

TD phénomènes de transport

Fluides en écoulement — solution

Description d'un fluide en écoulement

2 — Débit d'une rivière

Le débit moyen annuel de la Marne au niveau de Meaux est d'environ $100 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, avec une vitesse typique de $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Le débit massique de l'eau est relié à son débit volumique selon

$$D_m = \mu D_v \quad \text{avec} \quad \mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

On calcule $D_m = 10^5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Le débit volumique est donné par

$$D_v = S v$$

d'où la section $S = \frac{D_v}{v} = \frac{100}{0,5}$, soit $S = 200 \text{ m}^2$.

3. La section est donnée par $S = LH$. Avec une largeur $L = 80 \text{ m}$, on obtient comme profondeur $H = 2,5 \text{ m}$.

3 — Débit volumique

1. Le champ des vitesses ne dépend que de z :

$$\vec{v}(M) = v(z) \vec{e}_x = v_0 \frac{z}{a} \vec{e}_x \quad \text{pour } 0 \leq z \leq a.$$

1.a) La vitesse étant uniforme sur une bande de largeur b et de hauteur dz , de section $dS = b dz$, le débit volumique peut s'écrire

$$D_v = \iint v(z) dS = \int_0^a v_0 \frac{z}{a} b dz = v_0 \frac{b}{a} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^a$$

soit $D_v = v_0 \frac{ab}{2}$.

En considérant une vitesse uniforme, on peut écrire pour la section $S = ab$

$$D_v = v_{\text{moy}} ab.$$

En identifiant, on obtient $V_{\text{moy}} = \frac{v_0}{2}$.

1.b) On a

$$\text{div } \vec{v} = \frac{dv}{dx} = 0.$$

L'écoulement est incompressible.

2. Le champ des vitesses ne dépend que de r :

$$\vec{v}(M) = v(r) \vec{e}_z = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \vec{e}_z \quad \text{pour } 0 \leq r \leq a.$$

2.a) La vitesse est uniforme sur un anneau de rayon r , d'épaisseur dr donc d'aire $dS = 2\pi r dr$. Le débit volumique peut s'écrire

$$\begin{aligned} D_v &= \iint v(r) dS = \int_0^a v(r) 2\pi r dr \\ &= 2\pi v_0 \int_0^a \left(r - \frac{r^3}{a^2} \right) dr = 2\pi v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2} \right]_0^a \\ &= 2\pi v_0 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

soit $D_v = \pi v_0 \frac{a^2}{2}$.

En considérant une vitesse uniforme, on peut écrire pour la section $S = \pi a^2$

$$D_v = v_{\text{moy}} \pi a^2.$$

En identifiant, on obtient $V_{\text{moy}} = \frac{v_0}{2}$.

2.b) On a $\text{div } \vec{v} = 0$: l'écoulement est incompressible.

4 — Débit massique

1. Le débit massique s'écrit

$$D_m = \mu v \pi \frac{D^2}{4}.$$

Avec

$$D_m = \frac{510 \times 10^{-3}}{30 \times 1800} = 9,44 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

on calcule

$$v = \frac{4D_m}{\mu \pi D^2} = \frac{4 \times 9,44 \times 10^{-6}}{7,5 \times \pi \times (2 \times 10^{-2})^2}$$

soit $v = 4,0 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4,0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique à travers toute section du tuyau, soit

$$\pi \frac{D^2}{4} v = \pi \frac{D'^2}{4} v'$$

d'où

$$v' = \left(\frac{D}{D'} \right)^2 v.$$

On calcule $v' = 6,4 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,64 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

La vitesse diminue bien quand la section augmente.

La vitesse de l'écoulement est très inférieure à la vitesse du son dans le gaz (typiquement en centaines de mètres par seconde); l'écoulement peut donc être considéré comme incompressible.

5 — Écoulement radial

Le débit massique à travers toute sphère de rayon r est conservé en régime stationnaire; il s'écrit

$$D_m = \mu(r) V_0 4\pi r^2$$

d'où

$$\mu(r) = \frac{D_m}{4\pi V_0 r^2}.$$

7 — Écoulement dans un tube

De l'eau circule dans un tube dans lequel la section se réduit brusquement.

1. La vitesse est maximale là où les lignes de courant sont le plus resserrées, soit en au point J.

La vitesse est minimale là où les lignes de courant sont le plus écartées, soit en au point K.

L'eau étant un fluide incompressible, il y a conservation du débit volumique à travers toute section d'un tube de courant, d'où le raisonnement suivi.

2. Les lignes de courants sont également écartées dans le plan d'entrée. On a donc $v_B = v_A$, soit $v_B = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En première approximation, on peut considérer la vitesse uniforme dans le plan de sortie, d'où $v_C = v_D$. La section étant diminuée d'un facteur $2/3$, la conservation du débit volumique entre l'entrée et la sortie s'écrit

$$v_C \frac{2}{3} S = v_A S$$

d'où $v_C = v_D = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

8 — Canalisation à section lentement variable

Considérons la tranche entre x et $x + dx$. La masse de fluide contenue est

$$\delta m = \mu(x) S(x) dx.$$

Sa variation entre t et $t + dt$, vu que l'écoulement est stationnaire, est nulle : $d(\delta m) = 0$.

Le bilan s'écrit

$$d(\delta m) = \delta^2 m_{\text{reçu}},$$

avec

$$\begin{aligned} \delta^2 m_{\text{reçu}} &= \mu(x) v(x) S(x) dt \\ &\quad - \mu(x+dx) v(x+dx) S(x+dx) dt \\ &= - \frac{d[\mu(x) v(x) S(x)]}{dx} dx dt. \end{aligned}$$

On a donc

$$0 = \frac{d[\mu(x) v(x) S(x)]}{dx} = S(x) \frac{d[\mu(x) v(x)]}{dx} + \mu(x) v(x) \frac{dS(x)}{dx}$$

d'où

$$\frac{d[\mu(x) v(x)]}{dx} + \frac{\mu(x) v(x)}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} = 0.$$

9 — Convergent

1. L'eau étant incompressible, le débit volumique est conservé à travers toute section de la conduite, soit

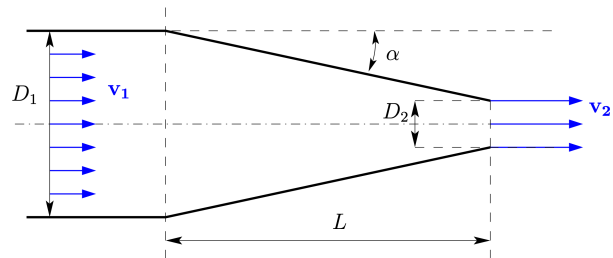
$$v_1 \pi \frac{D_1^2}{4} = v_2 \pi \frac{D_2^2}{4}$$

d'où

$$v_2 = v_1 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2.$$

On aura $v_2 = K v_1$ si

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{K}.$$



D'après la figure, on a

$$\tan \alpha = \frac{D_1 - D_2}{2L}$$

d'où

$$D_2 = D_1 - 2L \tan \alpha.$$

On a donc

$$\frac{D_1}{D_1 - 2L \tan \alpha} = \sqrt{K}$$

d'où

$$L = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{K}} \right) \frac{D_1}{2 \tan \alpha}.$$

2. On calcule

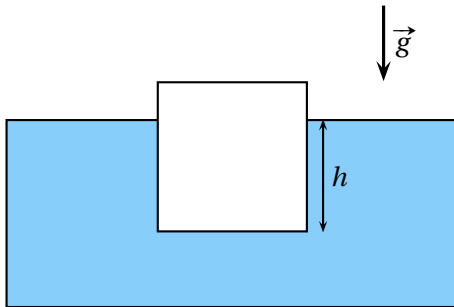
$$L = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1,5}} \right) \frac{200 \times 10^{-3}}{2 \times \tan(10^\circ)}$$

soit $L = 10 \text{ cm}$.

Statique des fluides

11 — Cube flottant

Notons h la hauteur de cube immergée :



1. Le cube est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = -\rho a^2 h \vec{g}$.

L'équilibre du cube s'écrit

$$\vec{0} = m\vec{g} - \rho a^2 h \vec{g}$$

d'où

$$h = \frac{m}{\rho a^2}.$$

- En notant ρ_c la masse volumique du cube et d sa densité, on peut écrire

$$m = \rho_c a^3 = d \rho a^3$$

d'où $h = da$. On est bien sûr dans le cas où $d < 1$ car le cube flotte !

2. Considérons l'axe descendant Oz , et prenons comme origine la cote de la base du cube lorsqu'il flotte à l'équilibre.

Lorsque le cube s'enfonce de z (algébriquement), le volume immergé est $V_i = a^2(h+z)$, et la poussée d'Archimède vaut

$$\vec{\Pi}_A = -\rho a^2(h+z)\vec{g}.$$

Le poids est inchangé, et le principe de la dynamique appliqué au cube s'écrit

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \rho a^2(h+z)\vec{g},$$

soit en soustrayant l'équation de l'équilibre établie à la question précédente

$$m\vec{a} = -\rho a^2 z \vec{g}.$$

En projetant selon \vec{e}_z , on obtient

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\rho a^2 g z$$

soit

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\rho g a^2}{m} z = 0.$$

Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{\rho g a^2}{m}}$.

Le cube effectue donc des oscillations sinusoïdales, de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho a^2 g}}.$$

- Avec les conditions initiales $z(0) = b$ et $\dot{z}(0) = 0$, on obtient

$$z(t) = b \cos(\omega t).$$

À partir de sa position de repos, on l'enfonce de b (tout en maintenant une partie du cube émergée), et on lâche. Montrer que le cube effectue des oscillations verticales dont on déterminera la période.

12 — Flottation à une interface

1. Le poids du bloc de densité d_a est

$$P_{\text{bloc}} = d_a \mu (a+b) S g.$$

où S est la section horizontale du bloc et μ la masse volumique de l'eau. Le poids du fluide déplacé, donnant la poussée d'Archimède, est

$$\Pi_A = S a \mu g + d_m S b \mu g.$$

À l'équilibre, la poussée d'Archimède compense le poids du cube, soit

$$d_a \mu (a+b) S g = S a \mu g + d_m S b \mu g$$

d'où

$$d_a(a+b) = a + d_m b.$$

On en déduit

$$\frac{b}{a} = \frac{d_a - 1}{d_m - d_a}.$$

2. On calcule $b/a = 1,33$.

13 — Juste un doigt!

Notons $\vec{F}_{d \rightarrow e}$ la force exercée par le doigt sur l'eau.

Bilan des forces s'exerçant sur le système {eau+récipient} :

- force $\vec{F}_{d \rightarrow e}$ exercée par le doigt ;
- poids $m\vec{g}$;
- force $\vec{F}_{b \rightarrow r}$ exercée par la balance sur le récipient.

L'équilibre s'écrit

$$\vec{F}_{d \rightarrow e} + m\vec{g} + \vec{F}_{b \rightarrow r} = \vec{0}.$$

L'eau exerce sur le doigt immergé une force de pression qui est la poussée d'Archimède :

$$\vec{F}_{e \rightarrow d} = \vec{\Pi}_A$$

soit en notant V le volume immergé du doigt et μ la masse volumique de l'eau

$$\vec{F}_{e \rightarrow d} = -\mu V \vec{g}.$$

Par le principe des actions réciproques, le doigt exerce sur l'eau la force

$$\vec{F}_{d \rightarrow e} = -\vec{F}_{e \rightarrow d} = \mu V \vec{g},$$

d'où

$$\mu V \vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_{b \rightarrow r} = \vec{0}.$$

La balance indique l'intensité (convertie en masse en divisant par g) de la force exercée par le récipient sur la balance, soit d'après le principe des actions réciproques

$$\vec{F}_{r \rightarrow b} = -\vec{F}_{b \rightarrow r} = \mu V \vec{g} + m\vec{g}.$$

La balance indique donc une masse apparente

$$m_{\text{app}} = \mu V + m.$$

Il s'agit donc d'évaluer le volume de la première phalange de l'index. On peut la considérer comme cylindrique, de diamètre $D = 1,5$ cm et de hauteur $H = 3$ cm (mesuré sur mon doigt!). Son volume est donc

$$V = H\pi \frac{D^2}{4} 5,3 \text{ cm}^3 \approx 5 \text{ cm}^3 = 5 \text{ mL}.$$

La masse du fluide déplacé est donc $m' = \mu V = 5$ g. La balance doit indiquer $m_{\text{app}} = 155$ g.

La preuve par l'image :



14 — Quand la routourne tourne!

1. La pression varie avec l'altitude. Cette dernière variant périodiquement quand la tourne tourne (régulièrement), on mesure la variation de pression observée sur le graphe.

La pression est maximale quand la nacelle est au plus bas, et diminue avec l'altitude. Partant du bas, on y retourne 4 fois : la nacelle fait **4 tours** (dont 3 de façon quasi-régulière).

2. Méthode « exacte » : modèle de l'atmosphère isotherme, à partir de $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$. On a $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{MP}{RT} g$. On considère la température T constante, d'où

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT}{Mg}.$$

On prend l'origine $z = 0$ à la position basse de la nacelle.

La pression diminue de $\Delta P > 0$ à l'altitude D , soit

$$P(0) - \Delta P = P(0) \exp\left(-\frac{D}{H}\right).$$

On en déduit $D = -H \ln\left(1 - \frac{\Delta P}{P(0)}\right)$. On donne $\Delta P = 467$ Pa, la pression au point le plus bas peut être estimée à $P(0) = 1013$ hPa = $1,013 \times 10^5$ Pa. On obtient le diamètre de la grande roue : **$D = 38$ m**.

On peut avantageusement faire des hypothèses simplificatrices en calculant la valeur de H .

- On calcule $H = 8,3 \times 10^3$ m. On a donc $D \ll H$, ce qui permet d'écrire $P(z) = P(0) \left(1 - \frac{z}{H}\right)$. On en déduit $D = \frac{\Delta P}{P(0)} H = 38$ m.
- On peut aussi supposer que l'air est incompressible sur une très faible variation d'altitude, avec une masse volumique $\rho = \frac{MP(0)}{RT}$. On a donc $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT} P(0) = -\frac{P(0)}{H}$ et on retrouve le résultat précédent.

3. On peut estimer la période de rotation sur la graphe : $T = 85$ s. On en déduit

$$v = \frac{D}{2} \omega = \frac{D}{2} \frac{2\pi}{T} = \frac{D\pi}{T} = \frac{38\pi}{85}$$

$$\text{soit } v = 1,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'accélération centripète vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{2v^2}{D},$$

soit $a = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \ll g$: la grande roue n'est pas un manège à sensations!

15 — Vidange automatique

1. Statique des fluides pour un liquide incompressible :

$$P(y) = P_0 + \mu g(h - y).$$

2. Isobares horizontales : la pression est uniforme sur le fond et vaut $P_0 + \mu gh$.

Résultante :

$$\vec{F}_L = -[P_0 + \mu gh]bL\vec{e}_y.$$

En tenant compte de l'action de l'atmosphère, la résultante des actions subies par le panneau est $\vec{F}_1 = -\mu ghbL\vec{e}_y$. Le moment peut donc se calculer en considérant que la résultante s'applique au milieu M_1 du panneau ($\vec{OM}_1 = -L/2\vec{e}_x$), soit

$$\vec{M}_1 = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 = -\frac{L}{2}\vec{e}_x \wedge (-\mu ghbL)\vec{e}_y$$

d'où

$$\vec{M}_1 = \frac{\mu ghbL^2}{2}\vec{e}_z.$$

3. La pression n'est pas uniforme sur le panneau vertical. On peut la considérer comme uniforme sur une bande de largeur b , comprise entre y et $y + dy$. De la part de l'eau et de l'atmosphère elle est soumise à

$$d\vec{F}_2 = [P(y) - P_0]b dy \vec{e}_x = \mu g(h - y)b dy \vec{e}_x.$$

La résultante est

$$\vec{F}_2 = \mu gb \int_0^h (h - y) dy \vec{e}_x = \left[\mu gbh^2 - \rho gb \frac{h^2}{2} \right] \vec{e}_x,$$

soit
$$\vec{F}_2 = \mu gb \frac{h^2}{2} \vec{e}_x.$$

On ne peut pas calculer le moment directement car la force n'est pas uniforme.

Moment résultant sur la bande $b dy$:

$$\begin{aligned} \vec{M}_2 &= \vec{OM} \wedge d\vec{F}_2 = y\vec{e}_y \wedge \mu g(h - y)b dy \vec{e}_x \\ &= -\mu gb(h - y)y dy \vec{e}_z. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\vec{M}_2 = -\mu gb \int_0^h (hy - y^2) dy \vec{e}_z = -\mu gb \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \vec{e}_z,$$

soit

$$\vec{M}_2 = -\mu gb \frac{h^3}{6} \vec{e}_z.$$

4. Le moment résultant s'appliquant sur les panneaux est

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \mu gb \left(\frac{hL^2}{2} - \frac{h^3}{6} \right) \vec{e}_z.$$

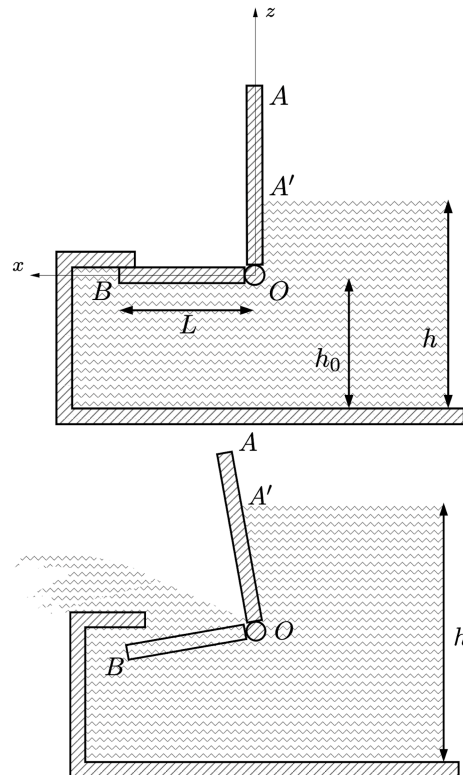
Le moment par rapport à Oz est

$$\mathcal{M}_{Oz} = \vec{M} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu gbh}{2} \left(L^2 - \frac{h^3}{3} \right).$$

Les panneaux pivotent si $\mathcal{M}_{Oz} < 0$ soit si

$$h > \sqrt{3}L \approx 1,73L.$$

16 — Trop plein



1. Prenons l'axe Oz ascendant d'origine O (axe de rotation du trop-plein).

Le relation de la statique des fluides s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g$$

où μ est la masse volumique de l'eau.

Avec $P(H) = P_0$, on obtient

$$P(z) = P_0 + \mu g(H - z).$$

La pression de l'eau au niveau de la partie OB vaut

$$P(0) = P_0 + \mu gH.$$

La pression de l'air sur l'autre face valant P_0 , la résultante des forces de pression sur la paroi du fond du trop-plein vaut

$$\vec{F} = (P(0) - P_0)L\ell \vec{e}_z = \mu gHL\ell \vec{e}_z,$$

en notant ℓ sa largeur selon Oy .

La pression étant uniforme sur cette paroi, la force de pression s'applique au milieu de OB ; son moment par rapport à Oy vaut alors

$$\mathcal{M}'_{Oy} = -\frac{L}{2} \mu g H L \ell.$$

La pression n'étant pas uniforme sur la paroi OA' , on va considérer la résultante sur un section comprise entre z et $z+dz$, de surface $dS = \ell dz$. La résultante des forces de pression (eau d'un côté et air de l'autre) s'y exerçant vaut

$$d\vec{F} = (P(z) - P_0) \ell dz \vec{e}_x = \mu g (H - z) \ell dz \vec{e}_x$$

et son moment par rapport à Oy vaut

$$d\mathcal{M}''_{Oy} = z \mu g (H - z) \ell dz.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}''_{Oy} &= \mu g \ell \int_0^H (H - z) z dz = \mu g \ell \int_0^H (Hz - z^2) dz \\ &= \mu g \ell \frac{H^3}{6}. \end{aligned}$$

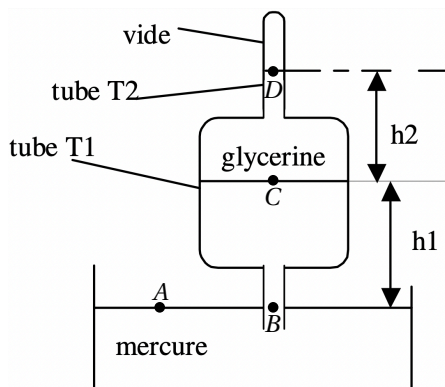
Le moment en O des forces de pression exercées par l'eau et l'air sur la porte vaut $\mathcal{M}_{Oy} = \mathcal{M}'_{Oy} + \mathcal{M}''_{Oy}$ soit

$$\mathcal{M}_{Oy} = \frac{\mu g H \ell}{2} \left(\frac{H^2}{3} - L^2 \right).$$

2. La porte bascule si $\mathcal{M}_{Oy} > 0$, soit si $H > \sqrt{3}L$; la hauteur de liquide vérifie alors

$$h > h_0 + \sqrt{3}L.$$

17 — Baromètre différentiel à deux liquides



1. La loi de l'hydrostatique dans la glycérine donne

$$P(C) = P(D) + \rho_2 g h_2 = \rho_2 g h_2$$

comme $P(D) = 0$.

La loi de l'hydrostatique dans le mercure donne

$$P(B) = P(C) + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1.$$

Les points A et B étant à la même altitude z , on a $P(B) = P(A) = P^\circ$, d'où

$$\rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 = P^\circ.$$

La pression atmosphérique est P° , et les dénivellations des deux liquides sont h_1 et h_2 . Établir la relation entre P° , h_1 et h_2 à l'équilibre.

2. Notons $z > 0$ l'élévation de la surface libre de la glycérine, $z' > 0$ celle de l'interface entre le mercure et la glycérine et $z'' > 0$ la baisse de niveau de la surface libre de mercure dans la cuve.

Les altitudes considérées précédemment deviennent alors

$$h'_1 = h_1 + z' + z'' \quad \text{et} \quad h'_2 = h_2 + z - z'.$$

La conservation du volume de glycérine permet d'écrire

$$S_1 z' = S_2 z$$

soit

$$z' = \frac{S_2}{S_1} z.$$

La conservation du volume de mercure permet d'écrire

$$S_1 z' = S_0 z''$$

soit

$$z'' = \frac{S_1}{S_0} z' = \frac{S_1}{S_0} \frac{S_2}{S_1} z.$$

Avec la pression $P^\circ + \Delta P$, le résultat de la question 1 donne

$$\begin{aligned} P^\circ + \Delta P &= g(\rho_1 h'_1 + \rho_2 h'_2) = g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \\ &\quad + g[\rho_1 (z' + z'') + \rho_2 (z - z')] \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta P = g z \left[\rho_1 \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1}{S_0} \frac{S_2}{S_1} \right) + \rho_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) \right].$$

➤ C'est le raisonnement attendu compte tenu de la forme de l'énoncé. Si on comprend que S_0 est la section de la cuve et non de la surface libre, et que le tube en B à la section S_2 , la conservation du volume de mercure s'écrit

$$S_1 z' = (S_0 - S_2) z''$$

et le résultat final devient

$$\Delta P = g z \left[\rho_1 \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_2}{S_0 - S_2} \right) + \rho_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) \right]$$

qui ne fait pas apparaître clairement les rapports des sections demandés.

3. On calcule

$$\Delta P = 9,81 \times 30 \times 10^{-3} \left[13,6 \times 10^3 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20 \times 10} \right) + 1,26 \times 10^3 \left(1 - \frac{1}{20} \right) \right] = 572 \text{ Pa}$$

soit $\Delta P = 5,72 \text{ mbar}$.

La sensibilité est

$$\frac{z}{\Delta P} = 5,24 \text{ mm/mbar}.$$

Pour le baromètre de Torricelli, on a initialement

$$P^o = \rho_1 g h_1.$$

Quand la pression varie, on a

$$P^o + \Delta P = \rho_1 g (h_1 + z)$$

soit

$$\Delta P = \rho_1 g z.$$

La sensibilité est alors

$$\frac{z}{\Delta P} = \frac{1}{\rho_1 g} = 0,75 \text{ mm/mbar}.$$

Le baromètre différentielle est nettement plus sensible que le baromètre de Torricelli.

18 — Forces de pression

1^{re} méthode (la moins calculatoire)

On calcule la résultante des forces de pression exercées sur la demi-sphère :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{liq}} + \vec{F}_{\text{air}}.$$

En prenant un axe Oz ascendant dont l'origine est au fond du récipient, la pression dans le liquide est

$$P(z) = P_0 + \mu g (h - z).$$

Considérons la demi-boule dans le fond du récipient (non percé), juste décollée du fond (elle est à la même profondeur, mais entourée de liquide). La résultante des forces de pression de l'eau est donnée par la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_A = \frac{2}{3} \pi R^3 \mu g \vec{e}_z.$$

On peut décomposer cette force selon la résultante sur la demi-sphère et la résultante sur le fond de la demi-boule que l'on peut calculer directement car la pression y est uniforme (et la surface plane) :

$$\vec{\Pi}_A = \vec{F}_{\text{liq}} + \pi R^2 P(h) \vec{e}_z = \vec{F}_{\text{liq}} + \pi R^2 (P_0 + \mu g h) \vec{e}_z.$$

La résultante des forces de pression de l'eau sur la demi-sphère est donc

$$\vec{F}_{\text{liq}} = \frac{2}{3} \pi R^3 \mu g \vec{e}_z - \pi R^2 (P_0 + \mu g h) \vec{e}_z.$$

La pression atmosphérique est uniforme sur la hauteur h . La résultante des forces de pression sur la demi-boule placée dans l'atmosphère est donc nulle. On en déduit la résultante des forces de pression atmosphérique sur la face interne de la demi-sphère

$$\vec{F}_{\text{air}} = \pi R^2 P_0 \vec{e}_z.$$

On en déduit la résultante des forces de pression sur la demi-sphère :

$$\vec{F} = \frac{2}{3} \pi R^3 \mu g \vec{e}_z - \pi R^2 \mu g h \vec{e}_z$$

soit

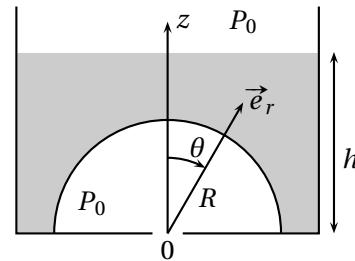
$$\vec{F} = -\mu g \pi R^2 \left(h - \frac{2}{3} R \right) \vec{e}_z.$$

Cette force est vers le bas. Il faut *a minima* exercée sur force opposée, vers le haut, pour soulever la demi-sphère, soit en intensité

$$F_{\min} = \mu g \pi R^2 \left(h - \frac{2}{3} R \right).$$

► Ce terme est bien positif car $h > R$ si la demi-sphère est entièrement immergée.

2^e méthode : calcul direct



Compte tenu de la symétrie du système, la résultante des forces de pression est portée par l'axe de symétrie du système, c'est-à-dire l'axe Oz :

$$\vec{F} = F \vec{e}_z.$$

En notant $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$ le vecteur surface (sortant) sur la demi-sphère, la résultante des forces de pression du liquide sur la demi-sphère Σ est

$$\vec{F}_{\text{liq}} = - \iint_{\Sigma} P(z) d\vec{S}$$

et celle de l'air en dessous est

$$\vec{F}_{\text{air}} = \iint_{\Sigma} P_0 d\vec{S}.$$

Comme $P(z) = P_0 + \mu g (h - z)$ la résultante est

$$\vec{F} = - \iint_{\Sigma} \mu g (h - z) d\vec{S}.$$

Le calcul de cette intégrale vectoriel est bien compliqué car la direction du vecteur $d\vec{S}$ varie quand on balaye

la surface... Nous allons utiliser la discussion préliminaire sur la symétrie du système, en faisant le produit scalaire avec \vec{e}_z :

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_z = - \iint_{\Sigma} \mu g (h - z) d\vec{S} \cdot \vec{e}_z$$

soit

$$F = - \iint_{\Sigma} \mu g (h - z) dS \cos \theta.$$

En coordonnées sphériques, on a

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

De plus $z = R \cos \theta$, d'où

$$F = - \int_{\Sigma} \mu g (h - R \cos \theta) \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

soit

$$\begin{aligned} F &= -\mu g R^2 \int_0^{\pi/2} (h - R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -2\pi \mu g R^2 \int_0^{\pi/2} (h - R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

En posant $u = \cos \theta$, on a $du = -\sin \theta d\theta$ d'où

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \mu g R^2 \int_1^0 (h - Ru) u du \\ &= -2\pi \mu g R^2 \left[h \frac{u^2}{2} - R \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = -2\pi \mu g R^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{R}{3} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$F = -\pi \mu g R^2 \left(h - \frac{2}{3} R \right).$$

On retrouve l'expression obtenue par la première méthode.

19 — Hémisphères de Magdebourg

Sur chaque côté, il faut exercer une force qui s'oppose à la résultante des forces de pression atmosphérique s'exerçant sur une demi-sphère.

On sait que la résultante des forces de pression uniforme s'exerçant sur la surface fermée constituée d'une demi-sphère fermée par une paroi plane (disque de rayon R) est nulle.

En intensité, la résultante des forces de pression atmosphérique s'exerçant sur la demi-sphère est donc égale à la force de pression sur le disque, soit

$$F = P\pi R^2 = 10^5 \times \pi \times 0,28^2 = 2,5 \times 10^4 \text{ N}$$

soit une force équivalente à un poids de 2,5 tonnes!

20 — Modèle de l'atmosphère

L'air atmosphérique est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le champ de pesanteur est uniforme, de valeur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La verticale ascendante est repérée par \vec{e}_z . Au niveau du sol, en $z = 0$, on donne $P_0 = P(0) = 10^5 \text{ Pa}$ et $T(0) = T_0 = 310 \text{ K}$.

1. Relation de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g.$$

L'équation d'état du gaz parfait donne

$$P \frac{V}{n} = RT = P \frac{M}{\mu}$$

d'où

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT}.$$

Avec $T = T_0$, on a

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

d'où

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H_1}} \quad \text{et} \quad H_1 = \frac{RT_0}{Mg}.$$

On calcule $H_1 = 9,1 \times 10^3 \text{ m}$.

2. Avec

$$T(z) = T_0 + \lambda z$$

on a

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 + \lambda z}$$

soit

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{\lambda R} \int_0^z \frac{\lambda dz}{T_0 + \lambda z}$$

d'où

$$\ln \left(\frac{P(z)}{P_0} \right) = -\frac{Mg}{\lambda R} \ln \left(\frac{T_0 + \lambda z}{T_0} \right).$$

On a donc

$$P(z) = P_0 \left(1 + \frac{\lambda z}{T_0} \right)^{-\frac{Mg}{\lambda R}}.$$

où $\lambda = -5 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ est appelée gradient thermique de l'atmosphère.

Déterminer la loi $P(z)$.

3. Si $z \ll H_1$, on a $\frac{|\lambda|z}{T_0} \ll 1$, ce qui permet de linéariser l'expression précédente :

$$P(z) \approx P_0 \left(1 - \frac{Mg}{\lambda R} \frac{\lambda z}{T_0} \right)$$

soit

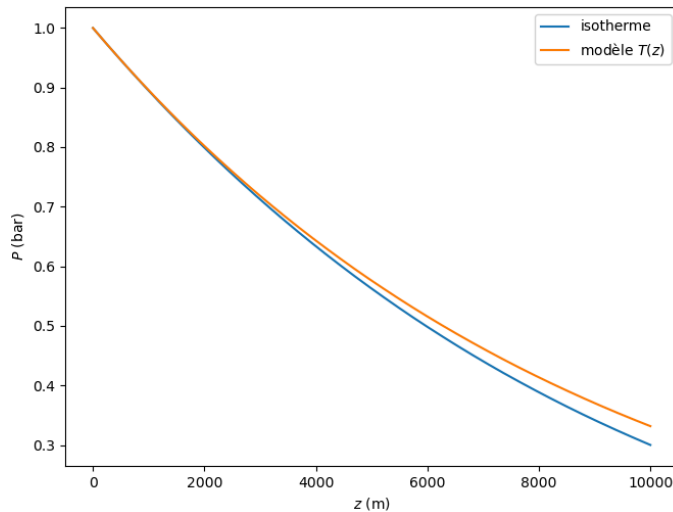
$$P(z) \approx P_0 \left(1 - \frac{Mgz}{RT_0} \right).$$

La linéarisation du modèle isotherme donne

$$P_T(z) \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{H_1} \right) = P_0 \left(1 - \frac{Mgz}{RT_0} \right).$$

On retrouve la même loi approchée de pression avec les deux modèles.

Pour information, voici l'évolution de la pression avec les deux modèles :



21 — Océan isotherme

La masse volumique de l'eau dans un océan varie avec la pression selon la loi

$$\rho = \rho_0 [1 + a(P - P_0)].$$

1. La loi de la statique des fluides s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = \rho g = \rho_0 [1 + a(P - P_0)] g$$

d'où après séparation des variables

$$\frac{1}{a} \int_{P_0}^{P(z)} \frac{a dP}{1 + a(P - P_0)} = \rho_0 g \int_0^z dz$$

soit

$$\frac{1}{a} \ln[1 + a(P - P_0)] = \rho_0 g z.$$

On a donc

$$1 + a(P - P_0) = e^{a\rho_0 g z}$$

soit

$$P(z) = P_0 + \frac{e^{a\rho_0 g z} - 1}{a}.$$

2. La profondeur augmente exponentiellement avec une distance caractéristique $\frac{1}{a\rho_0 g}$. Les profondeurs faibles sont petites devant cette distance, ce qui revient à se placer à

$$a\rho_0 g z \ll 1.$$

On peut donc linéariser $e^{a\rho_0 g z} \approx 1 + a\rho_0 g z$, d'où

$$P(z) \approx P_0 + \rho_0 g z.$$

On retrouve l'expression de la pression obtenue en considérant l'eau comme incompressible de masse volumique ρ_0 .

3. Avec le modèle proposé, on calcule

$$P(1 \text{ km}) = 9,905 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

Avec le modèle incompressible, on obtient

$$P_{\text{inc}}(1 \text{ km}) = 9,900 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

L'écart relatif est

$$\frac{P(1 \text{ km}) - P_{\text{inc}}(1 \text{ km})}{P(1 \text{ km})} = 0,05 \text{ \%}.$$

Il est très faible.

23 — Pression au sommet de l'Everest

1. La température évolue avec l'altitude selon la loi

$$T(z) = T_0 - az$$

avec $a = \frac{60}{8850} = 6,75 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ (ou $^\circ\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$, ça revient au même car c'est une variation de température par mètre).

2. La relation de la statique des fluides s'écrit, on notant (Oz) l'axe vertical ascendant

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{MP}{RT} = \frac{MP}{R(T_0 - az)}$$

soit

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{MPg}{R(T_0 - az)}.$$

Séparons les variables :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R(T_0 - az)} dz.$$

On intègre en faisant attention aux bornes :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T_0 - az'}$$

soit

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{Mg}{Ra} \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{Ra}}$$

d'où

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{az}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{Ra}}.$$

3. En notant $\alpha = \frac{Mg}{aR}$ pour simplifier, la relation précédente s'écrit

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T(z)}{T_0} \right)^\alpha.$$

D'après l'équation d'état du gaz parfait, on a

$$\frac{T}{T_0} = \frac{PV}{P_0 V_0}$$

d'où

$$P = P_0 \left(\frac{PV}{P_0 V_0} \right)^\alpha = P_0^{1-\alpha} P^\alpha V^\alpha V_0^{-\alpha}.$$

On a donc

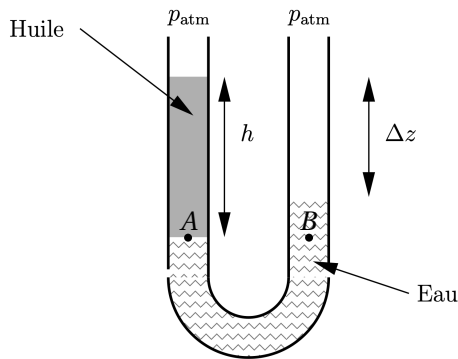
$$P^{\alpha-1} V^\alpha = P_0^{\alpha-1} V_0^\alpha$$

soit $P V^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = P_0 V_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. Avec l'expression de α , on en déduit que l'on a

$$PV^k = \text{cte} \quad \text{avec} \quad k = \frac{Mg}{Mg - aR}.$$

25 — Mesure de la densité d'une huile

On considère les points A et B à la même côte z :



Comme $z_A = z_B$, on a $P_A = P_B$.

La relation de la statique des fluides donne

$$P_A = P_{\text{atm}} + \rho_h g h \quad \text{et} \quad P_B = P_{\text{atm}} + \rho_e g (h - \Delta z)$$

en notant ρ_e la masse volumique de l'eau et ρ_h celle de l'huile.

De $P_A = P_B$ on déduit

$$\rho_h g h = \rho_e g (h - \Delta z).$$

La densité d de l'huile étant définie par $\rho_h = d \rho_e$, on a

$$dh = h - \Delta z,$$

d'où

$$d = 1 - \frac{\Delta z}{h}.$$

Le volume d'huile est $V = hs$, d'où

$$h = \frac{V}{s} = \frac{10}{1} = 10 \text{ cm}.$$

On en déduit $d = 1 - 1,510$ soit $d = 0,85$.

26 — Quand l'entonnoir décolle

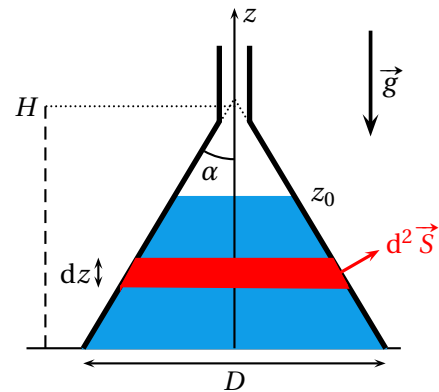
Le pression dans l'entonnoir est

$$P(z) = P_0 + \mu g(z_0 - z).$$

Par symétrie, résultante des forces de pression (de l'eau à l'intérieur et de l'air à l'extérieur) est portée par l'axe de symétrie du système, soit l'axe Oz :

$$\vec{F} = F \vec{e}_z.$$

Considérons la surface de l'entonnoir comprise entre z et $z + dz$:



La largeur de cette bande élémentaire sur l'entonnoir est

$$d\ell = \frac{dz}{\cos \alpha}.$$

Son rayon $r(z)$ est donné par

$$\tan \alpha = \frac{r(z)}{H - z} \quad \text{avec} \quad \tan \alpha = \frac{D}{2H}$$

soit

$$r(z) = \frac{D}{2} - z \tan \alpha.$$

La bande de rayon $r(z)$ et de largeur $d\ell$ a donc pour surface

$$dS = 2\pi r(z) d\ell = 2\pi \left(\frac{D}{2} - z \tan \alpha \right) \frac{dz}{\cos \alpha}.$$

En prenant en compte la pression de l'eau et la pression atmosphérique extérieures, la résultante des forces de pression sur l'entonnoir s'écrit

$$\vec{F} = \iint (P(z) - P_0) d\vec{S}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{e}_z = F &= \iint (P(z) - P_0) d\vec{S} \cdot \vec{e}_z \\ &= \iint (P(z) - P_0) dS \sin \alpha. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{z_0} (P(z) - P_0) 2\pi \left(\frac{D}{2} - z \tan \alpha \right) \sin \alpha \frac{dz}{\cos \alpha} \\ &= 2\pi \mu g \tan \alpha \int_0^{z_0} (z_0 - z) \left(\frac{D}{2} - z \tan \alpha \right) dz \\ &= 2\pi \mu g \tan \alpha \left(\frac{z_0^2 D}{2} - \frac{z_0^3}{2} \tan \alpha - \frac{D}{4} z_0^2 + \frac{z_0^3}{3} \tan \alpha \right) \end{aligned}$$

soit après simplification

$$F = \pi \mu g \tan \alpha z_0^2 \left(\frac{D}{2} - \frac{z_0}{3} \tan \alpha \right).$$

L'entonnoir décolle quand cette force compense le poids de l'entonnoir, soit quand $F = Mg$.

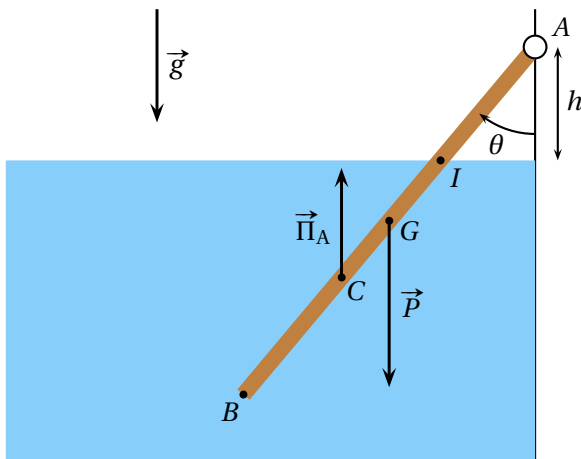
La hauteur z_0 correspondante vérifie alors l'équation

$$\pi \mu \tan \alpha z_0^2 \left(\frac{D}{2} - \frac{z_0}{3} \tan \alpha \right) = M.$$

27 — Flottaison d'une barre en bois

1. La tige est soumise à

- l'action du support en A, dont le moment en A est nul (liaison pivot parfaite, non représentée sur le schéma);
- son poids \vec{P} qui s'applique au barycentre G de la tige;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$ qui s'applique au barycentre C de la partie immergée de la tige.



La tige étant homogène, G est au milieu de AB et C est au milieu de IB.

L'équilibre de la tige est réalisé comme la somme des moments en A des actions est nulle, soit en projection selon l'axe de rotation :

$$\begin{aligned} 0 &= P \times AG \sin \theta - \Pi_A \times AC \sin \theta \\ &= (P \times AG - \Pi_A \times AC) \sin \theta. \quad (1) \end{aligned}$$

L'équation (1) admet la solution $\theta = 0$: la tige est verticale.

La solution $\theta \neq 0$ est alors donnée par

$$0 = P \times AG - \Pi_A \times AC$$

Il faut déterminer AG et AC.

On a $AG = L/2$.

On a

$$AI = \frac{h}{\cos \theta}$$

d'où

$$BI = L - AI = L - \frac{h}{\cos \theta}.$$

On a donc

$$BC = \frac{BI}{2} = \frac{L}{2} - \frac{h}{2 \cos \theta}$$

et

$$AC = L - BC = \frac{L}{2} + \frac{h}{2 \cos \theta}.$$

Notons ρ_e la masse volumique de l'eau. Celle de la tige est $\rho_t = d\rho_e$.

En notant V le volume de la tige, sa masse vaut

$$m = \rho_t V = d\rho_e V.$$

La tige étant de section constante, son volume immergé est donné par

$$V_{\text{im}} = \frac{IB}{AB} V = \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta} \right) V.$$

La masse du fluide de remplacement vaut donc

$$m_f = \rho_e V_{\text{im}} = \rho_e V \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta} \right).$$

On en déduit

$$P = mg = d\rho_e V g$$

et

$$\Pi_A = m_f g = \rho_e V \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta} \right) g.$$

La condition d'équilibre $AG \times P = AC \times \Pi_A$ s'écrit alors

$$\frac{L}{2} d\rho_e V g = \left(\frac{L}{2} + \frac{h}{2 \cos \theta} \right) \rho_e V \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta} \right) g$$

soit

$$d = \left(1 + \frac{h}{L \cos \theta} \right) \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta} \right) = 1 - \frac{h^2}{L^2 \cos^2 \theta}.$$

On en déduit

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1-d}} \frac{h}{L}. \quad (2)$$

2. On a une solution $\theta \neq 0$ si l'équation (2) a une solution. Comme $\cos \theta \leq 1$, il faut

$$\frac{1}{\sqrt{1-d}} \frac{h}{L} \leq 1$$

soit

$$\frac{h}{L} \leq \sqrt{1-d}.$$

3. On calcule

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1-0,65}} \frac{1}{3} = 0,5634$$

d'où $\theta = 55,7^\circ$.

~~~~~ Écoulement d'un fluide visqueux ~~~~~

30 — Courroie sur un film d'huile

1. On a un profil linéaire de vitesse $v(y)$, avec les conditions aux limites

$$v(y=0) = 0 \quad \text{et} \quad v(y=h) = V.$$

On en déduit le champ des vitesses

$$\vec{v} = V \frac{y}{h} \vec{e}_x.$$

La force exercée par le fluide sur la surface $S = Lb$ est donnée par

$$\vec{F}_{\text{visc}} = -\eta \frac{dv}{dy}(h) Lb \vec{e}_x = -\frac{\eta V}{h} Lb \vec{e}_x.$$

Sa puissance vaut alors

$$P_{\text{visc}} = \vec{F} \cdot V \vec{e}_x = -\frac{\eta V^2}{h} Lb.$$

Il faut fournir la puissance opposée pour maintenir la vitesse de la courroie constante, soit

$$P = \frac{\eta V^2}{h} Lb.$$

En supposant un profil de vitesse linéaire dans la couche d'huile, déterminer la puissance P à fournir pour maintenir la vitesse de la courroie constante, en fonction de h, L, V, b et η .

2. Application numérique :

$$P = \frac{0,40 \times (2,5)^2}{3 \times 10^{-2}} \times 2 \times 0,60$$

soit $P = 100 \text{ W}$.

31 — Freinage d'un bloc

1. Les conditions aux limites sont

$$v(0) = 0 = b \quad \text{et} \quad v(e) = V_0 = ae,$$

d'où

$$v(z) = V_0 \frac{z}{e}.$$

2. La force exercée par un fluide sous une surface S est

$$\vec{F} = -\eta \frac{dv}{dz} S \vec{u}_x$$

soit

$$\vec{F} = -\eta \frac{V_0}{e} S \vec{u}_x.$$

3. PFD en projection selon \vec{u}_x appliqué au bloc :

$$m \frac{dV}{dt} = -\eta \frac{V(t)}{e} S,$$

soit

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V(t)}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{me}{\eta S}.$$

Avec $V(0) = V_0$, on obtient $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$.

En intégrant, on obtient $x(t) = -\tau V_0 e^{-t/\tau} + A$.

Avec $x(0) = 0$, on obtient $x(t) = \tau V_0 [1 - e^{-t/\tau}]$.

On a alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \tau V_0 = L$, d'où la distance d'arrêt

$$L = \frac{meV_0}{\eta S}.$$

Viscosité dynamique de l'eau : $\eta = 10^{-3} \text{ Pl}$.

On calcule

$$L = \frac{30 \times 10^{-3} \times 2}{1 \times 10^{-3} \times 400 \times 10^{-4}},$$

soit $L = 1500 \text{ m}$.

32 — Oléoduc

1. La vitesse débitante est définie par $Q = U\pi R^2$, d'où

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{36/3600}{\pi \times (8 \times 10^{-2})^2}$$

soit $U = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. On a

$$P_A - P_B = R_h Q \quad \text{avec} \quad Q = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

d'où

$$\eta = (P_A - P_B) \frac{\pi R^4}{8QL} = 2,6 \times 10^5 \times \frac{\pi \times (8 \times 10^{-2})^4}{8 \times 36/3600 \times (2 \times 10^3)}$$

soit $\eta = 0,21 \text{ Pl}$.

La viscosité cinématique vaut $\nu = \eta/\rho$, soit

$$\eta = 2,3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. Le nombre de Reynolds vaut

$$\text{Re} = \frac{U \times (2R)}{\nu} = \frac{0,5 \times 16 \times 10^{-2}}{2,3 \times 10^{-4}}$$

soit $\text{Re} = 3,5 \times 10^2$.

On est bien dans le domaine d'un écoulement laminaire.

4. On a similitude entre les deux écoulements s'ils ont même nombre de Reynolds; il faut donc

$$R_0 = \frac{\nu_{\text{eau}} \text{Re}}{2U} = \frac{(9 \times 10^{-7}) \times (3,5 \times 10^2)}{2 \times 2}$$

soit $R_0 = 79 \mu\text{m}$.

33 — Écoulement sur un plan incliné

1. Avec le champ des vitesses proposé, l'accélération d'une particule de fluide est

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{0}.$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide de volume $d\tau$ s'écrit donc

$$\vec{0} = -\text{grad} P d\tau + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} d\tau + \rho \vec{g} d\tau$$

soit

$$\vec{0} = -\text{grad} P + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} + \rho \vec{g}.$$

En projection selon Oy , on obtient :

$$0 = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_y - \rho g \cos \alpha. \quad (3)$$

On intègre par rapport à x (donc y est considérée comme constante) :

$$P(x, y) = -\rho g y \cos \alpha + A(x).$$

► La « constante » d'intégration est constante vis-à-vis de la variation d'intégration y , donc *a priori* elle dépend de x ... N'hésitez pas à dériver par rapport à y , avec x constant, l'expression de la pression obtenue pour vous en convaincre.

Pour $y = e$, on a $P(x, e) = P_0$, soit

$$P_0 = -\rho g e \cos \alpha + A(x).$$

Finalement la constante d'intégration est une vraie constante! On a alors

$$P(y) = P_0 + \rho g (h - e) \cos \alpha.$$

On projette alors (3) selon Ox :

$$0 = \eta \frac{d^2 v}{dy^2} + \rho g \cos \alpha,$$

soit

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{\rho g \cos \alpha}{\eta}.$$

Une première intégration donne

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{\rho g \cos \alpha}{\eta} y + B.$$

► Le champ des vitesses ne dépend que de y d'après l'énoncé, donc la constante d'intégration est une vraie constante!

On néglige la force visqueuse à la surface libre en $y = e$, soit

$$\eta \frac{dv}{dy}(y = e) = 0$$

d'où

$$B = \frac{\rho g \cos \alpha}{\eta} e.$$

On a donc

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\rho g \cos \alpha}{\eta} (e - y).$$

On intègre à nouveau :

$$v(y) = \frac{\rho g \cos \alpha}{\eta} \left(ey - \frac{y^2}{2} \right) + C.$$

Avec la condition $y(0) = 0$, on a $C = 0$, d'où

$$v(y) = \frac{\rho g \cos \alpha}{\eta} \left(ey - \frac{y^2}{2} \right).$$

2. Le débit massique est donné par

$$\begin{aligned} D_m &= \int_0^e \rho v(y) L dy = \frac{\rho^2 g L \cos \alpha}{\eta} \int_0^e \left(ey - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \frac{\rho^2 g L \cos \alpha}{\eta} \left(e \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{6} \right) \end{aligned}$$

soit

$$D_m = \frac{\rho^2 g e^3 L \cos \alpha}{3\eta}.$$

3. Compte tenu du profil de vitesse, la vitesse est maximale en $y = e$ (dérivée nulle d'après la condition à la surface libre), soit

$$v_{\max} = \frac{\rho g e \cos \alpha}{2\eta}.$$

34 — Fioul dans une conduite

1. En $r = D/2 = 0,15$ cm, on calcule

$$v(D/2) = 2 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La loi est bien cohérente avec la condition sur la paroi (vitesse nulle).

Le débit volumique est donné par

$$\begin{aligned} D_v &= \int_0^{0,15} v(r) 2\pi r dr = 4\pi \int_0^{0,15} (r - 44,44 r^3) dr \\ &= 4\pi \left[\frac{(0,15)^2}{2} - \frac{44,44}{4} (0,15)^4 \right]. \end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donnée par $D_v = \pi (0,15)^2 v_{\text{moy}}$, d'où

$$v_{\text{moy}} = 4 \left[\frac{1}{2} - 11,11 (0,15)^2 \right] = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La loi de vitesse est donc cohérente avec la vitesse moyenne donnée.

2. Le débit volumique vaut $D_v = v_{\text{moy}} \pi \frac{D^2}{4}$, soit

$$D_v = 70,7 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 70,7 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. Un écoulement est dit laminaire quand les lignes de courants sont rectilignes, parallèles entre elles (à une dimension). Un écoulement a des chances d'être laminaire si le nombre de Reynolds est tel que $\text{Re} < 2000$.

Ici, on calcule

$$\text{Re} = \frac{v_{\text{moy}} D}{\nu} = 6 \times 10^3.$$

On a $\text{Re} > 4000$: l'écoulement sera sans aucun doute turbulent.

4. On écrit la contrainte tangentielle visqueuse :

$$d\vec{F}_{i \rightarrow e} = -\eta \frac{dv}{dr} dS \vec{e}_z$$

où $dS = 2\pi r dz$ est la surface latérale considérée. Le gradient de la vitesse normal à cette surface est la composante radiale¹ $\frac{dv}{dr}$. Le fluide intérieur correspond au fluide « en-dessous » dans la formule du cours : ici $\frac{dv}{dr} < 0$; le fluide intérieur va plus vite que le fluide extérieur, et exerce sur ce dernier une force selon $+\vec{e}_z$.

On a donc

$$d\vec{F}_{i \rightarrow e} = -2\pi\eta r \frac{dv}{dr} dz \vec{e}_z.$$

5. Sur toute la paroi, la force due à la viscosité est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -2\pi\eta \frac{D}{2} \frac{dv}{dr} (D/2)L \vec{e}_z \\ &= -2\pi\eta \frac{D}{2} (-4)44,44 \frac{D}{2} L \vec{e}_z = 88,88\pi\eta D^2 L \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Avec $\eta = \mu\nu$, on calcule $F = 88,88\pi\mu\nu D^2 L$ soit

$$F = 1,1 \times 10^3 \text{ N}.$$

6. Les lignes de courants sont rectilignes, selon l'axe Oz de la conduite; en régime stationnaire, elles s'identifient aux trajectoires des particules de fluides. Ces dernières ont donc un mouvement rectiligne et uniforme : leur accélération est nulle, ainsi donc que la somme des forces appliquées (d'après le PFD).

Se reporter au cours : on a montré que $\frac{dP}{dz}$ est une constante, c'est-à-dire que la pression est une fonction affine de z .

Considérons le pellicule cylindrique de longueur L , comprise entre r et $r + dr$. Toutes les particules de

fluide qui la constitue ont une trajectoire rectiligne uniforme; la quantité de mouvement de ce système étant constante, la somme des forces appliquées est nulle :

$$dF_p(0) + dF_p(L) + dF_{\text{visc}} = 0.$$

La composante selon \vec{e}_z de la force de pression en amont vaut

$$dF_p(0) = 2\pi r P(0) dr.$$

La composante selon \vec{e}_z de la force de pression en aval vaut

$$dF_p(L) = -2\pi r P(L) dr.$$

La résultante des forces visqueuses s'écrit en ajoutant la résultante sur la face interne de surface $S(r)$ et la face externe de surface $S(r + dr)$:

$$\begin{aligned} dF_{\text{visc}} &= -\eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_r S(r) + \eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} S(r+dr) \\ &= \eta \frac{d}{dr} \left(S(r) \frac{dv}{dr} \right) dr \end{aligned}$$

soit comme $S(r) = 2\pi r L$,

$$dF_{\text{visc}} = 2\pi\eta L \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr.$$

Le bilan des forces conduit alors à

$$0 = 2\pi r [P(0) - P(L)] dr + 2\pi\eta L \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr$$

d'où

$$P(0) - P(L) = -\frac{\eta L}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right).$$

On calcule

$$\frac{dv}{dr} = -4 \times 44,44 r; \quad r \frac{dv}{dr} = -4 \times 44,44 r^2$$

d'où

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{8}{r} \times 44,44 r = -8 \times 44,44.$$

On en déduit l'écart de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau :

$$P(0) - P(L) = 8 \times 44,44 \eta L = 356 \mu \nu L.$$

On calcule $\Delta P = 1,55 \times 10^4 \text{ Pa}$.

1. Dérivée droite car ν ne dépend que de r .

35 — Mesure de viscosité par lecture d'une carte des vitesses

D'après la carte des vitesses, le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(x, y) \vec{e}_x$.

On considère une « particule de fluide » de cote y_2 , cubique, de 1 cm de côté.

L'accélération de la particule de fluide est donnée par

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v(x, y_2) \frac{\partial v(x, y_2)}{\partial x} \vec{e}_x.$$

On mesure sur la carte

$$v(x_1, y_2) = \frac{6}{4} \times 0,1 = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et

$$v(x_2, y_2) = \frac{7}{4} \times 0,1 = 0,175 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On peut estimer

$$\frac{\partial v(x, y_2)}{\partial x} = \frac{v(x_2, y_2) - v(x_1, y_2)}{x_2 - x_1} = \frac{0,175 - 0,15}{5,5 \times 10^{-2}} = 0,455 \text{ s}^{-1}.$$

On en déduit l'accélération de la particule de fluide :

$$a = v(x_1, y_2) \frac{\partial v(x, y_2)}{\partial x} = 0,15 \times 0,455 = 6,8 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

La force visqueuse exercée sur la face supérieure de section S de la particule de fluide par le fluide au-dessus est

$$\vec{F}_{\text{sup}} = \eta \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right)_{\text{sup}} S \vec{e}_x,$$

avec $S = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

On peut estimer

$$\left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right)_{\text{sup}} = \frac{v(x_1, y_3) - v(x_1, y_2)}{y_3 - y_2}$$

avec

$$v(x_1, y_3) = \frac{10}{4} \times 0,1 = 0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit

$$\left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right)_{\text{sup}} = \frac{0,25 - 0,15}{10^{-2}} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

On a donc la composante

$$F_{\text{sup}} = \eta \times 10 \times 10^{-4} = 10^{-3} \eta.$$

De même, la face inférieure reçoit du fluide en dessous la force visqueuse

$$\vec{F}_{\text{inf}} = -\eta \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right)_{\text{inf}} S \vec{e}_x,$$

On peut estimer

$$\left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right)_{\text{inf}} = \frac{v(x_1, y_2) - v(x_1, y_1)}{y_2 - y_1}$$

avec

$$v(x_1, y_1) = \frac{4}{4} \times 0,1 = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

d'où

$$\left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right)_{\text{inf}} = \frac{0,15 - 0,1}{10^{-2}} = 5 \text{ s}^{-1}.$$

On a donc la composante

$$F_{\text{inf}} = -\eta \times 5 \times 10^{-4} = -5 \times 10^{-4} \eta.$$

En notant $\ell^3 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ le volume de la particule de fluide, le principe fondamental de la dynamique projeté selon \vec{e}_x s'écrit

$$\mu \ell^3 a = F_{\text{sup}} + F_{\text{inf}},$$

soit

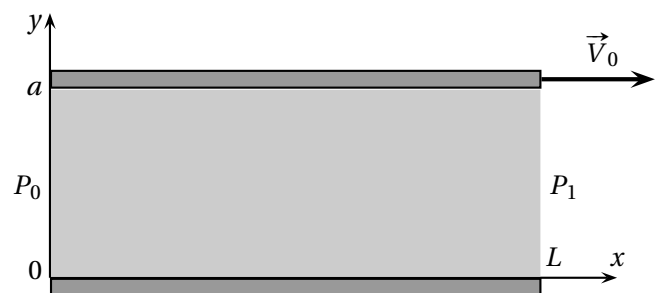
$$1500 \times (1 \times 10^{-6}) \times (6,8 \times 10^{-2}) = (10^{-3} - 5 \times 10^{-4}) \eta$$

d'où $\eta = 0,2 \text{ Pl}$.

37 — Écoulement de Couette généralisé

Écoulement de Couette généralisée

On impose maintenant un gradient de pression parallèlement au plan, par les conditions aux limites $P(0) = P_0$ et $P(L) = P_1 = P_0 + \Delta P$ (le terme ΔP est algébrique).



4. Les particules de fluide ayant une trajectoire rectiligne uniforme (car s'identifiant avec les lignes de courant dans le cas d'un écoulement stationnaire), leur accélération est nulle. Le principe de la dynamique appliqué à une particule de fluide s'écrit donc

$$\delta m \vec{a} = \vec{0} = -\text{grad} P d\tau + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} d\tau \vec{e}_x,$$

soit

$$\frac{dP}{dx} = \eta \frac{d^2 v}{dy^2}.$$

Le premier membre de l'égalité est indépendant de y , le second est indépendant de x ; ces deux termes sont

donc égaux à une constante. Le profil de pression est alors affine, d'où

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P(L) - P(0)}{L - 0}$$

soit

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\Delta P}{L}.$$

5. On a donc

$$\eta \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{\Delta P}{L}.$$

On en déduit $v(y) = \frac{\Delta P}{2\eta L} y^2 + Ay + b$.

Les conditions aux limites sont $v(0) = 0 = B$ et $v(a) = V_0$, d'où $A = \frac{V_0}{a} - \frac{\Delta P}{2\eta L} a$. Finalement

$$v(y) = \frac{\Delta P}{2\eta L} y(y - a) + \frac{V_0}{a} y.$$

- Pour $\Delta P = 0$ on a le profil linéaire des vitesses caractéristique de l'écoulement de Couette.
- Pour $V_0 = 0$, on a le profil parabolique symétrie caractéristique de l'écoulement de Poiseuille.

Cet écoulement est une superposition d'un écoulement de Couette et de Poiseuille.

6. Le débit volumique est donné par

$$Q = \int_0^a b v(y) dy$$

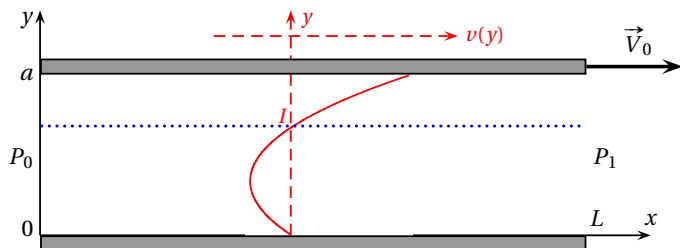
soit

$$Q = -\frac{ba^3}{12\eta L} \Delta P + V_0 \frac{ab}{2}.$$

Le débit s'annule pour $\Delta P = \frac{6\eta L}{a^2} V_0$. Le champ des vitesses s'écrit alors

$$v(y) = \frac{3V_0}{a^2} \left(y^2 - \frac{2}{3} ay \right) = \frac{3V_0}{a^2} y \left(y - \frac{2}{3} a \right).$$

On vérifie $v(0) = 0$ et $v(a) = V_0$.



La vitesse s'annule en $I(y = \frac{2}{3}a)$. Au dessus de la ligne bleue, l'écoulement est dirigé vers la droite, forcé par le mouvement de la plaque supérieure. En-dessous de cette ligne, on observe un écoulement de retour, dû à la surpression à droite.

7. On peut décomposer la force exercée par le fluide sur chaque plaque en une composante normale, la force de pression, et une composante tangentielle, la contrainte visqueuse.

La plaque supérieure est soumise à

$$\vec{F} = \vec{F}_{N,s} + \vec{F}_{T,s} = F_{N,s} \vec{e}_y + F_{T,s} \vec{e}_x.$$

La contrainte visqueuse exercée par le fluide sur la plaque supérieure vaut

$$F_{T,s} = -\eta \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=a} bL = -4\eta \frac{V_0}{a} bL.$$

La plaque inférieure est soumise à la force de pression

$$F_{T,i} = -F_{N,s} = -\left(P_0 + \frac{\Delta P}{2} \right) bL.$$

La contrainte tangentielle s'exerçant sur la plaque inférieure vaut

$$F_{T,i} = +\eta \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0} bL = -2\eta \frac{V_0}{a} bL.$$

38 — Écoulement sanguin

1. Le débit volumique est donné par

$$\begin{aligned} D_v &= \int_0^R 2\pi r v(r) dr = 2\pi B \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr \\ &= 2\pi B \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2R^2} \right) = \frac{\pi B R^2}{2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$B = \frac{2D_v}{\pi R^2}.$$

2.a) Le fluide exerce sur une longueur dz de paroi la force

$$dF = -\eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_R 2\pi R dz.$$

On a

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{2B}{R^2} r = -\frac{4D_v}{\pi R^4} r,$$

d'où

$$dF = \eta \frac{4D_v}{\pi R^3} 2\pi R dz = \eta \frac{8D_v}{R^2} dz.$$

Pour une longueur L , la résultante est donc

$$F = 8\eta \frac{L}{R^2} D_v.$$

2.b) On a $F > 0$: cette force est dans le sens de l'écoulement.

3. La quantité de mouvement du fluide contenu dans une longueur L de tuyau étant constante, la somme des forces exercées est nulle. Selon la 3^e de Newton, le tuyau exerce sur le fluide la force $-\vec{F}$, opposée à celle

exercée par le fluide sur le tuyau. Selon Ox , on obtient alors

$$0 = P_e S - P_s S - F,$$

d'où, comme $S = \pi R^2$

$$P_e - P_s = \frac{F}{\pi R^2}.$$

4. Compte tenu de l'expression de F établie précédemment, on a

$$P_e - P_s = 8\eta \frac{L}{\pi R^4} D_v = R_h D_v,$$

d'où

$$R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}.$$

39 — Sténose

1. L'écoulement étant incompressible, la diminution de la section dans la zone sténosée se traduit par une **augmentation de la vitesse**.

2. Nous allons faire l'hypothèse d'un écoulement laminaire stationnaire. On se ramène donc à un écoulement de Poiseuille.

La résistance hydraulique de chaque partie saine du vaisseau est

$$R_{h,v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}.$$

La résistance hydraulique de la partie sténosée est

$$R_{h,s} = \frac{8\eta L_s}{\pi R_s^4}.$$

Les trois segments étant associés en série, la résistance équivalente est donnée par $R_h = 2R_{h,v} + R_{h,s}$, soit

$$R_h = \frac{8\eta}{\pi} \left(\frac{2L}{R^4} + \frac{L_s}{R_s^4} \right).$$

On peut alors écrire

$$\Delta P = R_h Q,$$

d'où l'expression du débit volumique

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{8\eta} \frac{1}{\frac{2L}{R^4} + \frac{L_s}{R_s^4}}.$$

On calcule

$$Q = \frac{40\pi}{8 \times (6 \times 10^{-3})} \frac{1}{\frac{7 \times 10^{-2}}{(6 \times 10^{-3})^4} + \frac{10^{-2}}{(2 \times 10^{-3})^4}} = 3,9 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\text{soit } Q = 3,9 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. On a un signe – car le fluide est sous la plaque, mais le gradient de vitesse est lui aussi opposé.

3. Le nombre de Reynolds dans les parties non sténosées s'écrit

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho v 2R}{\eta}$$

où la vitesse moyenne est donnée par $Q = v\pi R^2$. On en déduit $\mathcal{R}e = 72$.

Dans la partie sténosée, on a de même

$$\mathcal{R}e' = \frac{\rho v' 2R_s}{\eta} = 220.$$

Dans les deux cas, l'hypothèse d'un écoulement laminaire est pertinente.

4. La vitesse d'écoulement étant plus grande dans la partie sténosée, on peut détecter cette différence de vitesse par échographie Doppler.

40 — Couple sur un disque en rotation

Nous allons considérer les actions visqueuses s'exerçant sur la partie supérieure du disque. Par symétrie, les actions s'exerçant sur la partie inférieure sont identiques.

À une distance r de l'axe, la vitesse d'un point du disque est

$$\vec{V} = r\Omega \vec{e}_\theta$$

en coordonnées cylindriques.

Le champ des vitesses dans l'huile est de la forme $\vec{v} = v(r, z) \vec{e}_\theta$ et vérifie les conditions aux limites

$$v(r, 0) = r\Omega \quad \text{et} \quad v(r, h) = 0$$

en prenant $z = 0$ sur la face supérieure du disque (cf. schéma).

Le profil de vitesse étant linéaire (selon z), on a donc

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v(r, h) - v(r, 0)}{h - 0} = -\frac{r\Omega}{h}.$$

Considérons un élément de surface élémentaire en coordonnées polaires

$$d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_z$$

à la distance r de l'axe, centré en $M(r, \theta)$.

La force exercée par le fluide sur cette surface est

$$d\vec{F}_{\text{sup}} = +\eta \frac{\partial v}{\partial z} d\vec{S} \vec{e}_\theta = -\eta \frac{r\Omega}{h} r dr d\theta \vec{e}_\theta.$$

Le moment exercé sur cette surface est

$$\begin{aligned} d\vec{\Gamma}_{\text{sup}} &= \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{\text{sup}} = r \vec{e}_r \wedge \left(-\eta \frac{r\Omega}{h} \right) r dr d\theta \vec{e}_\theta \\ &= -\eta \frac{\Omega}{h} r^3 dr d\theta \vec{e}_z = d\Gamma \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Le moment total exercé sur la face supérieur vaut donc

On en déduit le moment total exercé sur la face supérieure :

$$\Gamma = -\eta \frac{\Omega}{h} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = -\eta \frac{\Omega}{h} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{\pi \eta \Omega}{2h} R^4.$$

Par symétrie, on a sur la face inférieure $d\vec{F}_{\text{inf}} = d\vec{F}_{\text{sup}}$, et le couple est identique.

Le moment total est donc $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_z$, où le couple total exercé par les forces visqueuses sur le disque s'écrit

$$\Gamma = -\frac{\pi \eta \Omega}{2h} R^4.$$

41 — Viscosimètre de Poiseuille

1. On va considérer que la section S du réservoir est grande devant la section πa^2 du tuyau (ce qui revient à considérer $R \gg a$ comme le suggère la figure).

De la conservation du débit volumique on déduit que la vitesse du fluide dans le réservoir est très faible devant la vitesse du fluide dans le tuyau.

Nous pouvons donc faire l'hypothèse que le fluide est quasi-au repos dans le réservoir.

L'écoulement est lent dans le tuyau, donc nous allons supposer que cet écoulement est laminaire.

Enfin, le jet sort du tuyau à l'air libre, donc la pression à la sortie du tuyau est P_0 , pression atmosphérique.

2. La loi de l'hydrostatique s'applique dans le réservoir (fluide au repos), donc la pression dans le fond du réservoir est

$$P_1 = P_0 + \mu g h.$$

Cette pression se retrouvant à l'entrée du tuyau, la surpression entre l'entrée et la sortie du tuyau est

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \mu g h.$$

L'hypothèse d'un écoulement laminaire permet d'appliquer la loi de Poiseuille donnant le débit volumique :

$$D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L} \Delta P = \frac{\pi a^4}{8\eta L} \mu g h.$$

On en déduit la vitesse débitante dans le tuyau par $D_v = \pi a^2 U$, d'où

$$U = \frac{\mu g h a^2}{8\eta L}.$$

En fait, le niveau $h(t)$ baisse très lentement dans le récipient ; la vitesse d'un point de la surface libre est donc

$$V_{\text{sl}} = -\frac{dh}{dt}.$$

Attention au signe, $h(t)$ diminue quand le récipient se vide !

La conservation du débit volumique entre le récipient et le tuyau s'écrit

$$V_{\text{sl}} \pi R^2 = U \pi a^2.$$

On a donc

$$-\frac{dh}{dt} = U \frac{a^2}{R^2} = \frac{\mu g a^4}{8\eta L R^2} h(t).$$

soit en notant $\nu = \eta/\mu$ la viscosité cinématique

$$\frac{dh}{dt} + \frac{h(t)}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{8\nu L R^2}{g a^4}.$$

La solution est

$$h(t) = h_0 e^{-t/\tau}.$$

3. On donne

$$h(\Delta t) = h_0 e^{-\Delta t/\tau} = \frac{h_0}{2}$$

d'où

$$\Delta t = \tau \ln 2 = \frac{8\nu L R^2}{g a^4} \ln 2.$$

On en déduit

$$\nu = \frac{\Delta t g a^4}{2 L R^2 \ln 2} = \frac{59 \times 60 \times 9,8 \times (0,5 \times 10^{-3})^4}{8 \times 0,5 \times (2 \times 10^{-2})^2 \ln 2}$$

soit $\nu = 2,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

4. La vitesse débitante varie au cours du temps. Calculons sa valeur maximale, en $t = 0$:

$$U = \frac{\mu g h_0 a^2}{8\eta L} = \frac{g h_0 a^2}{8\nu L} = \frac{R^2}{a^2} \frac{h_0}{\Delta t} \ln 2 = \left(\frac{2 \times 10^{-2}}{0,5 \times 10^{-3}} \right)^2 \frac{6 \times 10^{-2}}{60 \times 59} \ln 2$$

soit $U_0 = 19 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans le tuyau est

$$\text{Re} = \frac{2aU}{\nu} = 9,4 \approx 10.$$

Cette valeur est bien compatible avec un écoulement laminaire.

43 — Montée de lave

1. Le liquide étant incompressible, son écoulement l'est aussi ; on a donc

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v} = v(r) \vec{e}_z.$$

La vitesse ne dépend que de r .

2. Nous allons calculer $v(r)$ pour en déduire le débit.

Considérons comme système le tube de rayon r , d'épaisseur dr , compris entre z et $z + dz$.

Sa section est donc $dS = 2\pi r dr$ et son volume $d\tau = 2\pi r dr dz$.

Les particules de fluides ont un mouvement rectiligne uniforme (lignes de courant rectilignes, égales aux trajectoires en régime stationnaire); leur accélération est donc nulle.

Le principe fondamentale de la dynamique s'écrit alors, en projection selon Oz

$$\begin{aligned} 0 &= P(z)2\pi r dr - P(z+dz)2\pi r dr - \rho g 2\pi r dr dz \\ &\quad + \eta 2\pi(r+dr) \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} dz - \eta 2\pi r \left(\frac{dv}{dr} \right)_r dz \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} 2\pi r dr dz - \rho g 2\pi r dr dz + 2\pi \eta \frac{d}{dr} \left[r \frac{dv}{dr} \right] dr dz \end{aligned}$$

soit après simplification

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dv}{dr} \right] - \rho g.$$

Le premier membre de l'égalité est indépendant de r tandis que le second est indépendant de z ; ces deux termes sont donc égaux à une constante. La loi $P(z)$ est donc affine; en particulier

$$\frac{dP}{dz} = \frac{P(h) - P(0)}{h - 0} = \frac{P_0 - P_{\text{inf}}}{h}.$$

On a donc

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dv}{dr} \right] - \rho g = \frac{P_0 - P_{\text{inf}}}{h}$$

soit

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dv}{dr} \right] = \frac{1}{\eta h} [P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h] r.$$

Intégrons une première fois :

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\eta h} [P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h] r^2 + A,$$

soit

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\eta h} [P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h] r + \frac{A}{r}.$$

Comme dv/dr doit rester fini en $r = 0$, on a $A = 0$:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\eta h} [P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h] r.$$

Intégrons une seconde fois :

$$v(r) = \frac{1}{4\eta h} [P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h] r^2 + B.$$

La condition $v(R) = 0$ permet d'écrire

$$v(r) = \frac{1}{4\eta h} [P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h] (R^2 - r^2).$$

Le débit volumique est donné par

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R 2\pi r v(r) dr \\ &= \frac{2\pi}{4\eta h} (P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h) \int_0^R (rR^2 - r^3) dr \\ &= \frac{\pi}{2\eta h} (P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h) \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \end{aligned}$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta h} (P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h).$$

► On aurait pu prendre comme système le cylindre de rayon r et de hauteur dz . Le principe de la dynamique donne alors

$$0 = P(z)\pi r^2 - P(z+dz)\pi r^2 - \rho g \pi r^2 dz + \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r dz$$

d'où avec le même raisonnement que précédemment

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g + \frac{2\eta}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{P_0 - P_{\text{inf}}}{h}.$$

On arrive alors directement à

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\eta h} (P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h) r$$

faisant l'économie d'une intégration.

3. On calcule

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi \times 10^4}{8 \times 20 \times 10^3 \times 5000} \\ &\quad \times (2 \times 10^3 \times 10^5 - 10^5 - 2700 \times 9,8 \times 5000) \end{aligned}$$

$$\text{soit } Q = 2,7 \times 10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse est maximale au centre :

$$v_{\text{max}} = \frac{P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h}{4\eta h} R^2.$$

$$\text{On calcule } v_{\text{max}} = 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse débitante est donnée par $Q = \pi R^2 u$, d'où

$$u = 8,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4. Le nombre de Reynolds est donné par

$$\text{Re} = \frac{\rho u 2R}{\eta}.$$

$$\text{On calcule } \text{Re} = 23.$$

L'hypothèse d'un écoulement laminaire est cohérente.