

TD électromagnétisme n° 1

Électrostatique — solution

Introduction à l'électrostatique

1 — Calculs de charge en coordonnées sphériques

On considère une boule \mathcal{D} de rayon a , de centre O . Calculer la charge portée par une sphère de rayon r , en considérant les cas $r > a$ et $r < a$, si la sphère Σ :

- est uniformément chargée en volume avec la densité volumique de charge ρ_0 ;
- porte la densité volumique de charge

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

en coordonnées sphériques;

- est chargée en surface avec la densité surfacique de charge σ_0 uniforme.

2 — Calculs de charge en coordonnées cylindriques

On considère un cylindre \mathcal{D} de rayon a , d'axe Oz , de longueur infinie.

Calculer la charge portée par un cylindre de hauteur H et de rayon r , en considérant les cas $r > a$ et $r < a$, si le cylindre :

- est uniformément chargé en volume avec la densité volumique de charge ρ_0 ;
- porte la densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{a}$ en coordonnées cylindriques;
- est chargé en surface avec la densité surfacique de charge σ_0 uniforme.

3 — Espace chargé

1. L'argument d'une exponentielle étant sans dimension, $\frac{r}{a}$ doit l'être sans dimension. La constante a a donc la dimension de r , c'est-à-dire d'une longueur : $[a] = L$. On peut alors déterminer la dimension de K .

La charge volumique a la dimension d'une charge divisée par un volume. L'exponentielle étant sans dimension, et le dénominateur $4\pi a^2 r$ ayant la dimension d'un volume, la constante K a la dimension d'une charge : $[K] = IT$. La distribution de charges est à symétrie sphérique. On considère donc une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur dr . Elle porte la charge $dq = \rho(r)4\pi r^2 dr$.

La charge contenue dans tout l'espace vaut donc :

$$Q = \iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho(M) d\tau = \frac{K}{a^2} \int_0^{+\infty} r e^{-r/a} dr$$

On effectue une intégration par parties. Posons

$$f(r) = r \quad \text{et} \quad g'(r) = e^{-r/a}.$$

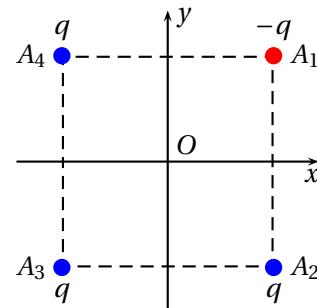
On a $f'(r) = 1$ et $g(r) = -ae^{-r/a}$, et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r e^{-r/a} dr &= [-are^{-r/a}]_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} e^{-r/a} dr \\ &= 0 - a^2 [e^{-r/a}]_0^{+\infty} = a^2 \end{aligned}$$

La charge totale de la distribution vaut donc $Q = K$.

4 — Champ au centre d'un carré

On considère quatre charges ponctuelles, avec $q > 0$:



1. En examinant les symétries de la distribution, déterminer la direction de $\vec{E}(O)$, champ électrique en centre de la figure.

2. Établir l'expression de $\vec{E}(O)$.

5 — Espace chargé

Le demi-espace $z > 0$ est chargé avec le densité volumique de charges $\rho(z) = \rho_0 e^{-z/a}$.

Une couche d'épaisseur b porte la densité volumique de charge $-\rho_0$: on a donc

$$\rho(M) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z < -b \\ -\rho_0 & \text{pour } -b \leq z < 0 \\ \rho_0 e^{-z/a} & \text{pour } z > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer b pour que la charge totale de la distribution soit nulle.

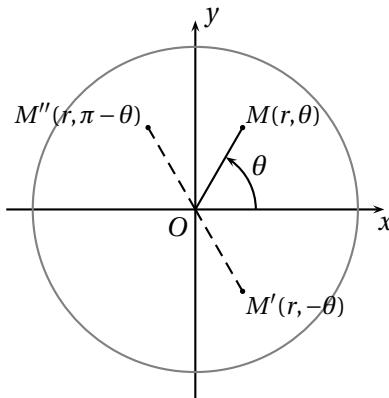
2. Étudier les symétries et invariances de cette distribution.

6 — Cylindre chargé

1. La géométrie de la distribution nous conduit naturellement à utiliser les coordonnées cylindriques d'axe Oz .

Étude des symétries

La densité surfacique de charge est positive sur toute la distribution; elle ne peut donc pas comporter de plan d'antisymétrie¹.



Soit $M'(r, -\theta)$ le symétrique de M par rapport au plan xOz . On a $\rho(M') = \rho_0 \sin^2(-\theta) = \rho_0 \sin^2 \theta = \rho(M)$.

Le plan xOz est un plan de symétrie de la distribution de charges.

Soit $M''(r, \pi - \theta)$ le symétrique de M par rapport au plan yOz . On a $\sigma(M'') = \sigma_0 \sin^2(\pi - \theta) = \sigma_0 \sin^2 \theta = \sigma(M)$.

Le plan yOz est un plan de symétrie de la distribution de charges.

La densité de charges ne dépend pas de z . La distribution étant de longueur finie, seul le plan médiateur xOy est plan de symétrie de la distribution.

Étude des invariances

La distribution étant de longueur finie, elle n'est pas invariante par translation.

La densité de charges dépendant de l'angle θ , elle n'est pas invariante par rotation autour de Oz .

2. On réutilise la figure précédente.

Étude des symétries

Soit M' le symétrique de M par rapport au plan xOz . On a :

$$\sigma(M') = \rho(r, -\theta) = \rho_0 \cos(-\theta) = \rho_0 \cos \theta = \sigma(M)$$

Le plan xOz est donc un plan de symétrie de la distribution de charges.

Soit M'' le symétrique de M par rapport au plan yOz . On a :

$$\sigma(M'') = \rho(r, \pi - \theta) = \rho \cos(r, \pi - \theta) = -\rho_0 \cos \theta = -\sigma(M)$$

Le plan yOz est donc un plan d'antisymétrie de la distribution de charges.

La densité de charges ne dépend pas de z . La distribution étant de longueur finie, seul le plan médiateur xOy est plan de symétrie de la distribution.

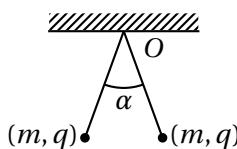
Étude des invariances

La distribution étant de longueur finie, elle n'est pas invariante par translation.

La densité de charges dépendant de l'angle θ , elle n'est pas invariante par rotation autour de Oz .

7 — Deux charges en équilibre

Deux boules identiques de masse m , portant la même charge q , sont fixées en un point O par deux fils isolants de longueur a . En assimilant les boules à des charges ponctuelles, calculer l'angle α entre les fils à l'équilibre.



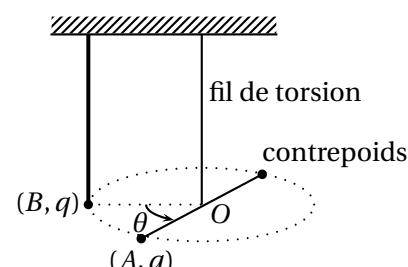
Application numérique :

$$q = 10^{-8} \text{ C}; a = 1 \text{ m}; m = 10^{-3} \text{ kg}.$$

On donne $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

8 — Balance de Coulomb

La balance de Coulomb se compose d'un fil de torsion de constante C auquel est accroché en son milieu O une tige horizontale de longueur $2a$. Cette tige porte à une extrémité A une boule chargée de q . Le fil n'étant pas tordu, la boule A est au contact d'une boule B , fixe, portant la même charge q .



1. Établir l'équation en θ exprimant l'équilibre du système :

$$C\theta = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a} \frac{\cos\theta/2}{\sin^2\theta/2}$$

2. Résoudre graphiquement puis numériquement cette équation. On donne $C = 3 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$; $a = 140 \text{ cm}$; $q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

1. La densité de charge est nécessairement nulle en tout point d'un plan d'antisymétrie.

☞☞☞ Théorème de Gauss ☞☞☞

9 — Distribution à symétrie cylindrique

1. La distribution est à symétrie cylindrique : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz .

Surface de Gauss : cylindre de rayon r , de hauteur H .
On a $Q_{\text{int}} = H\lambda_0$.

Théorème de Gauss :

$$2\pi r H E(r) = \frac{H\lambda_0}{\epsilon_0},$$

d'où

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r.$$

2. Symétrie cylindrique : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

Surface de Gauss : cylindre de rayon r , de hauteur H arbitraire.

Le flux de \vec{E} vaut alors

$$\iint_{P \in \Sigma} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = 2\pi r H E(r).$$

Pour $r \geq a$, on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho(r) 2\pi r H dr = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0 H a^2}{3}.$$

Pour $r < a$, on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r') 2\pi r' H dr' = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\pi\rho_0 H r^3}{3a}.$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0 a} \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$

3. Les propriétés de symétrie et d'invariance sont les mêmes, seul change le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss.

Pour $r \geq a$, on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho(r) 2\pi r H dr = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi\rho_0 H a^2}{3}.$$

Pour $r < a$, on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r') 2\pi r' H dr' = \frac{2\pi\rho_0 H}{a} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\pi\rho_0 H r^3}{3a}.$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0 a} \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$

10 — Distribution à symétrie sphérique

1. La distribution est à symétrie sphérique : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

Surface de Gauss : sphère de rayon r . Le flux du champ vaut $4\pi r^2 E(r)$.

Pour $r \geq a$, on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho(r) 4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho_0 a^3}{3}.$$

Pour $r < a$, on a

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right).$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right) \vec{e}_r & \text{pour } r < a \\ \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{pour } r \geq a. \end{cases}$$

2. Les propriétés de symétrie et d'invariance sont les mêmes, seul change le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss.

Si $r < a$, on a $Q_{\text{int}} = 0$.

Si $r > a$, on a $Q_{\text{int}} = \sigma_0 4\pi a^2$.

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < a \\ \frac{\sigma_0 a^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r > a. \end{cases}$$

On remarque que le champ est discontinu en $r = a$, la discontinuité valant

$$E(a^+) - E(a^-) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

11 — Champ créé par un cylindre chargé

1. Le champ à l'intérieur d'un cylindre uniformément chargé en volume a été établi en cours :

$$E(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r.$$

Cette loi est fonction linéaire de r , compatible avec le graphe.

D'après le graphe on a

$$E(r) = E_0 \frac{r}{a}$$

d'où en identifiant

$$\rho_0 = \frac{2\epsilon_0 E_0}{a}.$$

2. On détermine le champ à l'extérieur avec le théorème de Gauss comme à l'exercice 1 :

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

soit

$$\vec{E} = E_0 \frac{a}{r} \vec{e}_r \text{ pour } r \geq a.$$

3. Le potentiel est donné par $E(r) = -\frac{dV}{dr}$, soit

$$\frac{dV}{dr} = \begin{cases} -E_0 \frac{r}{a} & \text{pour } r < a \\ -E_0 \frac{a}{r} & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

d'où

$$V(r) = \begin{cases} -E_0 \frac{r^2}{2a} + C_1 & \text{pour } r < a \\ -E_0 a \ln(r) + C_2 & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

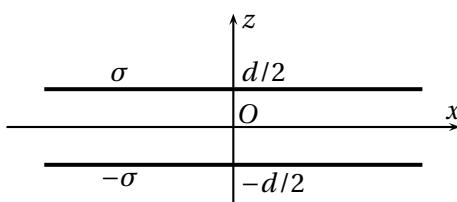
On ne peut pas prendre le potentiel nul à l'infini car on ne peut considérer $r \rightarrow \infty$ pour un cylindre infini.

En choisissant $V(a) = V_0$, on obtient

$$V(r) = \begin{cases} \frac{E_0}{2a} (a^2 - r^2) & \text{pour } r < a \\ -E_0 a \ln\left(\frac{r}{a}\right) & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

12 — Deux plans de charges opposées

Utilisons les coordonnées cartésiennes, l'axe Oz étant perpendiculaire aux deux plans de cotes $+d/2$ et $-d/2$.



Pour tout point M de l'espace, les plans $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M; \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie, donc le champ n'a pas de composante selon \vec{e}_y et \vec{e}_x .

La distribution est invariante par translation selon Ox et Oy , donc les composantes du champ ne dépendent pas de x et de y .

Finalement, le champ est de la forme $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$. Le plan Oxy est un plan d'antisymétrie de la distribution, donc $E(-z) = -E(z)$ (le champ se réduit à sa composante normale \vec{E}_\perp au plan d'antisymétrie).

La distribution peut s'écrire comme la superposition de deux distributions : le plan de cote $d/2$, de charge surfacique σ , qui crée le champ $\vec{E}_1(M)$, et le plan de cote $-d/2$, de charge surfacique $-d/2$, qui crée le champ $\vec{E}_2(M)$. D'après le théorème de superposition,

le champ créé par les deux plans est $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$.

On se ramène donc au calcul du champ créé par un plan infini, traité en cours :

$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > d/2 \\ -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < d/2 \end{cases}$$

et

$$\vec{E}_2(M) = \begin{cases} -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z > -d/2 \\ \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } z < -d/2 \end{cases}$$

On a donc

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z > d/2 \\ -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } -d/2 < z < d/2 \\ \vec{0} & \text{pour } z < -d/2 \end{cases}$$

► La distribution possède *a priori* toutes les propriétés pour que l'on puisse utiliser le théorème de Gauss. On est tenté de choisir comme surface fermée un cylindre compris entre les cotes z et $-z$, mais on aura toujours $Q_{\text{int}} = 0$, et le flux de \vec{E} est nul; le théorème de Gauss conduit alors à la relation $0 = 0 \dots$ qui est vraie mais guère utile!

13 — Modèle de l'atome

1. Densité volumique de charge : $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$.

La distribution est à symétrie sphérique; on a donc $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

Théorème de Gauss avec une sphère de rayon r :

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{e}{\epsilon_0} & \text{pour } r \geq a \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3} & \text{pour } r < a \end{cases}$$

d'où

$$E(r) = \begin{cases} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{pour } r \geq a \\ \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^3} r & \text{pour } r < a \end{cases}$$

Pour $r \geq a$, avec $V(\infty) = 0$, on a $V(r \geq a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Pour $r < a$, on a $V(r) = -\frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} + A$. La continuité du potentiel en $r = a$ s'écrit

$$V(a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 a} + A_2$$

d'où

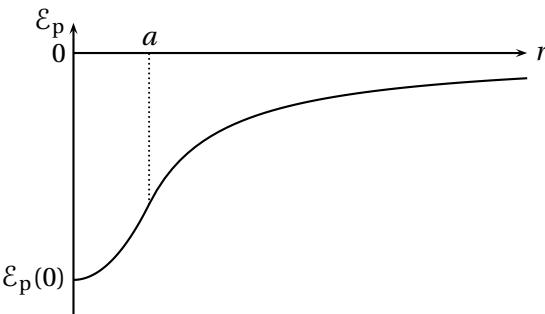
$$A_2 = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

On en déduit

$$V(r < a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right).$$

- Pour $r \geq a$, on retrouve le champ et le potentiel créés par une charge ponctuelle.
2. L'énergie potentielle d'un électron soumis au champ créé par le noyau est $\mathcal{E}_p = -eV(r)$, soit

$$\mathcal{E}_p = \begin{cases} -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{pour } r > a \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{r^2}{2a^2} - \frac{3}{2} \right) & \text{pour } r < a \end{cases}$$



- La courbe $V(r)$, et donc $\mathcal{E}_p(t) = -eV(r)$, a une tangente continue en $r = a$: le champ $E(r)$ est continu, et $\frac{dV}{dr} = -E(r)$.

L'énergie d'ionisation est l'énergie à apporter à l'électron pour l'apporter du centre (position d'équilibre) à l'infini avec une vitesse nulle.

Elle vaut donc $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_p(\infty) - \mathcal{E}_p(0)$, soit

$$\mathcal{E}_i = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

L'énergie d'ionisation en électron-volt (1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J) est donnée par

$$\mathcal{E}_i = \frac{3}{2} \frac{9 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19}}{100 \times 10^{-12}}$$

soit $\mathcal{E}_i = 21,6$ eV.

On ne retrouve pas la valeur réelle, mais l'ordre de grandeur est tout à fait comparable.

3. Position d'équilibre stable en $r = 0$.

Quand il est à l'intérieur de l'atome, l'atome est soumis à la force de rappel élastique $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{OM}$. Le PFD s'écrit

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{OM} = \vec{0}.$$

Oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 ma^3}}.$$

On calcule la fréquence propre associée :

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{ma^3}}} \\ &= \frac{1,6 \times 10^{-19}}{2\pi} \sqrt{\frac{9 \times 10^9}{9,1 \times 10^{-31} \times 10^{-31}}} = \frac{1,6}{2\pi} 10^{16} \end{aligned}$$

soit $f_0 = 2,5 \times 10^{15}$ Hz.

La longueur d'onde correspondante est $\lambda = c/f = 120$ nm : on est dans le domaine des **ultraviolets**.

14 — Potentiel de Yukawa

1. La relation locale $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ conduit à

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{qe^{-r/a}}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ar} \right] \vec{e}_r$$

soit

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a} \vec{e}_r.$$

2. Le champ étant radial, de la forme $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$, le flux à travers une sphère de rayon r est donné par

$$\Phi(r) = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r),$$

soit

$$\Phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \left[1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a}.$$

Le théorème de Gauss s'écrit

$$\Phi(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0},$$

d'où

$$Q(r) = q \left[1 + \frac{r}{a} \right] e^{-r/a}.$$

3. On a

$$\lim_{r \rightarrow 0} Q(r) = q.$$

Il existe une charge ponctuelle q située au point O .

4. On a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0.$$

La distribution est globalement neutre.

La charge q située en O est donc entourée d'un « nuage » à symétrie sphérique, de charge totale $-q$.

5. La relation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Dans le cas où $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$, on a

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 E(r)]}{dr} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{r/a} (1 + e^{-r/a}) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-r/a} \left[\frac{1}{a} + \left(1 + \frac{r}{a} \right) \left(-\frac{1}{a} \right) \right] \end{aligned}$$

soit

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2 r} e^{-r/a}.$$

On en déduit

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} e^{-r/a}.$$

On peut calculer cette densité volumique sans utiliser l'opérateur divergence. C'est moins dans l'esprit du programme actuel, mais je vous donne aussi cette méthode.

Le flux sortant de \vec{E} à travers la sphère de rayon r est

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}.$$

On applique le théorème de Gauss à la surface fermé délimitant la coquille de rayon r et d'épaisseur dr : ce volume est donc compris entre la sphère de rayon r et la sphère de rayon $r + dr$.

Le flux **sortant** de ce volume s'écrit

$$\iint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = -\Phi(r) + \Phi(r + dr) = \frac{d\Phi}{dr} dr$$

car $\Phi(r)$ « entre » dans la coquille tandis que $\Phi(r + dr)$ en sort.

La charge comprise dans ce volume est²

$$\delta Q_{\text{int}} = \rho(r) 4\pi r^2 dr.$$

Le théorème de Gauss s'écrit alors

$$\frac{d\Phi}{dr} dr = \frac{4\pi r^2}{\epsilon_0} \rho(r) dr$$

d'où

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \frac{d\Phi}{dr}.$$

On calcule

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{q}{\epsilon_0} e^{-r/a} \left[\frac{1}{a} + \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(-\frac{1}{a}\right) \right] = -\frac{q}{\epsilon_0 a^2} r e^{-r/a}.$$

On retrouve alors

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi \epsilon_0 a^2 r} e^{-r/a}.$$

6. Cette distribution peut représenter l'atome d'hydrogène dans son état fondamental :

- la charge q au centre est le proton ($q = +e$);
- Le « nuage » de densité $\rho(r)$ et de charge totale $-q = -e$ représente le « nuage électronique », c'est-à-dire l'orbitale 1s de l'électron.

En effet, la charge comprise entre r et $r + dr$ est

$$\delta Q(r) = \delta Q_{\text{int}} = 4\pi r^2 \rho(r) dr,$$

soit

$$\delta Q(r) = -\frac{q}{a^2} r e^{-r/a} dr.$$

2. On considère la densité $\rho(r)$ dans la coquille de volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$.

On peut définir une densité radiale de charge

$$P(r) = \frac{\delta Q(r)}{dr} = -\frac{q}{a^2} e^{-r/a}.$$

Cette densité est équivalente à la densité de probabilité de présence de l'électron dans une description quantique de l'atome d'hydrogène. Elle est maximum en r_0 tel que

$$P'(r_0) = 0 = -\frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) e^{-r_0/a}$$

soit $r_0 = a$. Cette grandeur représente le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène.

15 — Oscillations dans un tunnel

Le satellite, en orbite circulaire, est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R . Le principe fondamental de la dynamique projeté sur le vecteur \vec{e}_r des coordonnées sphériques de centre C s'écrit :

$$-m \frac{v^2}{R} = -\frac{GMm}{R^2}$$

d'où $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. La période $T_Q = 2\pi R/v$ vaut donc :

$$T_Q = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

On retrouve la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

Étude du mouvement du mobile P

Le mobile est soumis à :

- la réaction \vec{N} du tunnel, normal à l'axe Ox car les frottements sont négligés;
- la force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{G}(P)$, où $\vec{G}(P)$ est le champ de gravitation créé en P par l'astre.

En négligeant le trou créé par le tunnel, on peut considérer que l'astre est une distribution de masse à symétrie sphérique, avec une masse volumique ρ uniforme.

Le champ de gravitation s'écrit donc en coordonnées sphériques de centre C :

$$\vec{G}(P) = G(r) \vec{e}_r$$

Le théorème de Gauss permet de calculer le champ de gravitation à l'intérieur de l'astre. En choisissant comme surface de Gauss une sphère de centre C , de rayon $r = CP < R$, on a :

$$4\pi r^2 G(r) = -4\pi M_{\text{int}}$$

La masse de l'astre étant uniformément répartie, $M = \frac{4}{3} \rho R^3$ et $M_{\text{int}} = \frac{4}{3} \rho r^3$, on a $M_{\text{int}} = M \frac{r^3}{R^3}$, d'où :

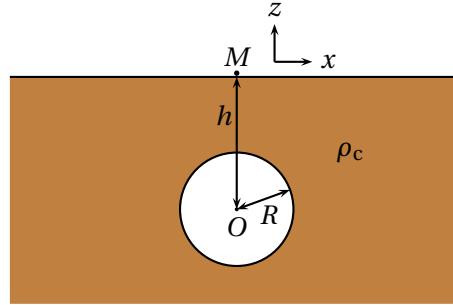
$$\vec{G}(P) = -\frac{GM}{R^3} r \vec{e}_r = -\frac{GM}{R^3} \vec{CP}$$

Le mobile est donc soumis à la force :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^3} \vec{CP}$$

La rotation de l'astre étant négligée, on peut considérer le référentiel lié à l'astre comme galiléen, et y appliquer le principe fondamental de la dynamique au mobile :

$$m \vec{a}(P) = \vec{N} + \vec{F}$$



En projection sur Ox , il vient :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^3} x$$

soit $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$.

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique. La solution générale est

$$x(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t.$$

Comme $x(0) = \alpha = -\sqrt{R^2 - a^2}$, et $\dot{x}(0) = \beta \omega_0 = 0$, on a :

$$x(t) = -\sqrt{R^2 - a^2} \cos \omega_0 t$$

On a $-\sqrt{R^2 - a^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - a^2}$: le mobile ne sort pas du tunnel; il effectue donc des oscillations harmoniques avec la période :

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

La période des oscillations est indépendante de la distance a du tunnel au centre de l'astre.

Le satellite effectue un mouvement circulaire avec la période T_Q ; le mobile oscille avec la même période T_P . Les deux objets, partant initialement du point A , s'y rencontreront avec la période $T = T_P = T_Q$, soit

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}.$$

► Si $a = 0$, les deux mobiles se rencontreront également au point B ; la périodicité de leurs rencontres sera alors de $T = T_P/2$, soit :

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}}.$$

16 — Gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des champs gravitationnels.

On donne $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI.

Dans un sol calcaire, de masse volumique ρ_c , une cavité a été créée par la lente dissolution de la roche et par l'écoulement souterrain qui évacue les matières dissoutes au fur et à mesure. On considère la cavité comme vide de matière, et sphérique de rayon R .

1. En utilisant le théorème de superposition, exprimer la variation du champ de gravité (appelée « anomalie gravimétrique ») à la verticale du centre de la cavité (au point M de la figure) du fait de l'existence de cette cavité.

2. On fait varier l'abscisse x du point M tout en restant au niveau du sol. Sans calcul supplémentaire, donner l'allure du graphe représentant l'anomalie gravimétrique verticale en fonction de x .

3. Comment les résultats sont-ils modifiés si la cavité est remplie d'eau de masse volumique ρ_e ?

4. L'unité utilisée pour quantifier l'anomalie gravimétrique est le gal, avec $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. On utilise un gravimètre portatif permettant d'atteindre une résolution effective d'environ $10 \mu\text{Gal}$.

Ce gravimètre est-il capable de détecter une cavité de 5 m de rayon, située à 10 m de profondeur ?

On donne $\rho_c = 2,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

17 — Grotte alors!

1. Théorème de Gauss pour la gravitation :

$$\iint_{\Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi GM_{\text{int}}.$$

2. Problème à symétrie sphérique : $\vec{g}(M) = g(r) \vec{u}_r$, et

$$\iint_{\Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{S}_M = 4\pi r^2 g(r).$$

Pour $r < R$, on a $M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3$ et

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi G \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3$$

d'où

$$g(r) = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} r.$$

Dans la planète, on a $\vec{g}(M) = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} r \vec{u}_r$ soit

$$\vec{g}(M) = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \vec{OM}.$$

3. Principe de superposition; la planète avec la grotte est décrite comme la superposition des deux distributions de masse suivantes :

- une boule de centre O et de rayon R , de masse volumique uniforme ρ_0 ;
- une boule de centre C et de rayon a , de masse volumique uniforme $-\rho_0$.

La planète pleine crée le champ

$$\vec{g}_1(M) = -\frac{4\pi G\rho_0}{3} \vec{OM}.$$

Une sphère de centre C portant la masse volumique $-\rho_0$ crée le champ

$$\vec{g}_2(M) = \frac{4\pi G\rho_0}{3} \vec{CM}.$$

Le champ total dans la cavité est

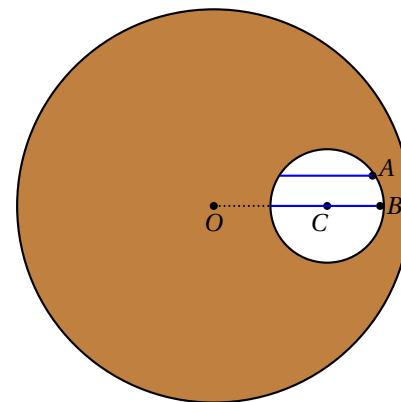
$$\vec{g}(M) = \vec{g}_1(M) + \vec{g}_2(M),$$

soit

$$\vec{g}(M) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 G \vec{CO}.$$

Le champ gravitationnel est uniforme dans la grotte, colinéaire à \vec{CO} .

Les deux masses ont des trajectoires rectilignes, représentées en bleu sur le schéma. L'accélération étant la même, constante, pour les deux pierres, c'est celle lâchée du point A (trajectoire la plus courte) qui touchera l'autre extrémité de la grotte en premier.



Question bonus : calculer le temps mis pour la trajectoire la plus longue. On pose $OC = D$

$$\text{Masse } B. \text{ PFD sur l'axe } OC : m \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho_0 G D m$$

On a $r(t) = -\frac{2}{3}\pi\rho_0 G D t^2 + D + a$. On veut $r(t_1) = D - a$, d'où

$$t_1 = \sqrt{\frac{3a}{\pi\rho_0 GD}}.$$

Lois locales

18 — Jonction P-N

1. On rencontre des jonctions PN dans les diodes et les transistors.

2. L'ensemble étant neutre, la charge totale d'une section S (perpendiculaire à Ox) est donc

$$\rho_2 b S + \rho_1 a S = 0$$

d'où

$$\rho_1 a + \rho_2 b = 0.$$

3. Les plans $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ étant des plans de symétrie de la distribution de charge, le champ \vec{E}

est porté par vex . La distribution étant invariante par translation selon Oy et Oz , on a donc

$$\vec{E}(M) = E(x) \vec{e}_x.$$

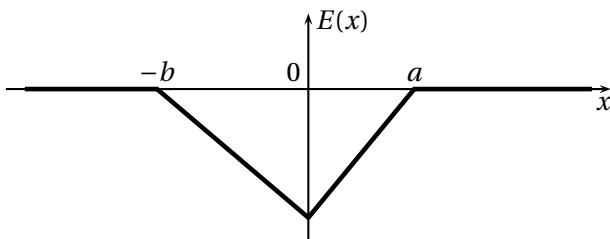
L'équation de Maxwell-Gauss dans le milieu s'écrit alors, comme $\text{div } \vec{E} = \frac{dE}{dx}$:

$$\frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho_2}{\epsilon_0} & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ \frac{\rho_1}{\epsilon_0} & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

On en déduit par intégration, sachant que $E(-b) = 0$ et $E(a) = 0$ (le champ est nul à l'extérieur et il est continu)

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\rho_2}{\epsilon_0}(x+b) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ \frac{\rho_1}{\epsilon_0}(x-a) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

On a $E(0) = \frac{\rho_2 b}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_1 a}{\epsilon_0}$.



4. De $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ on déduit $\frac{dV}{dx} = -E(x)$, soit

$$\frac{dV}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq -b \\ -\frac{\rho_2}{\epsilon_0}(x+b) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ -\frac{\rho_1}{\epsilon_0}(x-a) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{pour } x \geq a \end{cases}$$

On intègre sachant que $V(0) = 0$, d'où

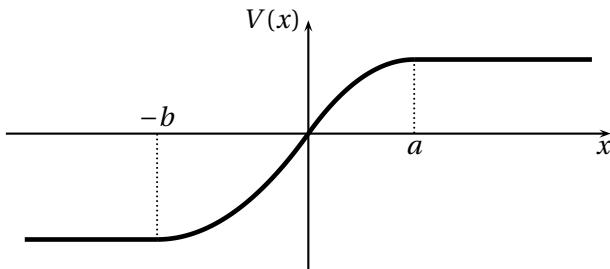
$$V(x) = \begin{cases} C_1 & \text{pour } x \leq -b \\ -\frac{\rho_2}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{2} + bx \right) & \text{pour } -b \leq x \leq 0 \\ -\frac{\rho_1}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ C_2 & \text{pour } x \geq a \end{cases}$$

Par continuité du potentiel en $x = -b$ on obtient

$$C_1 = \frac{\rho_2 b^2}{2\epsilon_0} < 0.$$

Par continuité du potentiel en $x = a$ on obtient

$$C_2 = \frac{\rho_1 a^2}{2\epsilon_0} > 0.$$



19 — Distribution de charges

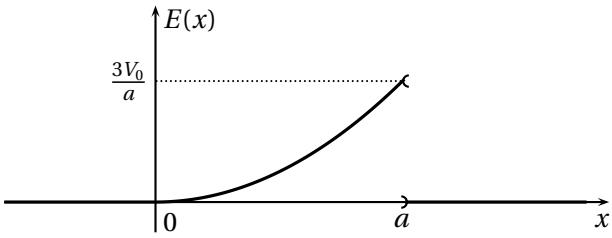
1. Le champ électrostatique est donné par

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } x > a \\ \frac{3V_0}{a^3} x^2 \vec{e}_x & \text{pour } 0 < x < a \\ \vec{0} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Représentons sa composante $E(x)$:



2. La densité volumique de charge est donnée par l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

soit

$$\rho(x) = -\epsilon_0 \frac{d^2 V}{dx^2}.$$

On calcule

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x > a \\ \frac{6\epsilon_0 V_0}{a^3} x & \text{pour } 0 < x < a \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Considérons un cylindre d'axe Oz , de section S , englobant la zone $[0, a]$ (ses extrémités ont pour cotes $x_1 < 0$ et $x_2 > a$). Le champ \vec{E} étant nul au niveau des extrémités de ce cylindre, le théorème de Gauss s'écrit

$$\iint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

On a donc $Q_{\text{int}} = 0$.

La charge totale portée due à la densité volumique de charge $\rho(x)$ dans ce cylindre vaut

$$Q_{\text{vol}} = \int_0^a \rho(x) S dx = \frac{6\epsilon_0 V_0}{a^3} \int_0^a S x dx = \frac{3\epsilon_0 V_0}{a} S.$$

La charge totale contenue dans le cylindre étant nulle, la distribution de charge ne peut être uniquement décrite par une répartition volumique de charges.

Il existe donc une distribution surfacique, de densité surfacique σ , située en $x = a$, où on observe une discontinuité du champ électrostatique. La charge surfacique comprise dans le cylindre est $Q_{\text{surf}} = \sigma S$.

Comme $Q_{\text{int}} = Q_{\text{vol}} + Q_{\text{surf}} = 0$, on a $\sigma S = -\frac{3\epsilon_0 V_0}{a} S$, d'où

$$\sigma = -\frac{3\epsilon_0 V_0}{a}.$$

3. Comme on l'a vu, la distribution est **globalement neutre**.

20 — Électrolyte

On considère le demi-espace $z \geq 0$, constitué d'un électrolyte de cations et d'anions de charges respectives $+e$ et $-e$. Le demi-espace $z < 0$ est constitué d'un métal.

Le potentiel $V(z)$ ne dépend que de z et vaut $V_0 > 0$ en $z = 0$.

On considère l'ensemble du système à l'équilibre à une température T .

Les densités volumiques de cations et d'anions sont données par

$$N_+(z) = n_0 \exp\left(-\frac{V(z)e}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad N_-(z) = n_0 \exp\left(\frac{V(z)e}{k_B T}\right).$$

1. Donner une interprétation physique des facteurs de Boltzmann.

2. Exprimer la densité volumique de charge ρ et trouver une équation différentielle sur $V(z)$.

3. Dans le cas où $eV(z) \ll k_B T$, déterminer $V(z)$ avec $V(\infty) = 0$, et le champ \vec{E} dans l'électrolyte.

21 — Écrantage de Debye

1. La densité volumique de charges dans le milieu est

$$\rho(r) = n^+(r)q - n^-(r)q = n_0 q \left[e^{-\frac{qV}{k_B T}} - e^{\frac{qV}{k_B T}} \right]$$

soit

$$\rho(r) = -2n_0 q \sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right).$$

L'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Le potentiel $V(r)$ vérifie donc l'équation différentielle

$$\Delta V = \frac{2n_0 q}{\epsilon_0} \sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right).$$

2. Pour $qV \ll k_B T$, on a

$$\sinh\left(\frac{qV}{k_B T}\right) \approx \frac{qV}{k_B T},$$

d'où en utilisant l'expression du laplacien fournie

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rV(r))}{dr^2} = \frac{2n_0 q^2 V(r)}{\epsilon_0 k_B T},$$

soit

$$\frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = \frac{2n_0 q^2}{\epsilon_0 k_B T} rV(r).$$

On peut écrire

$$\frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = \frac{1}{\ell_D^2} rV(r) \quad \text{avec} \quad \ell_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 q^2}}.$$

La solution générale est de la forme

$$rV(r) = A_1 e^{\frac{r}{\ell_D}} + A_2 e^{-\frac{r}{\ell_D}},$$

soit

$$V(r) = \frac{A_1}{r} e^{\frac{r}{\ell_D}} + \frac{A_2}{r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Le potentiel $V(r)$ ne pouvant diverger pour $r \rightarrow \infty$, on a nécessairement $A_1 = 0$, et

$$V(r) = \frac{A_2}{r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Considérer $r \rightarrow 0$ revient à se rapprocher de la charge q en 0; le potentiel créé par cette charge prédomine alors sur le potentiel créés par les autres charges; comme $e^{-\frac{r}{\ell_D}} \approx 1$, on a alors

$$V(r) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \approx \frac{A_2}{r}.$$

On en déduit $A_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ et le potentiel s'écrit finalement

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

3. Le potentiel coulombien créé par la charge $+q$ seule est

$$V_{\text{Coul}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Le potentiel au voisinage de cette charge dans le plasma s'écrit

$$V(r) = V_{\text{Coul}}(r) e^{-\frac{r}{\ell_D}}.$$

Cette expression fait apparaître le terme d'écrantage $e^{-\frac{r}{\ell_D}} < 1$, qui devient très faible dès que $r \gg \ell_D$. Les charges négatives du plasmas sont attirées autour de la charge $+q$, et font « écran », diminuant le potentiel créé.

► Cela peut surprendre d'obtenir un potentiel qui fait apparaître un rôle centrale à la charge $+q$ choisie au hasard dans le plasma. En fait, c'est un phénomène statistique, en moyenne dans le temps; le plasma présente une certaine dynamique, due à l'agitation thermique, et les charges ne sont pas figées dans l'espace.

► L'agitation thermique s'oppose au regroupement des charges $-q$ autour de la charge $+q$, donc à l'écrantage. En effet, le phénomène est moins important (ℓ_D est plus grand) quand T augmente.

22 — Diode à vide

Les deux plaques A et B d'une diode à vide sont deux plans conducteurs parallèles (surface $s = 5 \text{ cm}^2$, distance $\ell = 5 \text{ mm}$). La cathode A est chauffée et peut émettre des électrons dans le vide. Une différence de potentiel $U = 100 \text{ V}$ est maintenue entre A et B (on prendra comme potentiel des électrodes $V_A = 0 \text{ V}$ et $V_B = U > 0$).

Les électrons sortis de A et accélérés par le champ électrique sont attirés vers l'anode B , d'où un courant $I > 0$ de B vers A . On pourra négliger ici l'énergie cinétique initiale d'un électron émis.

On suppose que le courant électronique n'est pas limité par le processus d'émission lui-même, mais par l'effet répulsif des électrons qui circulent dans le vide et qui constitue une charge d'espace négative de densité volumique ρ . On admettra que l'on est en régime stationnaire et que la limite supérieure du courant est atteinte quand le champ résultant \vec{E} est nul à la surface de A .

1. Le problème est à une dimension : on note x la distance à A .

En régime permanent, relier $v(x)$ à $V(x)$, $V(x)$ à $\rho(x)$, et exprimer l'intensité I traversant la diode.

2. Montrer que $V(x)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{k}{\sqrt{V(x)}},$$

où k est une constante qui dépend de I (on donnera son expression).

Explicitier $V(x)$ en tenant compte des conditions aux limites sur les plaques.

Indication : on pourra multiplier les deux membres de l'équation précédente par $\frac{dV}{dx}$.

3. En déduire la valeur de I . Donner l'allure de $\rho(x)$ et $v(x)$.

23 — Membrane cellulaire

On considère une cellule biologique entourée de sa membrane. Localement elle peut être modélisée par un plan placé en $x = 0$. Le potentiel créé est alors

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner l'expression du champ électrique \vec{E} .

2. Donner l'expression de la densité volumique de charge $\rho(x)$.

La densité surfacique de charge sur la membrane σ vérifie

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_x(0^+) - E_x(0^-).$$

3. Donner l'expression de σ et tracer $\rho(x)$.

4. Déterminer la charge dans un cylindre d'axe x et de rayon r .

24 — Champ disruptif de l'air

1. La différence de potentiel δV entre deux équipo-
tentielles successives et la même sur le graphique.

Comme $E \approx \frac{\delta V}{d\ell}$ où $d\ell$ est la distance entre deux équipo-
tentielles, le champ est maximum là où les équipo-
tentielles sont le plus rapprochées, c'est-à-dire au voi-
sinage des électrodes.

On voit de plus que la pente $\frac{dV}{dz}$ est maximum en $x = \pm 1$ sur le graphe $V(z)$.

2. On estime la pente de $V(z)$ en $z = 0$, soit

$$\frac{dV}{dz} \approx \frac{0,25}{0,4 \times 10^{-3} - (-0,4 \times 10^{-3})} = 3,1 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On a donc en intensité $E(0) = 3,1 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, pour une différence de potentiel entre les électrodes $\Delta V = 2 \text{ V}$.

La relation entre E et V étant linéaire, pour obtenir E_{dis} , il faut appliquer ΔV_{dis} telle que

$$\Delta V_{\text{dis}} = \Delta V \frac{E_{\text{dis}}}{E(0)}$$

soit $\Delta V_{\text{dis}} = 2,3 \times 10^4 \text{ V}$.

Le champ disruptif de l'air est $E_{\text{dis}} = 3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Quelle tension doit-on appliquer aux bornes des électrodes pour atteindre ce champ au centre O du dispositif?

25 — Colloïde

Un colloïde est une particule dont la taille est très grande à l'échelle atomique; il est assimilable à une sphère chargée uniformément en surface, de rayon r_0 , de charge $+pe$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

On plonge un tel colloïde dans un électrolyte où règnent des charges $\pm e$; on suppose que lorsqu'on s'en éloigne suffisamment, le champ électrostatique est dû uniquement aux ions de l'électrolyte et l'on admet que l'on pourra remplacer dans toutes les équations ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, avec $\epsilon_r = 80$.

On donne les distributions volumiques des cations et des anions dans l'électrolyte :

$$n^+(r) = n_0 \exp\left(-\frac{E_p^+(r)}{k_B T}\right) \text{ et } n^-(r) = n_0 \exp\left(-\frac{E_p^-(r)}{k_B T}\right),$$

où E_p^\pm est l'énergie potentielle électrostatique de la charge $\pm e$ dans le potentiel $V(r)$.

1. Qu'évoquent les formes des densités volumiques d'ions?

2. Donner l'expression du champ électrostatique et du potentiel électrostatique en $r = r_0^+$ (quand $r \rightarrow r_0$, avec $r > r_0$).
3. Exprimer la densité volumique de charges $\rho(r)$ en fonction de $V(r)$. On admettra que $k_B T \gg E_p$.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$, et la résoudre.

On introduira une longueur caractéristique D que l'on exprimera en fonction de e , n_0 , ϵ et $k_B T$.

5. Tracer l'allure de $V(r)$ en commentant le choix des constantes d'intégration. Pourquoi parle-t-on d'effet d'écran ?

6. Pour de l'eau pure à $\text{pH} = 7$, calculer D .

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta G = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rG)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}.$$

26 — Matière noire

1. Théorème de Gauss pour la gravitation :

$$\iint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi GM_{\text{int}}.$$

Pour $r < R$, on a $M_{\text{int}} = M_g \frac{r^3}{R^3}$, donc

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi GM_g \frac{r^3}{R^3}$$

d'où

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{GM_g}{R^3} r.$$

Pour $r \geq R$, on a $M_{\text{int}} = M_g$, donc $4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi GM_g$, d'où

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{GM_g}{r^2}.$$

2. On écrit le PFD appliquée à l'étoile pour un mouvement circulaire uniforme :

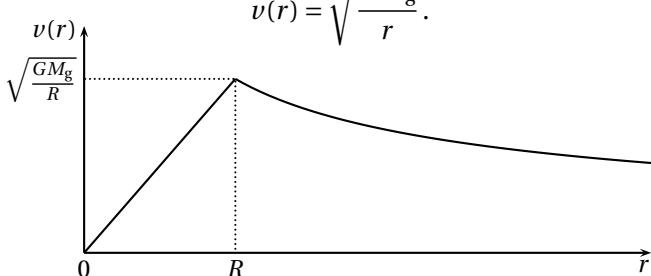
$$-m \frac{v^2(r)}{r} \vec{e}_r = -m \mathcal{G}(r) \vec{e}_r.$$

Pour $r < R$, on obtient $\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM_g}{R^3} r$, d'où

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_g}{R^3}} r.$$

Pour $r \geq R$, on obtient $\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM_g}{r^2}$, d'où

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_g}{r}}.$$



Le profil de vitesse est cohérent avec les mesures pour $r < R$, c'est-à-dire dans le noyau, mais n'est pas compatible avec les données mesurées pour $r > R$: on obtient un profil $v(r)$ décroissant tandis que le profil réel est quasi constant. La répartition de masse proposée est donc à revoir.

3. On part de l'équation de Maxwell-Gauss pour la gravitation par analogie avec $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, soit

$$\text{div } \vec{G} = -4\pi G \rho_d(r).$$

Compte tenu de la symétrie sphérique, on a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathcal{G}(r))}{dr} = -4\pi G \rho_d(r).$$

On détermine la forme que doit prendre le champ gravitationnel dans la zone de matière noire pour avoir une vitesse uniforme à partir du PFD :

$$-\frac{mv_0^2}{r} = m \mathcal{G}(r)$$

soit $\mathcal{G}(r) = -\frac{v_0^2}{r}$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{G} &= \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathcal{G}(r))}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d(r v_0^2)}{dr} = -\frac{v_0^2}{r} \\ &= -4\pi G \rho_d(r), \end{aligned}$$

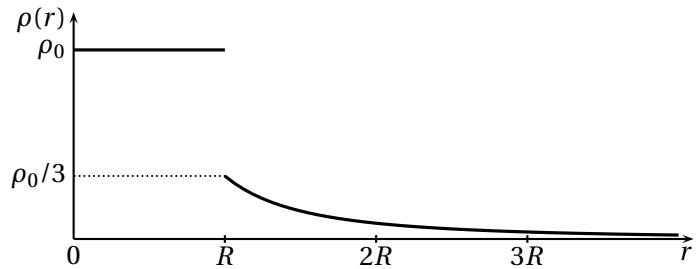
d'où

$$\rho_d(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}.$$

Avec $v_0^2 = \frac{GM_g}{R}$ on obtient $\rho_d(r) = \frac{M_g}{4\pi R r^2}$.

Comme $M_g = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3$, on a finalement

$$\rho_d = \rho_0 \frac{R^2}{3r^2}.$$



4. On a

$$\begin{aligned} M_{\text{noire}} &= \int_R^{nR} 4\pi r^2 \rho_d(r) dr = 4\pi \int_R^{nR} \frac{\rho_0 R^2}{3} dr \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3 (n-1). \end{aligned}$$

Avec $M_g = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3$, on en déduit $\gamma = \frac{n-1}{n}$

Pour $n = 10$, on obtient $\gamma = 0,9$: **la matière noire représente 90 % de la masse de la galaxie.**