TD électromagnétisme n° 1 — Électrostatique

Introduction à l'électrostatique

1 — Calculs de charge en coordonnées sphériques

On considère une boule $\mathcal{D}$ de rayon a, de centre O.
Calculer la charge portée par une sphère de rayon r, en considérant les cas $r > a$ et $r < a$, si la sphère Σ :

— est uniformément chargée en volume avec la densité volumique de charge ρ_0 ;

— porte la densité volumique de charge

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

en coordonnées sphériques ;

— est chargée en surface avec la densité surfacique de charge σ_0 uniforme.

2 — Calculs de charge en coordonnées cylindriques

On considère un cylindre $\mathcal{D}$ de rayon a, d'axe Oz, de longueur infinie.
Calculer la charge portée par un cylindre de hauteur H et de rayon r, en considérant les cas $r > a$ et $r < a$, si le cylindre :

— est uniformément chargé en volume avec la densité volumique de charge ρ_0 ;

— porte la densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{r}{a}$ en coordonnées cylindriques ;

— est chargé en surface avec la densité surfacique de charge σ_0 uniforme.

3 — Espace chargé

La densité volumique de charge

$$\rho(M) = \frac{K}{4\pi a^2 r}\,\mathrm{e}^{-r/a},$$

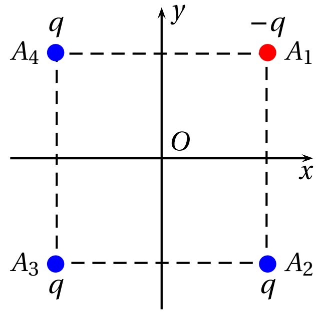
où K et a sont deux constantes et $r = OM$, est répartie dans tout l'espace.

1. Quelles sont les dimensions des constantes K et a ?

2. Calculer la charge totale contenue dans tout l'espace.

4 — Champ au centre d'un carré

On considère quatre charges ponctuelles, avec $q > 0$:



1. En examinant les symétries de la distribution, déterminer la direction de $\vec{E}(O)$, champ électrique en centre de la figure.

2. Établir l'expression de $\vec{E}(O)$.

5 — Espace chargé

Le demi-espace $z > 0$ est chargé avec le densité volumique de charges $\rho(z) = \rho_0\,\mathrm{e}^{-z/a}$.
Une couche d'épaisseur b porte la densité volumique de charge $-\rho_0$: on a donc

$$\rho(M) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z < -b \\ -\rho_0 & \text{pour } -b \leqslant z < 0 \\ \rho_0\,\mathrm{e}^{-z/a} & \text{pour } z > 0\,. \end{cases}$$

1. Déterminer b pour que la charge totale de la distribution soit nulle.

2. Étudier les symétries et invariances de cette distribution.

6 — Cylindre chargé

On considère un cylindre de longueur L, d'axe Oz (tel que $-L/2 \leqslant z \leqslant L/2$) et de rayon a. On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz.
Étudier les symétries et les invariances de cette distribution :

1. Dans le cas où il porte la charge volumique

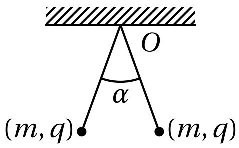
$$\rho(M) = \rho_0 \sin^2\theta\,.$$

2. Dans le cas où il porte la charge volumique

$$\rho(M) = \rho_0 \cos\theta\,.$$

7 — Deux charges en équilibre

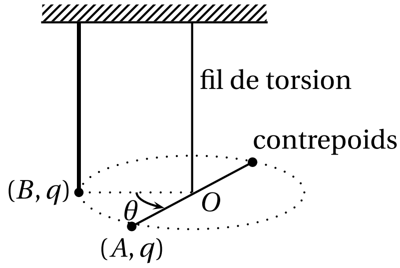
Deux boules identiques de masse m, portant la même charge q, sont fixées en un point O par deux fils isolants de longueur a. En assimilant les boules à des charges ponctuelles, calculer l'angle α entre les fils à l'équilibre.



Application numérique :
$q = 10^{-8}$ C ; $a = 1$ m ; $m = 10^{-3}$ kg.
On donne $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

8 — Balance de Coulomb

La balance de Coulomb se compose d'un fil de torsion de constante C auquel est accroché en son milieu O une tige horizontale de longueur $2a$. Cette tige porte à une extrémité A une boule chargée de q. Le fil n'étant pas tordu, la boule A est au contact d'une boule B, fixe, portant la même charge q.



1. Établir l'équation en θ exprimant l'équilibre du système :

$$C\theta = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}\frac{\cos\theta/2}{\sin^2\theta/2}$$

2. Résoudre graphiquement puis numériquement cette équation. On donne $C = 3\cdot 10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$; $a = 140$ cm ; $q = 2\cdot 10^{-9}$ C.

Théorème de Gauss

9 — Distribution à symétrie cylindrique

Pour chacune des distributions suivantes :

— déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace, et représenter graphiquement l'évolution spatiale de sa composante ;

— déterminer le potentiel électrique $V(M)$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement son évolution spatiale.

1. On considère un fil infini selon Oz, portant la densité linéique de charge uniforme λ_0.

2. On considère un cylindre infini d'axe Oz, de rayon a, portant la densité volumique de charge

$$\rho(r) = \rho_0\frac{r}{a}.$$

3. On considère un cylindre infini d'axe Oz, de rayon a, chargé sur sa surface avec la densité surfacique uniforme σ_0.

10 — Distribution à symétrie sphérique

Pour chacune des distributions suivantes :

— déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace, et représenter graphiquement l'évolution spatiale de sa composante ;

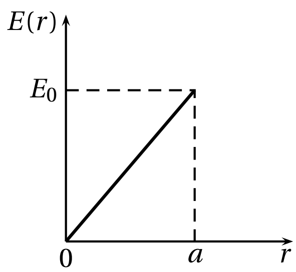
— déterminer le potentiel électrique $V(M)$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement son évolution spatiale.

1. On considère une sphère de rayon a portant la densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0\left(1-\dfrac{r}{a}\right)$ en coordonnées sphériques.

2. On considère une sphère de rayon a, chargée sur sa surface avec la densité surfacique uniforme σ_0.

11 — Champ créé par un cylindre chargé

On considère un cylindre infini de rayon a. On donne le graphe du champ électrique en un point M à une distance $r < a$ de l'axe du cylindre :



1. Montrer que ce champ est compatible avec une densité volumique de charge ρ_0 uniforme à l'intérieur du cylindre, dont on donnera l'expression.

2. Déterminer le champ électrique en un point M situé à une distance $r > a$ de l'axe.

3. En déduire $V(M)$ en tout point de l'espace. Représenter le graphe de $V(r)$.

12 — Deux plans de charges opposées

Calculer le champ électrostatique créé par deux plans infinis, distants de d, portant les densités surfaciques de charges uniformes σ et $-\sigma$.

13 — Modèle de l'atome

Un ancien modèle de l'atome le décrit comme étant constitué d'un noyau (boule de centre O, de charge e, de rayon $a = 100$ pm) à l'intérieur duquel gravite un électron (charge ponctuelle $-$e). On note $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.

1. Montrer que le potentiel créé par la boule est

$$V(r<a) = \frac{\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2}\right) \text{ et } V(r>a) = \frac{\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

2. Donner l'expression de l'énergie d'ionisation de l'atome (énergie nécessaire pour envoyer l'électron à l'infini). La calculer et la comparer à celle de l'atome d'hydrogène (13,6 eV).

3. Étudier le mouvement de l'électron autour de sa position d'équilibre. Et dégager notamment la pulsation ω_0 des petites oscillations. À quel domaine appartient la fréquence associée ?

Indication : on commencera par chercher le champ $\vec{E}(M)$ créé par la boule.

14 — Potentiel de Yukawa

En tout point M de l'espace, le potentiel électrostatique a pour expression en coordonnées sphériques

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-r/a}.$$

1. Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

2. Déterminer le flux $\Phi(r)$ de $\vec{E}(M)$ à travers une surface sphérique de rayon r et de centre O. En déduire la charge $Q(r)$ comprise dans une sphère de rayon r.

3. Déterminer $\lim_{r\to 0} Q(r)$. Conclusion ?

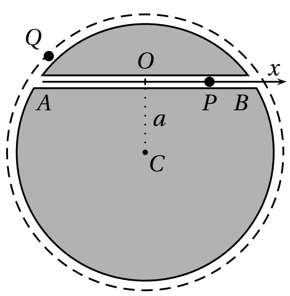
4. Déterminer $\lim_{r\to\infty} Q(r)$. Conclusion ?

5. Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ régnant dans l'espace.

6. Que pourrait modéliser une telle distribution ?

15 — Oscillations dans un tunnel

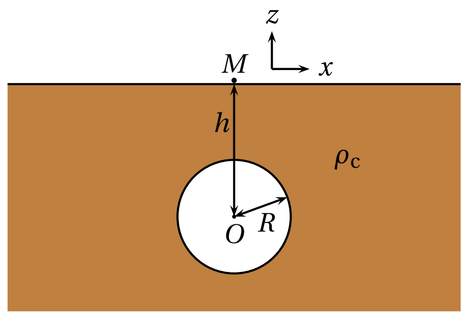
Un astre sphérique de masse M uniformément répartie et de rayon R est percé d'un tunnel rectiligne AB.



Un objet de masse m assimilé à une particule ponctuelle P, peut se déplacer sans frottement dans le tunnel.
Un satellite Q est en orbite circulaire à une altitude négligeable.
À $t = 0$, le satellite Q est en A, et l'objet P est lâché du point A, avec une vitesse nulle.
Les points P et Q se rencontreront-ils périodiquement (en A ou en B) ? Si oui, calculer la périodicité de leurs rencontres.
On négligera la rotation de l'astre sur lui-même.

16 — Gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des champs gravitationnels.
On donne $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI.
Dans un sol calcaire, de masse volumique ρ_c, une cavité a été créée par la lente dissolution de la roche et par l'écoulement souterrain qui évacue les matières dissoutes au fur et à mesure. On considère la cavité comme vide de matière, et sphérique de rayon R.



1. En utilisant le théorème de superposition, exprimer la variation du champ de gravité (appelée « anomalie gravimétrique ») à la verticale du centre de la cavité (au point M de la figure) du fait de l'existence de cette cavité.

2. On fait varier l'abscisse x du point M tout en restant au niveau du sol. Sans calcul supplémentaire, donner l'allure du graphe représentant l'anomalie gravimétrique verticale en fonction de x.

3. Comment les résultats sont-ils modifiés su la cavité est remplie d'eau de masse volumique ρ_e ?

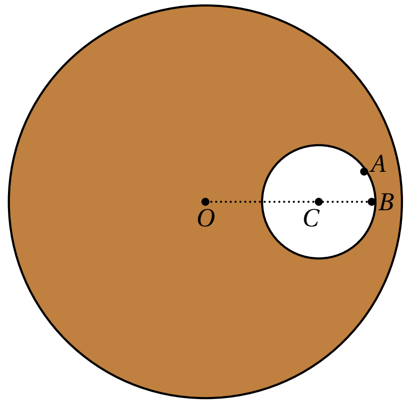
4. L'unité utilisée pour quantifier l'anomalie gravimétrique est le gal, avec 1 Gal = 1 cm·s^{-2}. On utilise un gravimètre portatif permettant d'atteindre une résolution effective d'environ 10 μGal.
Ce gravimètre est-il capable de détecter une cavité de 5 m de rayon, située à 10 m de profondeur ?
On donne $\rho_c = 2{,}6$ g·cm^{-3}.

17 — Grotte alors !

1. Rappeler le théorème de Gauss pour la gravitation.

2. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}(M)$ créé en tout point M *intérieur* à une planète sphérique homogène de centre O, de rayon R et de masse volumique uniforme ρ_0.

3. On considère maintenant que cette planète possède une grotte sphérique de centre C et de rayon a.
Deux explorateurs pénètrent dans le grotte; ils se trouvent aux points A et B.
Chacun laisse tomber une pierre de masse m. Déterminer la trajectoire de chacune des pierres. Laquelle touche l'autre extrémité de la grotte en premier ?



Lois locales

18 — Jonction P-N

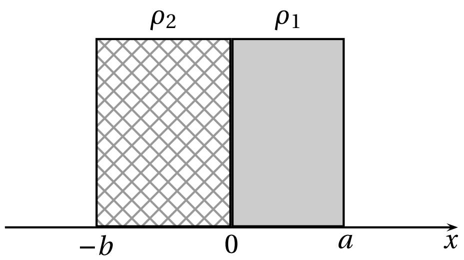
La jonction PN joue un rôle très important dans la technologie des semi-conducteurs.

1. Citer des composants électroniques où on la rencontre.

On étudie le comportement électrique de cette jonction PN sur le modèle suivant : elle se comporte comme deux couches planes illimitées selon Oy et Oz, portant des densités volumiques de charges électriques de signes opposés :

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_2 < 0 & \text{pour } -b \leqslant x < 0 \\ \rho_1 > 0 & \text{pour } 0 \leqslant x < a \end{cases}$$

L'ensemble est électriquement neutre.



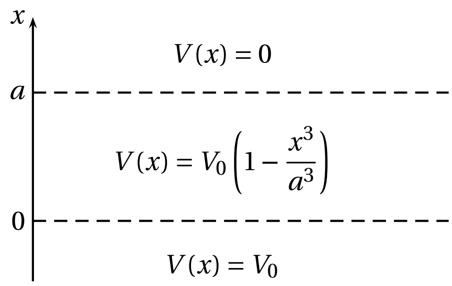
2. Déterminer le lien entre ρ_1, ρ_2, a et b.

3. Déterminer complètement le vecteur champ électrique en tout point intérieur (le champ électrique extérieur étant nul) et le représenter graphiquement.

4. Déterminer le potentiel électrique $V(x)$ en tout point de l'espace (avec $V(x=0)=0$) et le représenter graphiquement

19 — Distribution de charges

On donne le potentiel électrostatique unidimensionnel, défini sur trois domaines de l'espace :



1. Calculer le champ électrique.

2. Quelles sont les distributions volumique et surfacique de charge ?

3. A-t-on neutralité électrique ?

20 — Électrolyte

On considère le demi-espace $z \geqslant 0$, constitué d'un électrolyte de cations et d'anions de charges respectives $+\mathrm{e}$ et $-\mathrm{e}$. Le demi-espace $z < 0$ est constitué d'un métal.
Le potentiel $V(z)$ ne dépend que de z et vaut $V_0 > 0$ en $z = 0$.
On considère l'ensemble du système à l'équilibre à une température T.
Les densités volumiques de cations et d'anions sont données par

$$N_+(z) = n_0 \exp\left(-\frac{V(z)\mathrm{e}}{k_\mathrm{B} T}\right) \quad \text{et} \quad N_-(z) = n_0 \exp\left(\frac{V(z)\mathrm{e}}{k_\mathrm{B} T}\right).$$

1. Donner une interprétation physique des facteurs de Boltzmann.

2. Exprimer la densité volumique de charge ρ et trouver une équation différentielle sur $V(z)$.

3. Dans le cas où $\mathrm{e}V(z) \ll k_\mathrm{B} T$, déterminer $V(z)$ avec $V(\infty) = 0$, et le champ $\vec{E}$ dans l'électrolyte.

21 — Écrantage de Debye

On considère un milieu globalement électriquement neutre, dans un état ionisé (un plasma par exemple), constitué de particules de charges $+q$ et $-q$, de densités moyennes identiques égales à n_0.
On considère une charge q de ce milieu au point O. La présence de la charge q en O modifie localement la répartition des charges positives et négatives, celles-ci ayant alors les densités $n^+(r)$ et $n^-(r)$ respectivement, à la distance r de O.
Ces densités sont données par la loi de Boltzmann, à l'équilibre thermodynamique (statistique) du système à la température T :

$$n^+(r) = n_0 \exp\left(-\frac{qV}{\mathrm{k_B}T}\right) \quad \text{et} \quad n^-(r) = n_0 \exp\left(+\frac{qV}{\mathrm{k_B}T}\right),$$

puisque l'énergie potentielle d'une charge q en un point de potentiel V s'écrit $\mathcal{E}_\mathrm{p} = qV$. À grande distance de l'origine O, le milieu retrouve sa neutralité globale et les densités de charges positives et négatives tendent vers la même valeur n_0 ; en prenant $V = 0$ pour $r \to \infty$, on a bien $n^+(r) = n^-(r) = n_0$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$.

2. Linéariser celle-ci pour $qV \ll \mathrm{k_B}T$, puis la résoudre en faisant apparaître une distance caractéristique ℓ_D, dont on donnera l'expression.

3. Montrer que ℓ_D, longueur de Debye du plasma, caractérise l'écrantage du potentiel coulombien de la charge $+q$ par les autres entités chargées du milieu ionisé.

Pour $G(M) = G(r)$, le laplacien en coordonnées sphériques est $\Delta G = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2(rG)}{\mathrm{d}r^2}$.

22 — Diode à vide

Les deux plaques A et B d'une diode à vide sont deux plans conducteurs parallèles (surface $s = 5\,\mathrm{cm}^2$, distance $\ell = 5\,\mathrm{mm}$). La cathode A est chauffée et peut émettre des électrons dans le vide. Une différence de potentiel $U = 100\,\mathrm{V}$ est maintenue entre A et B (on prendra comme potentiel des électrodes $V_A = 0\,\mathrm{V}$ et $V_B = U > 0$).
Les électrons sortis de A et accélérés par le champ électrique sont attirés vers l'anode B, d'où un courant $I > 0$ de B vers A. On pourra négliger ici l'énergie cinétique initiale d'un électron émis.
On suppose que le courant électronique n'est pas limité par le processus d'émission lui-même, mais par l'effet répulsif des électrons qui circulent dans le vide et qui constitue une charge d'espace négative de densité volumique ρ. On admettra que l'on est en régime stationnaire et que la limite supérieure du courant est atteinte quand le champ résultant $\vec{E}$ est nul à la surface de A.

1. Le problème est à une dimension : on note x la distance à A.

En régime permanent, relier $v(x)$ à $V(x)$, $V(x)$ à $\rho(x)$, et exprimer l'intensité I traversant la diode.

2. Montrer que $V(x)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{k}{\sqrt{V(x)}},$$

où k est une constante qui dépend de I (on donnera son expression).

Expliciter $V(x)$ en tenant compte des contions aux limites sur les plaques.

Indication : on pourra multiplier les deux membres de l'équation précédente par $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$.

3. En déduire la valeur de I. Donner l'allure de $\rho(x)$ et $v(x)$.

23 — Membrane cellulaire

On considère une cellule biologique entourée de sa membrane. Localement elle peut être modélisée par un plan placé en $x = 0$. Le potentiel créé est alors

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 \exp\left(-\dfrac{x}{a}\right) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$.

2. Donner l'expression de la densité volumique de charge $\rho(x)$.

La densité surfacique de charge sur la membrane σ vérifie

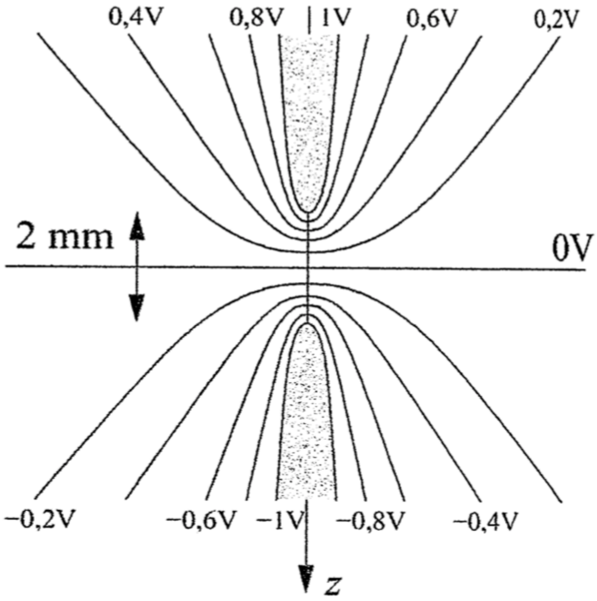
$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_x(0^+) - E_x(0^-).$$

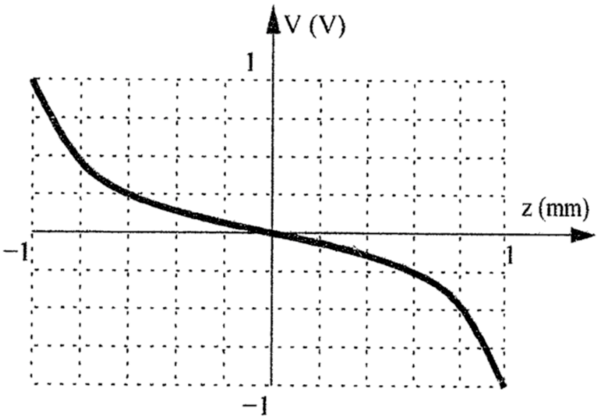
3. Donner l'expression de σ et tracer $\rho(x)$.

4. Déterminer la charge dans un cylindre d'axe x et de rayon r.

24 — Champ disruptif de l'air

Un logiciel de simulation permet de tracer l'allure des lignes équipotentielles autour de deux électrodes portées aux potentiels respectifs $-1\,\mathrm{V}$ et $+1\,\mathrm{V}$.
On obtient aussi le graphe des variations de potentiel V en fonction de z sur l'axe.





1. Où le champ électrique est-il maximal ?

2. Le champ disruptif de l'air est $E_{\text{dis}} = 3{,}6 \times 10^6\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. Quelle tension doit-on appliquer aux bornes des électrodes pour atteindre ce champ au centre O du dispositif ?

25 — Colloïde

Un colloïde est une particule dont la taille est très grande à l'échelle atomique ; il est assimilable à une sphère chargée uniformément en surface, de rayon r_0, de charge $+p\text{e}$ ($p \in \mathbf{N}^*$).

On plonge un tel colloïde dans un électrolyse où règnent des charges $\pm\text{e}$; on suppose que lorsqu'on s'en éloigne suffisamment, le champ électrostatique est dû uniquement aux ions de l'électrolyte et l'on admet que l'on pourra remplacer dans toutes les équations ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_{\text{r}}$, avec $\varepsilon_{\text{r}} = 80$.

On donne les distributions volumiques des cations et des anions dans l'électrolyte :

$$n^+(r) = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{p}}^+(r)}{k_{\text{B}}T}\right) \text{ et } n^-(r) = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{p}}^-(r)}{k_{\text{B}}T}\right),$$

où $E_{\text{p}}^{\pm}$ est l'énergie potentielle électrostatique de la charge $\pm\text{e}$ dans le potentiel $V(r)$.

1. Qu'évoquent les formes des densités volumiques d'ions ?

2. Donner l'expression du champ électrostatique et du potentiel électrostatique en $r = r_0^+$ (quand $r \to r_0$, avec $r > r_0$).

3. Exprimer la densité volumique de charges $\rho(r)$ en fonction de $V(r)$. On admettra que $k_{\text{B}}T \gg E_{\text{p}}$.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$, et la résoudre.
On introduira une longueur caractéristique D que l'on exprimera en fonction de e, n_0, ε et $k_{\text{B}}T$.

5. Tracer l'allure de $V(r)$ en commentant le choix des constantes d'intégration. Pourquoi parle-t-on d'effet d'écran ?

6. Pour de l'eau pure à pH = 7, calculer D.

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta G = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rG)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}.$$

26 — Matière noire

On étudie une galaxie spirale, modélisée par un noyau sphérique de rayon R, de masse volumique ρ_0 uniforme (on suppose les étoiles uniformément réparties dans le noyau) et de masse M_{g}.

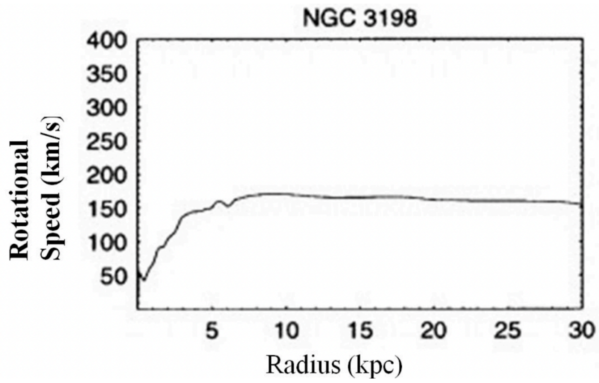
On considère une étoile de masse m, en mouvement circulaire uniforme autour du centre de la galaxie.

1. Rappeler le théorème de Gauss pour la gravitation. Déterminer le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$ pour tout point M à l'intérieur ou à l'extérieur du noyau de la galaxie.

2. En déduire l'expression de la vitesse $v(r)$ de l'étoile pour $r < R$ et $r \geqslant R$. Tracer le graphe $v(r)$ correspondant.

On rappelle que pour mouvement circulaire uniforme, l'accélération est donnée par $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{r}\vec{e}_r$.

On représente les données expérimentales mesurées pour la galaxie NGC 3198. Le kiloparsec (kpc) est une unité de longueur utilisée en astronomie.



Sont-elles compatibles avec la modélisation de la galaxie adopté ?

L'existence de matière noire a été proposée pour expliquer les observations. Cette matière, non visible, est distribuée dans un halo sphérique entourant la galaxie. On fait les hypothèses suivantes :

— il n'y a pas de matière noire dans le noyau de rayon R ($R \approx 5$ kpc pour la galaxie NGC-3198) ;

— la matière noire est symétriquement répartie dans un halo sphérique compris entre R et nR, avec une masse volumique $\rho_d(r)$ en coordonnées sphériques, et où $n > 1$ est un facteur numérique caractéristique de la galaxie ;

— à l'extérieur du noyau, la vitesse de l'étoile étudiée est constante : $v(r) = v_0$, où, par continuité à la limite du noyau, $v_0 = v(R)$ déterminée précédemment.

3. Déterminer l'expression du champ gravitationnel dans la zone $R < r < nR$ donnant le champ de vitesse $v(r) = v_0$.

Par analogie avec l'électrostatique, écrire l'équivalent de la relation de Maxwell-Gauss pour la gravitation. En déduire l'expression $\rho_d(r)$ de la densité volumique de matière noire compatible avec le profil de vitesse adopté, en fonction de ρ_0, R et r pour $R < r < nR$.

Représenter $\rho(r)$ pour $0 < r < nR$.

Pour un champ $\vec{A} = A(r)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques, on donne $\operatorname{div}\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}\left(r^2 A(r)\right)}{\mathrm{d}r}$.

4. En déduire en fonction de n la proportion de matière noire par rapport à la masse totale de la galaxie :

$$\gamma = \frac{M_{\text{noire}}}{M_g + M_{\text{noire}}}.$$

Dans la pratique, on détermine $n = 10$. Conclure.