Électromagnétisme — Le théorème de Gauss

1 — Énoncé

Étant donnée une surface fermée Σ, le flux sortant du champ électrostatique à travers cette surface s'écrit

$$\oiint_{P\in\Sigma} \vec{E}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

où Q_{int} est la charge intérieure à la surface Σ, et $\mathrm{d}\vec{S}_P$ le vecteur surface élémentaire en P, normal à Σ et dirigé vers l'extérieur.

- Dans le cas où il n'y a que des charges volumiques, si $\mathcal{V}$ est le volume délimité par Σ, on a

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

- Le flux élémentaire du champ électrique s'écrit $\mathrm{d}\Phi_P = \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P$. L'intégrale double du flux total se comprend comme la somme des flux élémentaires à travers $\mathrm{d}\vec{S}_P$, quand P décrit toute la surface Σ.
- La surface Σ n'a pas de réalité physique, elle est purement « fictive » et n'a aucune raison de correspondre avec une surface réelle de la distribution étudiée.

2 — Utilisation pour le calcul d'un champ électrostatique

2.1 Principe

Le théorème de Gauss est toujours vrai : pour tout surface fermée Σ, le champ électrique vérifie toujours (1). En revanche, cette relation ne permet de calculer $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace que dans des situations « à haut degré de symétrie ».
Dans la pratique, les propriétés de symétrie et d'invariance du système doivent être telles que l'on peut trouver un système de coordonnées (α, β, γ) tel que :

— le champ n'a de composante non nulle que selon un seul des vecteurs de base $\vec{e}_\alpha$;

— cette composante ne dépend que d'une seule coordonnées d'espace α.

Il peut donc se mettre sous la forme $\vec{E}(M) = E(\alpha)\,\vec{e}_\alpha$.

2.2 Choix de la surface de Gauss

Étant donné un point M quelconque de l'espace où l'on veut calculer le champ, il s'agit de trouver une surface fermée Σ :

— qui passe par le point M considéré ;

— telle qu'en chacun de ses points P, le champ $\vec{E}(P)$ est :

  — soit tangent à Σ ; on a alors $\mathrm{d}\Phi_P = \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = 0$;

  — soit normal à Σ, sa composante étant égale (au signe près) à la composante $E(\alpha)$ de $\vec{E}(M)$; on a alors $\mathrm{d}\Phi_P = \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = \pm E(\alpha)\,\mathrm{d}S$.

Le flux total $\Phi = \oiint_{P\in\Sigma} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P$ ne dépendra alors que de la composante $E(\alpha)$ du champ en M, ce qui permet de déterminer ce champ.
Le choix de la surface de Gauss ne peut se faire qu'après une discussion soignée des symétries et invariances de la distribution de charges.

Invariances : elles permettent de conclure que les composantes de $\vec{E}$ sont indépendantes de certaines coordonnées.

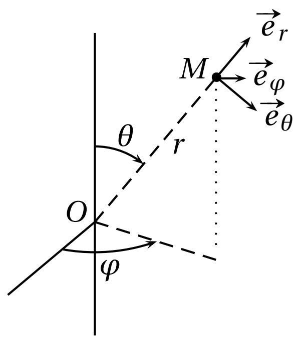
Symétries : elles permettent de conclure que certaines composantes du champ $\vec{E}$ sont nulles. On utilise la propriété suivante : *en tout point d'un plan* Π *de symétrie d'une distribution de charges, le champ* $\vec{E}$ *est contenu dans ce plan.*

- ➤ Écrire qu'un champ est contenu dans un plan revient à écrire que sa composante normale au plan est nulle. On cherchera donc les plans de symétrie définis par la donnée de M et de deux vecteurs de base. La composante du champ électrique sur le troisième vecteur de base est alors nulle.
- ➤ Si besoin, on pourra étudier la parité de la composante non nulle du champ.

2.3 Trois exemples fondamentaux

2.3.1 Distribution à symétrie sphérique

On considère une sphère de rayon a, portant la densité volumique de charge uniforme ρ. Compte tenu de la distribution, il est naturel de choisir les coordonnées sphériques :



Le champ électrique s'écrit donc sous la forme générale

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\varphi\,.$$

Invariances La distribution étant invariante par toute rotation d'angle θ ou φ, les composantes du champ ne dépendent pas de ces cordonnées :

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi})\,\vec{e}_r + E_\theta(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi})\,\vec{e}_\theta + E_\varphi(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi})\,\vec{e}_\varphi\,.$$

Symétries Le plan $(M;\vec{e}_r\,\vec{e}_\theta)$ étant un plan de symétrie, la composante du champ selon $\vec{e}_\varphi$ est nulle :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r + E_\theta(r)\,\vec{e}_\theta + \cancel{E_\varphi}(r)\,\vec{e}_\varphi\,.$$

Le plan $(M;\vec{e}_r\,\vec{e}_\varphi)$ étant un plan de symétrie, la composante du champ selon $\vec{e}_\theta$ est nulle :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r + \cancel{E_\theta}(r)\,\vec{e}_\theta + \cancel{E_\varphi}(r)\,\vec{e}_\varphi\,.$$

Finalement, le champ est radial et sa composante ne dépend que de r :

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r\,.$$

Choix de la surface de Gauss Le champ est porté par $\vec{e}_r$; en coordonnées sphériques, le vecteur $\vec{e}_r$ est normal à la sphère de centre O et de rayon r.
Soit $M(r,\theta,\varphi)$; la sphère Σ de centre O et de rayon r est telle qu'en chacun de ses points, le champ est normal à sa surface. Cette surface est fermée. On a donc

$$\oiint_{P\in\Sigma} \vec{E}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = \oiint_{P\in\Sigma} E(r)\,\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}S\,\vec{e}_r = \oiint_{P\in\Sigma} E(r)\cdot \mathrm{d}S.$$

La surfaceΣ vérifie par construction $r = \text{cte}$. On a donc $E(r) = \text{cte}$ quand P parcourt Σ, d'où

$$\oiint_{P\in\Sigma} E(r)\cdot \mathrm{d}S = E(r)\oiint_{P\in\Sigma} \mathrm{d}S = E(r)4\pi r^2,$$

la dernière intégrale n'étant autre que la surface totale de la sphère de rayon r.
Finalement, on a

$$\oiint_{P\in\Sigma} \vec{E}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = 4\pi r^2 E(r). \tag{2}$$

Calcul de la charge intérieure Il s'agit de calculer la charge comprise à l'intérieur d'une sphère de rayon r. Il faut envisager ici deux cas :

$r \geqslant a$ **:** la sphère chargée de rayon a est entièrement à l'intérieur de la surface de Gauss ; on a donc $Q_{\text{int}} = \rho\frac{4}{3}\pi a^3$.

$r < a$ **:** seule la partie de rayon r de la sphère chargée est à l'intérieur de la surface de Gauss ; on a donc $Q_{\text{int}} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$.

Application du théorème de Gauss Compte tenu de l'expression (2), l'application de (1) conduit à

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi\rho a^3}{3\varepsilon} \quad \text{pour } r \geqslant a, \text{ soit} \quad E(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2},$$

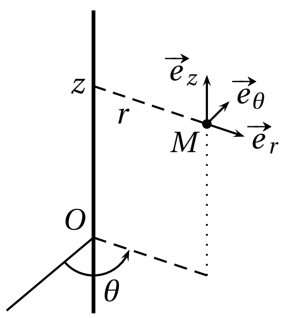
$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi\rho r^3}{3\varepsilon} \quad \text{pour } r < a, \text{ soit} \quad E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

On en déduit

$$\boxed{\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{pour } r < a \\[2mm] \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{pour } r \geqslant a \end{cases}}$$

2.3.2 Distribution à symétrie cylindrique

On considère un cylindre infini d'axe Oz, de rayon a, portant la charge volumique uniforme ρ.
Compte tenu de la distribution, il est naturel de choisir les coordonnées cylindriques :



Le champ électrique s'écrit donc sous la forme générale

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\,\vec{e}_z$$

Invariances La distribution étant invariante par translation selon Oz, les composantes du champ ne dépendent pas de z :

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\cancel{z})\,\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,\cancel{z})\,\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,\cancel{z})\,\vec{e}_z$$

La distribution étant invariante par toute rotation autour de Oz, les composantes du champ ne dépendent pas de θ :

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\cancel{\theta},\cancel{z})\,\vec{e}_r + E_\theta(r,\cancel{\theta},\cancel{z})\,\vec{e}_\theta + E_z(r,\cancel{\theta},\cancel{z})\,\vec{e}_z\,.$$

Symétrie Le plan $(M;\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution ; la composante du champ normale à ce plan, donc selon $\vec{e}_\theta$, est nulle :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r + \cancel{E_\theta}(r)\,\vec{e}_\theta + E_z(r)\,\vec{e}_z\,.$$

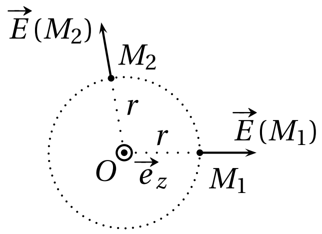
Le plan $(M;\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution ; la composante du champ normale à ce plan, donc selon $\vec{e}_z$, est nulle :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r + \cancel{E_\theta}(r)\,\vec{e}_\theta + \cancel{E_z}(r)\,\vec{e}_z\,.$$

Finalement le champ est radial, et sa composante ne dépend que de r :

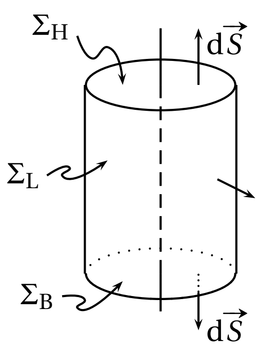
$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r\,.$$

- Les discussions sur les invariances et sur les symétrie sont indépendantes : on peut les traiter dans l'ordre que l'on veut.
- La discussion sur les invariances ne fait intervenir que la distribution de charges, tandis que la discussion sur les symétries fait intervenir le point M où l'on veut calculer le champ.
- Attention à la rigueur : le champ est radial, et *sa composante* ne dépend que de r. En revanche, le champ vectoriel $\vec{E}(M)$ ne dépend pas que de r : sa direction dépend de θ comme il est facile de s'en convaincre sur la figure suivante :



  Il est évident sur la figure que $\vec{E}(M_1) \neq \vec{E}(M_2)$, avec $OM_1 = OM_2 = r$. Si la composante du champ ne dépend que de r, la direction du vecteur $\vec{e}_r$ dépend de θ (la base cylindrique est une base locale). Il est donc faux de dire que « le champ ne dépend que de r ».

Choix de la surface de Gauss Le champ est porté par $\vec{e}_r$; en coordonnées cylindriques, le vecteur $\vec{e}_r$ est normal au cylindre d'axe Oz et de rayon r.
Soit $M(r,\theta,z)$; le cylindre de rayon r, de hauteur H arbitraire est tel qu'en chacun de ses points, le champ est normal à sa surface.
Une telle surface n'est pas fermée ; nous allons la fermer à l'aide de deux « couvercles ». Si on les choisit perpendiculaires à Oz, le champ est tangent à ces surfaces.



On a donc construit une surface fermée répondant aux critères énoncés en 2.2.

Calcul du flux En notant Σ_L la surface latérale, Σ_H le « couvercle » supérieur et Σ_B « couvercle » inférieur, on a
$$\oiint_{P\in\Sigma} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = \iint_{P\in\Sigma_\mathrm{L}} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P + \iint_{P\in\Sigma_\mathrm{H}} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P + \iint_{P\in\Sigma_\mathrm{B}} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P$$
avec $\vec{E}(P) = E(r)\,\vec{e}_r$.
Sur Σ_H, on a $\mathrm{d}\vec{S}_P = \mathrm{d}S\,\vec{e}_z$ et $\vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = 0$. Sur Σ_B, on a $\mathrm{d}\vec{S}_P = -\mathrm{d}S\,\vec{e}_z$ et $\vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = 0$. On a donc
$$\iint_{P\in\Sigma_\mathrm{H}} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = \iint_{P\in\Sigma_\mathrm{B}} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = 0\,.$$
Sur Σ_L, on a $\mathrm{d}\vec{S}_P = \mathrm{d}S\,\vec{e}_r$. On a donc $\vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = E(r)\,\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e}_r = E(r)\,\mathrm{d}S$ car $\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r = 1$, d'où
$$\iint_{P\in\Sigma_\mathrm{L}} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = \iint_{P\in\Sigma_\mathrm{L}} E(r)\,\mathrm{d}S\,.$$
La surface Σ_L vérifie par construction $r = \mathrm{cte}$. On a donc $E(r) = \mathrm{cte}$ quand P parcourt Σ_L, que l'on peut donc factoriser en le « sortant » de l'intégrale :
$$\iint_{P\in\Sigma_\mathrm{L}} E(r)\,\mathrm{d}S = E(r)\iint_{P\in\Sigma_\mathrm{L}} \mathrm{d}S$$
La dernière intégrale double n'est autre que la surface totale de Σ_L :
$$\iint_{P\in\Sigma_\mathrm{L}} \mathrm{d}S = 2\pi r H\,.$$
Finalement, on a
$$\oiint_{P\in\Sigma} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = 2\pi r H E(r)\,. \tag{3}$$

Calcul de la charge intérieure Il s'agit de calculer la charge comprise à l'intérieur d'un cylindre de rayon r, de hauteur H. Il faut ici envisager deux cas :

$r \geqslant a$: la hauteur H du cylindre chargé, de rayon a, est entièrement à l'intérieur de la surface de Gauss ; on a donc $Q_\mathrm{int} = \rho\times\pi a^2 H$.

$r < a$: la hauteur H du cylindre chargé n'est à l'intérieur de la surface de Gauss que sur son rayon r ; on a donc $Q_\mathrm{int} = \rho\times\pi r^2 H$.

Application du théorème de Gauss Compte tenu de l'expression (3), l'application de (1) conduit à
$$2\pi r H E(r) = \frac{\rho\pi a^2 H}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } r \geqslant a\text{, soit} \quad E(r) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\,,$$
$$2\pi r H E(r) = \frac{\rho\pi r^2 H}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } r < a\text{, soit} \quad E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\,,$$
On en déduit
$$\boxed{\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{pour } r < a \\[2mm] \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \geqslant a \end{cases}}$$

2.3.3 Plan infini chargé en surface

On considère le plan infini $z = 0$, portant la densité surfacique de charges uniforme σ_0.
On se place en coordonnées cartésiennes ; le champ s'écrit sous la forme générale

$$\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\,\vec{e}_x + E_y(x,y,z)\,\vec{e}_y + E_z(x,y,z)\,\vec{e}_z\,.$$

La distribution étant invariante par translation selon Ox, les composantes du champ ne dépendent pas de x :

$$\vec{E}(M) = E_x(\cancel{x},y,z)\,\vec{e}_x + E_y(\cancel{x},y,z)\,\vec{e}_y + E_z(\cancel{x},y,z)\,\vec{e}_z\,.$$

La distribution étant invariante par translation selon Oy, les composantes du champ ne dépendent pas de y :

$$\vec{E}(M) = E_x(\cancel{x},\cancel{y},z)\,\vec{e}_x + E_y(\cancel{x},\cancel{y},z)\,\vec{e}_y + E_z(\cancel{x},\cancel{y},z)\,\vec{e}_z\,.$$

Le plan $(M;\vec{e}_x,\vec{e}_z)$ est un plan de symétrie, donc la composante de $\vec{E}(M)$ selon $\vec{e}_y$ est nulle :

$$\vec{E}(M) = E_x(z)\,\vec{e}_x + \cancel{E_y}(z)\,\vec{e}_y + E_z(z)\,\vec{e}_z\,.$$

Le plan $(M;\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ est un plan de symétrie, donc la composante de $\vec{E}(M)$ selon $\vec{e}_x$ est nulle :

$$\vec{E}(M) = \cancel{E_x}(z)\,\vec{e}_x + \cancel{E_y}(z)\,\vec{e}_y + E_z(z)\,\vec{e}_z\,.$$

Finalement, le champ est de la forme

$$\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{e}_z\,.$$

Le champ se réduit à sa composante normale au plan de la distribution $z = 0$. Ce plan est naturellement un plan de symétrie de la distribution ; si on considère deux points symétriques $M(z)$ et $M'(-z)$ par rapport à ce plan, les propriétés de symétrie du champ $\vec{E}(M)$ impliquent

$$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) \quad \text{soit} \quad E(-z) - E(z)\,.$$

La composante $E(z)$ est une fonction impaire de z ; on mène l'étude pour $z > 0$.
La surface de Gauss est donc un cylindre, d'axe Oz, de section S arbitraire, compris entre $-z$ et $+z$.
On a d'une part

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = E(z)S + E(-z)(-S) = 2E(z)S\,.$$

D'autre part $Q_{\text{int}} = \sigma S$, d'où $SE(z) = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ pour $z > 0$. On a donc

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\[2ex] -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

2.4 Ce qu'il faut savoir faire

En reprenant les trois exemples précédents :

1. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.

2. Mener rigoureusement la discussion sur les symétries et les invariances, afin d'arriver à un champ de la forme $\vec{E}(M) = E(\alpha)\vec{e}_\alpha$.

3. Choisir la surface de Gauss Σ en comprenant ce choix.

4. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers Σ.

5. Mener le calcul de Q_{int}. Si la densité n'est pas uniforme, se reporter au calcul de la charge d'une distribution (calcul différentiel). Il peut y avoir plusieurs cas à envisager.

- ➤ Si la distribution comporte des charges surfaciques sur une surface S, on ne cherchera pas à calculer le champ en un point M de S; le champ présentera une discontinuité à la traversée de la surface chargée.

6. Appliquer enfin le théorème de Gauss pour établir l'expression de $\vec{E}(M)$.

➤ Dans les deux exemples précédents, le calcul du flux a été détaillé bien plus qu'il n'est demandé dans une rédaction. Le calcul du flux doit être fait « automatiquement ». Il faut connaître :

En coordonnées sphériques

Le champ électrique créé par une distribution à symétrie sphérique de centre O est de la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.
En prenant une surface de Gausse sphérique de rayon z, on a

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = 4\pi r^2 E(r)\,.$$

Dans le cas général où la distribution porte la densité volumique de charge $\rho(r)$, la charge à l'intérieur de la sphère de rayon r est donnée par

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'\,.$$

En coordonnées cylindriques

Le champ électrique créé par une distribution à symétrie cylindrique d'axe Oz est de la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques.
En prenant une surface de Gausse cylindrique d'axe Oz, de rayon z et de hauteur H arbitraire, on a

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = 2\pi r H E(r)\,.$$

Dans le cas général où la distribution porte la densité volumique de charge $\rho(r)$, la charge à l'intérieur du cylindre de rayon r et de hauteur H est donnée par

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r')2\pi r' H\,\mathrm{d}r'\,.$$

Analogies avec le champ gravitationnel

Force de Coulomb	Interaction gravitationnelle
$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{(M_1M_2)^3}$	$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -Gm_1m_2\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{(M_1M_2)^3}$

On en déduit les analogies :

Électrostatique	Gravitation
charge q	masse m
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$
$\dfrac{1}{\varepsilon_0}$	$-4\pi G$
champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$	champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)$

➤ Une masse ponctuelle m en O crée en M le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = -Gm\dfrac{\overrightarrow{e}_r}{r^2}$.

Il y a cependant des différences entre les deux interactions :

— l'interaction gravitationnelle est toujours attractive ;

— il n'y a pas de masse négative, donc il n'existe pas de plan d'anti-symétrie pour une distribution de masses.

Théorème de Gauss pour le champ gravitationnel

À partir des analogies précédentes, on peut écrire le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel :

$$\boxed{\oiint_{P\in\Sigma} \overrightarrow{\mathcal{G}}(P)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_P = -4\pi G M_{\mathrm{int}}},$$

où M_{int} est la masse intérieure à la surface fermée Σ.

➤ Vis-à-vis du champ gravitationnel créé à l'extérieur, un astre à symétrie sphérique peut être modélisé par une masse ponctuelle située en son centre.