Électromagnétisme — I — Symétries du champ électrique

Distribution de charges

On appelle distribution de charges un ensemble de charges électriques dans un domaine de l'espace.

Distribution volumique

À l'**échelle microscopique**, une distribution de charge $\mathcal{D}$ est constituée d'un très grand nombre de particules microscopiques chargées (électrons, protons, ions), assimilées à des **charges ponctuelles**.
À l'**échelle mésoscopique**, un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau_M$ est suffisamment grand pour contenir un grand nombre de particules chargées mais suffisamment petit pour être considéré comme un point à l'échelle macroscopique.

Le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau_M$ portant la charge δQ, la **densité volumique de charge** en M est définie par

$$\delta Q = \rho(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

La charge est une grandeur scalaire algébrique qui s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

La charge totale d'une distribution $\mathcal{D}$ s'écrit de façon générale

$$Q = \iiint_{M\in\mathcal{D}} \rho(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M\,.$$

- Si la densité volumique $\rho_0(t)$ de charge est uniforme, la charge totale s'écrit $Q = \rho_0 \times \mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est le volume de la distribution.
- Un système est dit globalement neutre si $Q = 0$. Un milieu est dit localement neutre en M si $\rho(M,t) = 0$.

Distribution surfacique

Si les charges sont réparties sur une épaisseur h « très petite », on peut décrire la distribution par une densité surfacique de charge $\sigma(M)$: une surface élémentaire $\mathrm{d}S_M$ en M porte la charge $\boxed{\delta Q = \sigma(M)\,\mathrm{d}S_M}$.

- $\sigma(M)$ s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

Distribution linéique

Si les charges sont réparties sur un cylindre de rayon a « très petit », on peut décrire la distribution par une densité linéique de charge $\lambda(M)$: une longueur élémentaire $\mathrm{d}\ell_M$ en M porte la charge $\boxed{\delta Q = \lambda(M)\,\mathrm{d}\ell_M}$.

- $\lambda(M)$ s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Invariances et symétries d'une distribution de charge

Invariances d'une distribution de charge

Une distribution de charge est **invariante par translation** d'axe Δ si elle reste inchangée par *toute* translation selon cet axe.

- Si Δ est l'axe Oz, la densité volumique de charge $\rho(M)$ est indépendante de z.
- Une distribution invariante par translation selon Oz est nécessairement d'**extension spatiale infinie**[1] selon cet axe.

1. C'est une modélisation, qui revient à négliger les « effets de bord »; une distribution de longueur L peut-être considérée comme infini si elle est vue d'une distance $r \ll L$.

Une distribution de charge est **invariante par rotation** autour d'un axe Δ si elle reste inchangée par *toute* rotation autour de cet axe.

- Si Δ est l'axe Oz en coordonnées cylindriques, la densité volumique de charge $\rho(M)$ est indépendante de θ.

Distribution à symétrie cylindrique

Une distribution de charge est dite à symétrie cylindrique si elle est invariante par translation selon un axe Oz et par toute rotation autour de cet axe Oz.

- En coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe Oz, la densité volumique de charge ne dépend spatialement que de r :
$$\rho(M) = \rho(r)\,.$$
- Une distribution à symétrie cylindrique est nécessairement infinie selon Oz.

Distribution à symétrie sphérique

Une distribution est dite à symétrie sphérique (de centre O) si elle invariante par rotation autour de tout axe passant par O.

- En coordonnées sphériques (r,θ,φ) de centre O, la densité volumique de charge ne dépend spatialement que de $r = OM$:
$$\rho(M) = \rho(r)\,.$$

Plan de symétrie d'une distribution de charge

Une distribution de charge admet un plan de symétrie Π si la distribution de charge obtenue par symétrie par rapport à Π lui est en tout point identique.

- La distribution est invariante par symétrie par rapport à Π :
$$\forall M \in \mathcal{D} \quad M' = \mathscr{S}_{\Pi}(M) \implies \rho(M') = \rho(M)\,.$$
- En coordonnées cartésiennes, si Oxy est un plan de symétrie, on a $\rho(x,y,-z) = \rho(x,y,z)$.
- Un plan de symétrie d'une distribution de charge est nécessairement un plan de symétrie géométrique de cette distribution.
- Si la distribution est plane [2], la plan qui la contient est nécessairement un plan de symétrie de cette distribution.

Plan d'anti-symétrie d'une distribution de charge

Une distribution de charge admet un plan d'antisymétrie Π^* si la distribution de charge obtenue par symétrie par rapport à Π^* lui est en tout point opposée.

- On peut écrire
$$\forall M \in \mathcal{D} \quad M' = \mathscr{S}_{\Pi^*}(M) \implies \rho(M') = -\rho(M)\,.$$
- En coordonnées cartésiennes, si Oxy est un plan d'anti-symétrie, on a $\rho(x,y,-z) = -\rho(x,y,z)$.
- Un plan d'anti-symétrie d'une distribution de charge est nécessairement un plan de symétrie géométrique de cette distribution.
- Si Π^* est un plan d'anti-symétrie d'une distribution $\mathcal{D}$, cette distribution est invariante si on lui applique une symétrie par rapport à Π^* puis une conjugaison de charge $\mathscr{C}$ (chaque charge est multipliée par -1), soit la transformation $\mathscr{C} \circ \mathscr{S}_{\Pi^*}$.
- La charge électrique est nécessairement nulle en tout point d'un plan d'anti-symétrie d'une distribution de charge.

2. Contenue dans un plan.

Principe de Curie

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

➤ En électrostatique, les causes sont les charges de la distribution ; l'effet est le champ électrique créé.

Distribution ayant un plan de symétrie

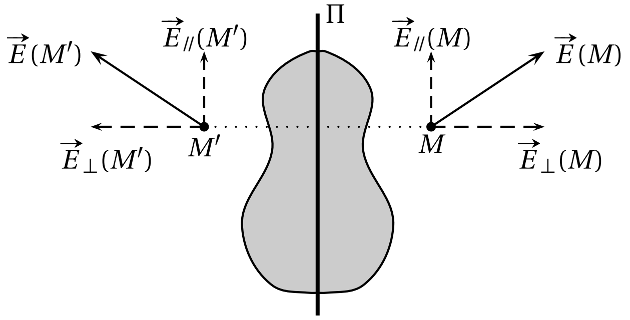
Soit $\mathcal{D}$ une distribution de charge admettant un plan de symétrie Π.
La symétrie par rapport à Π, laissant invariante la distribution $\mathcal{D}$, soit laisser invariant le champ $\vec{E}(M)$ créé :

$$\vec{E}(M') = \mathscr{S}_\Pi\left(\vec{E}(M)\right) \quad \text{avec} \quad M' = \mathscr{S}_\Pi(M)\,.$$

Le champ électrique est un vecteur polaire.

On en déduit son expression en M', symétrique de M par rapport à Π à partir des règles de transformation d'un vecteur polaire par symétrie plane :

$$\begin{cases} \vec{E}_{/\!/}(M') = \vec{E}_{/\!/}(M) \\ \vec{E}_\perp(M') = -\vec{E}_\perp(M) \end{cases}$$



En tout point d'un plan de symétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique créé par cette distribution appartient au plan :

$$\vec{E}_\perp(M) = \vec{0} \quad \forall M \in \Pi\,.$$

En tout point d'un axe de symétrie d'une distribution, le champ électrostatique créé appartient à cet axe.

➤ Au centre d'une distribution à symétrie sphérique, le champ est nul.

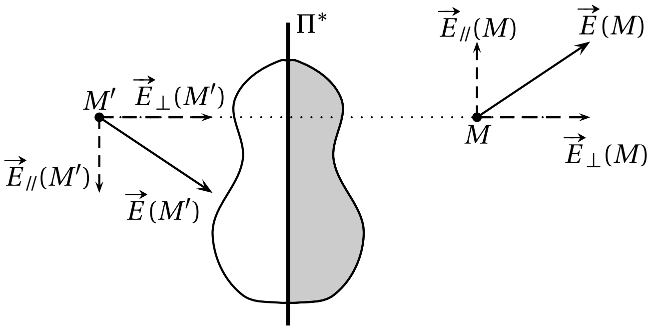
Distribution ayant un plan d'antisymétrie

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de charge admettant un plan d'antisymétrie Π^*.
La composée $\mathscr{C} \circ \mathscr{S}_{\Pi^*}$, laissant invariante la distribution $\mathcal{D}$, soit laisser invariant le champ $\vec{E}(M)$ créé :

$$\vec{E}(M') = -\mathscr{S}_\Pi\left(\vec{E}(M)\right) \quad \text{avec} \quad M' = \mathscr{S}_\Pi(M)\,.$$

Le champ électrique étant un vecteur polaire, on en déduit son expression en M', symétrique de M par rapport à Π^* à partir des règles de transformation d'un vecteur polaire par symétrie plane, puis en appliquant $-\mathrm{Id}$:

$$\begin{cases} \vec{E}_{/\!/}(M') = -\vec{E}_{/\!/}(M) \\ \vec{E}_\perp(M') = \vec{E}_\perp(M) \end{cases}$$



En tout point d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique créé par cette distribution est normal à ce plan :

$$\vec{E}_{/\!/}(M) = \vec{0} \quad \forall M \in \Pi^*\,.$$

Distribution invariante

Si une distribution $\mathcal{D}$ est invariante par une transformation géométrique, le champ électrique créé doit être invariant par cette même transformation.

Si la distribution $\mathcal{D}$ est invariante par translation selon Oz, les composantes du champ $\overrightarrow{E}(M)$ ne dépendent pas de z.

➤ On peut se placer en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Si la distribution $\mathcal{D}$ est invariante par rotation autour de Oz, les composantes du champ $\overrightarrow{E}(M)$ ne dépendent par de θ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Distribution à symétrie cylindrique

En coordonnées cylindriques, le champ créé par une distribution à symétrie cylindrique d'axe Oz est de la forme

$$\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{e}_r\,.$$

Distribution à symétrie sphérique

En coordonnées sphérique, le champ créé par une distribution à symétrie sphérique de centre O est de la forme

$$\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{e}_r\,.$$