentiel de la pile est alors

$$E_{\text{NiCd}} = 1,0 \text{ V}.$$

□ 5 — La réaction de fonctionnement de la pile fait intervenir l'échange de $n = 2$ électrons. On a donc

$$\Delta_r G^\circ = -nFE_{\text{NiCd}} = -2FE_{\text{NiCd}},$$

soit

$$\Delta_r G^\circ = -193 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

On calcule l'enthalpie standard de réaction :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^\circ &= \Delta_f H^\circ(\text{Cd}(\text{OH})_2) + 2\Delta_f H^\circ(\text{Ni}(\text{OH})_2) - \Delta_f H^\circ(\text{Cd}) \\ &\quad - \Delta_f H^\circ(\text{Ni}_2\text{O}_3) - 3\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) \end{aligned}$$

soit

$$\Delta_r H^\circ = -273,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

L'entropie standard de réaction se déduit de la relation

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ,$$

d'où

$$\Delta_r S^\circ = -271 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

□ 6 — Dans l'approximation de Ellingham, on a

$$\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ.$$

Comme $\Delta_r G = -2FE_{\text{NiCd}}$, on en déduit

$$E_{\text{NiCd}} = -\frac{\Delta_r H^\circ}{2F} + T\frac{\Delta_r S^\circ}{2F}.$$

On a $\Delta_r S^\circ < 0$, donc E_{NiCd} est **la tension diminue quand la température augmente**.

□ 7 — D'après la question précédente, on a

$$\frac{dE_{\text{NiCd}}}{dT} = \frac{\Delta_r S^\circ}{2F} = -1,4 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Cette valeur est faible : une variation de 10°C de la température ambiante entraîne une variation de $1,4 \text{ mV}$ de la tension de la pile, soit $1,4 \%$.

La concentration en potasse $\text{K}(\text{OH})$ fixe le pH du milieu (par $[\text{HO}^-]$).

D'après la question 4, on a

$$E_+ = 1,02 - 0,06 \times \text{pH} \quad \text{et} \quad E_- = 0,02 - 0,06 \times \text{pH}.$$

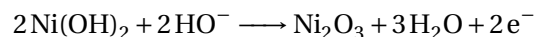
La tension de la pile $E_{\text{NiCd}} = E_+ - E_-$ est donc indépendante du pH.

La tension de la pile ne dépend donc pas de la concentration en potasse.

3 — Étude de la recharge

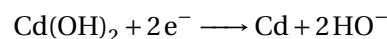
□ 8 — La recharge consiste à provoquer les réactions inverses des réactions de fonctionnement de la pile :

Pôle \oplus : on a l'oxydation

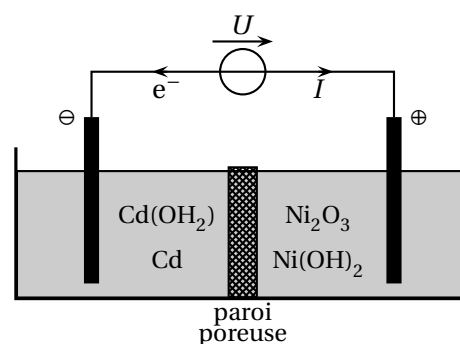


et l'électrode est alors une **anode**.

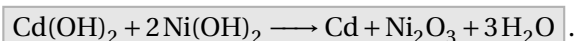
Pôle \ominus : on a la réduction



et l'électrode est alors une **cathode**.



□ 9 — La réaction réalisée pendant la charge est l'inverse de la réaction de fonctionnement de la pile, soit



□ 10 — Pour recharger l'accumulateur, il faut appliquer $U_{\text{min}} > E_{\text{NiCd}}$.

□ 11 — Cette valeur peut être augmentée de façon significative par deux phénomènes :

- l'existence de surpotentiels anodique et cathodique, si les systèmes sont lents ;
- la résistance interne de la pile qui cause une chute de potentiel ohmique.