

DM n° 5

Ondes — solution

Instruments à corde

□ 1 — Considérons un élément de corde compris entre x et $x + dx$. L'élément de longueur s'écrit

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \approx dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right],$$

soit $d\ell \approx dx$ au premier ordre.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à cet élément s'écrit

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T}_g + \vec{T}_d.$$

Le mouvement étant transversal, on a

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y.$$

En projection selon $\vec{e}_x$, le PFD s'écrit

$$0 = -T(x, t) \cos \alpha(x, t) + T(x + dx) \cos \alpha(x + dx, t).$$

Comme $\alpha \ll 1$, on a $\cos \alpha \approx 1$, d'où

$$0 = -T(x, t) + T(x + dx, t) = \frac{\partial T}{\partial x} dx.$$

La tension est donc indépendante de x : elle est uniforme le long de la corde.

□ 2 — Notons T la tension de la corde. En projection selon $\vec{e}_y$, le PFD s'écrit

$$\begin{aligned} \mu d\ell \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) \\ &= T [\tan \alpha(x + dx, t) - \tan \alpha(x, t)]. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \tan \alpha(x + dx, t) - \tan \alpha(x, t) &\approx \alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t) \\ &= \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

d'où

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

La constante c représente la **célérité** des ondes progressives le long de la corde.

Cette équation est l'**équation de d'Alembert**.

□ 3 — On calcule $c = \sqrt{\frac{103}{3 \times 10^{-3}}}$, soit $c = 185 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La masse linéique de la corde est $\mu = \rho \pi \frac{\phi^2}{4}$, d'où

$$c = \sqrt{\frac{4T_0}{\rho \pi \phi^2}} = \sqrt{\frac{4 \times 850}{7800 \times \pi \times (1,2 \times 10^{-3})^2}},$$

soit $c = 310 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les ordres de grandeur sont comparables.

□ 4 — Une onde progressive est une onde qui se propage sans se déformer. Dans le cas d'une onde progressive unidimensionnelle selon Ox , son expression peut se mettre sous la forme $y(x, t) = f(x - ct)$ dans le cas d'une propagation dans le sens des x croissants, et $y(x, t) = g(x + ct)$ dans le cas d'une propagation dans le sens des x décroissants.

Une onde stationnaire est une onde de la forme $y(x, t) = F(x)G(t)$; les dépendantes capitales et temporelles sont découplées (en notation réelle).

□ 5 — Les conditions aux limites imposent des nœuds de vibrations aux extrémités de la corde; une onde progressive ne peut satisfaire de telles conditions, contrairement à une onde stationnaire.

Nous alors choisir une **onde stationnaire** comme solution de l'équation d'onde.

□ 6 — Une onde de la forme

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$

est une **onde stationnaire harmonique**.

Écrivons que cette onde est solution de l'équation de d'Alembert :

$$-\omega^2 y(x, t) = -c^2 k^2 y(x, t).$$

On en déduit la relation de dispersion entre les pulsations spatiale et temporelle :

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

□ 7 — On a d'une part

$$y(0, t) = 0 = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos \psi.$$

On a donc $\cos \psi = 0$; on peut choisir $\psi = -\frac{\pi}{2}$, et

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx).$$

On a d'autre part

$$y(L, t) = 0 = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL)$$

d'où $\sin(kL) = 0$.

On ne peut observer que les modes propres tels que

$$k_n L = n\pi = \frac{\omega_n}{c} L = \frac{2\pi f_n}{c} L.$$

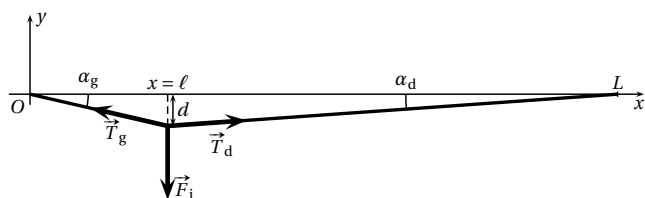
La fréquence doit donc prendre l'une des valeurs de la forme

$$f_n = n f_1 \quad \text{avec} \quad f_1 = \frac{c}{2L}.$$

□ 8 — La fréquence f_1 détermine la hauteur de la note émise. Elle dépend :

- de la tension T , ce que l'on utilise pour accorder la guitare en modifiant la tension des cordes en tournant le rouleur à l'aide de la clef;
- de la masse linéique μ , ce que l'on utilise pour que les six cordes, de longueurs équivalentes, émettent des notes de plus en plus aiguës au fur et à mesure que μ diminue, quand le tirant devient plus faible;
- de la longueur L , ce que l'on utilise pour pouvoir mettre plusieurs notes avec une corde, en modifiant sa longueur en plaçant le doigt sur la corde; l'extrémité fixe est alors le frette voisin sur lequel la corde repose.

□ 9 — Le joueur doit compenser les forces de tension s'exerçant sur le point où la corde est pincée.



Comme $d \ll \ell$, on a

$$\tan \alpha_g \approx \alpha_g = \frac{d}{\ell} \quad \text{et} \quad \tan \alpha_d \approx \alpha_d = \frac{d}{L - \ell}.$$

La projection de la condition d'équilibre

$$\vec{F}_j + \vec{T}_g + \vec{T}_d = \vec{0}$$

selon Oy s'écrit

$$F_j = T \sin \alpha_g + T \sin \alpha_d.$$

En linéarisant les sinus, on obtient

$$F_j = T \left(\frac{d}{\ell} + \frac{d}{L - \ell} \right)$$

soit

$$F_j = T \frac{Ld}{\ell(L - \ell)}.$$

□ 10 — Sachant $L = 65$ cm, on estime sur la photographie la distance entre le sillet du chevalet et le centre de la rosace $\ell = 17$ cm.

La corde de *mi* aigu correspond à la fréquence $f_1 = 329,6$ Hz.

Un tirant de 30 correspond à un diamètre de corde $D = \frac{30}{40} = 0,75$ mm; la masse linéique de la corde est donc

$$\mu = \rho \pi \frac{D^2}{4} = 1240 \pi \frac{(0,75 \times 10^{-3})^2}{4} = 5,5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

D'après la relation

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

on obtient $T = 4\mu L^2 f_1^2 = 1,0 \times 10^2$ N.

On calcule alors $F_j = 9,6$ N.

C'est une force assez élevée : elle revient à soulever une masse de 1 kg avec le doigt!

□ 11 — Quand elle est tirée, la corde a une longueur

$$\begin{aligned} L' &= \sqrt{\ell^2 + d^2} + \sqrt{(L - \ell)^2 + d^2} \\ &= \ell \sqrt{1 + \frac{d^2}{\ell^2}} + (L - \ell) \sqrt{1 + \frac{d^2}{(L - \ell)^2}} \\ &\approx \ell \left[1 + \frac{d^2}{2\ell^2} \right] + (L - \ell) \left[1 + \frac{d^2}{2(L - \ell)^2} \right] = L + \frac{d^2 L}{2\ell(L - \ell)}. \end{aligned}$$

L'allongement $\Delta L = L' - L$ est dû à l'augmentation de tension ΔT . Par définition du module d'Young :

$$\frac{\Delta T}{S} = E \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{d^2}{2\ell(L - \ell)}.$$

On a $\frac{\Delta L}{L} = E \frac{d^2}{2\ell(L - \ell)} = 9 \times 10^{-4}$. La section de la corde

étant donnée par $S = \pi \frac{D^2}{4}$ avec $D = 0,75$ mm. On en déduit

$$\Delta T = \frac{\pi D^2}{4} E \frac{d^2}{2\ell(L - \ell)} = \frac{\pi (0,75 \times 10^{-3})^2}{4} 3 \times 10^9 \times 9 \times 10^{-4}$$

soit $\Delta T \approx 1,2$ N.

On a $\Delta T \ll T$: **on peut considérer que la tension de la corde est inchangée.**

□ 12 — La force par unité de section s'exerçant sur la corde est

$$\frac{T}{\pi D^2/4} = \frac{1,0 \times 10^2 \times 4}{\pi (0,75 \times 10^{-3})^2} = 226 \text{ MPa}.$$

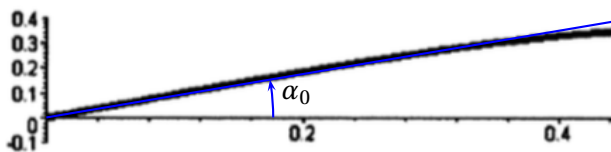
Cette valeur est bien supérieure à la limite d'élasticité de 70 MPa : une corde de guitare se déforme donc de manière irréversible quand elle est tendue sur l'instrument.

□ 13 — L'onde n'est ni progressive, si stationnaire. Son évolution comporte toutefois une similitude avec une onde stationnaire car elle possède deux nœuds de vibration à ses extrémités. Elle comporte aussi une similitude avec une onde progressive, car on peut observer une propagation de la déformation de la gauche vers la droite.

□ 14 — La force transversale est donnée par

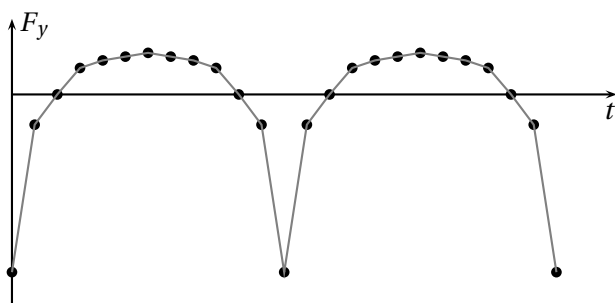
$$F_y = T \sin \alpha_0 \approx T \alpha_0$$

où $\alpha_0 \ll 1$ est l'angle que fait la tangente à la corde à l'origine, que l'on peut estimer graphiquement :



On déduit des graphes les valeurs successives de α_0 : $-4,7^\circ$; $-0,8^\circ$; 0° ; $0,7^\circ$; 1° ; $1,1^\circ$.

Ces valeurs correspondent à une demi-période; la déformation suivant l'évolution inverse pendant la seconde demi-période, on peut tracer l'allure de l'évolution de F_y . Sur deux périodes, on obtient :



□ 15 — On peut déterminer la fréquence de la note à partir du spectre : pour plus de précision, on peut relever la 6^e harmonique, de fréquence $6f_1 = 481$ Hz, d'où $f_1 = 80,2$ Hz.

La fréquence de la note juste est $f_1^o = 82,4$ Hz, ce qui fait un écart relatif de 2×10^{-2} , bien supérieur à la valeur admise de 4×10^{-3} : la guitare n'est pas accordée pour cette corde.

On aurait aussi pu utiliser la courbe donnant l'évolution temporelle : la mesure de 3 périodes donne 37,4 ms, d'où une fréquence $f_1 = 80,3$ ms. On arrive à la même conclusion.

□ 16 — La tension $V(t)$ présente un pic assez prononcé par période, comme la courbe $F_y(t)$: le microphone enregistre le son émis par la table d'harmonie de la guitare qui est excitée par la force $F_y(t)$ exercée par la corde. Cependant, $V(t)$ n'est pas simplement proportionnelle à $F_y(t)$: la réponse de la table d'harmonie n'est pas linéaire, elle possède des modes propres qui conduisent à un phénomène de résonance lorsque la fréquence du son correspond à un de ces modes.

Il faudrait prendre en compte les modes de vibration de la table d'harmonie ainsi que la courbe de réponse fréquentielle du microphone.

□ 17 — Sur la photo de la guitare, on peut estimer la longueur de la corde lorsque l'on appuie sur la 5^e frette :

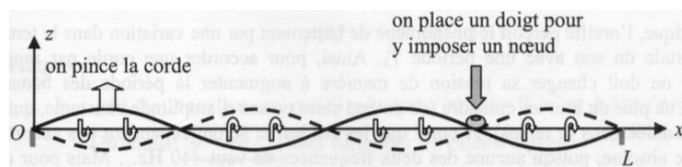
$L_5 \approx 49$ cm. La longueur L correspondant à la fréquence $f = 82,4$ Hz, la fréquence émise vaut ¹

$$f_5 = \frac{L}{L_5} f \approx 109 \text{ Hz.}$$

Cette valeur est très proche de la fréquence $f = 110,0$ Hz du la_1 . La corde la_1 entre alors en résonance sous l'effet de l'excitation de la corde pincée.

Le la est distant de 5 demi-tons du mi ; appuyer sur la 5^e frette de la corde de mi revient à jouer la note la . Il est donc normal que la fréquence estimée correspond justement à celle du la !

□ 18 — Lorsque l'on met un doigt sur la corde sans appuyer trop fort, on ne change pas sa longueur totale, mais on impose un nœud de vibration à l'endroit où l'on place le doigt. D'après la photographie, la 5^e frette est située à une distance de 16 cm du sillet de tête, ce qui correspond au quart de la longueur totale de la corde. Le mode propre de plus basse fréquence présentant un nœud à cet endroit est donc l'harmonique de rang 4 :



La fréquence de la note correspondante, quand la guitare est accordée, est $f_4 = 4f_1 = 4 \times 110,0$ soit $f_4 = 440,0$ Hz.

De même, la 7^e frette est située à une distance de 21 cm du sillet de tête, ce qui correspond au tiers de la longueur totale de la corde. Le mode propre de plus basse fréquence présentant un nœud de vibration à cet endroit est donc l'harmonique de rang 3, de fréquence $f'_4 = 3f'_1 = 3 \times 146,8$ soit $f'_3 = 440,4$ Hz.

Ces fréquences sont très proches. Si on règle la corde de $ré_2$ avec cette méthode à partir de la corde de la_1 , la fréquence du 3^e harmonique sera $\frac{440}{3}$ Hz soit 146,7 Hz au lieu de 146,8 Hz. L'écart relatif est de 7×10^{-4} , inférieur à 4×10^{-3} . On peut considérer que cette méthode est efficace pour accorder la guitare.

□ 19 — Le premier graphe fait apparaître un phénomène de **batttements**, caractéristique de la présence de deux fréquences proches captées par le microphone.

Le second graphe fait effectivement apparaître la présence de deux fréquences séparées de $\Delta f = 5$ Hz.

Quand on ajoute deux signaux sinusoïdaux de fréquences voisines f_1 et f_2 , l'amplitude fait apparaître un phénomène de batttements : elle est maximale quand les deux signaux sont en phase, et minimale quand les deux signaux sont en opposition de phase.

Soient $u_1(t) = U_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = U_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$ ces signaux. Leur déphasage vaut

$$\Delta\Phi = 2\pi(f_2 - f_1)t + \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\Delta f t + \varphi_2 - \varphi_1.$$

1. À tension et masse linéique fixées, la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.

Considérons les deux signaux en phase à un instant t_0 :

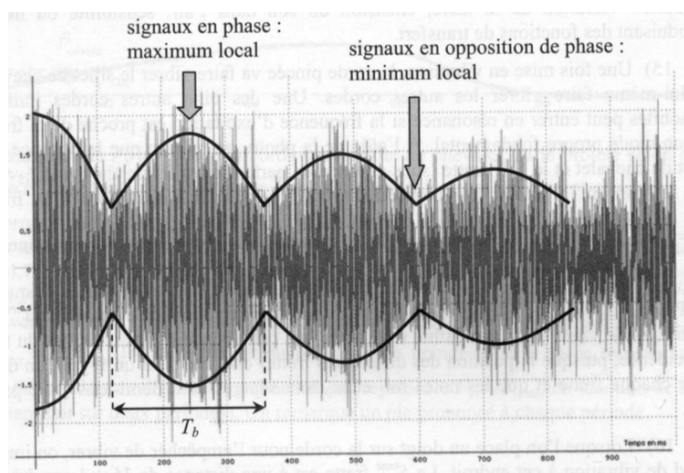
$$2\pi\Delta f t_0 + \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi.$$

Les signaux sont ensuite en opposition de phase à l'instant $t_0 + \tau$ tel que

$$2\pi\Delta f t_0 + \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi + \frac{1}{2}.$$

On en déduit $\Delta f \cdot \tau = \frac{1}{2}$. La période des battements vaut

$$T_b = 2\tau, \text{ soit } T_b = \frac{1}{\Delta f}.$$



On lit $T_b = 240$ Hz, ce qui donne $\Delta f = 4,2$ Hz, valeur compatible avec celle lue sur le spectre compte tenu des incertitudes de mesure.

L'oreille perçoit un son dont le volume « oscille » sur une période T_b . On modifie la tension de la corde à accorder de façon à ce que ces battements soient de plus en plus lents : on a $T_b = 0$ quand $f_1 = f_2$, c'est-à-dire quand les deux cordes sont accordées.

□ 20 — Le coefficient de dilatation linéique est défini par

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\theta}$$

où θ est la température.

Une diminution $\Delta\theta = -8^\circ\text{C}$ entraîne une diminution de la longueur de la corde, si elle était sans contrainte, de

$$\Delta L = \alpha L \Delta\theta = -8 \times 10^{-5} L.$$

On la corde est maintenue sur la manche de la guitare. Cette contraction se traduit alors par une augmentation ΔT de la tension de la corde donnée par

$$\frac{\Delta T}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

avec $S = \frac{\pi D^2}{4}$, soit

$$\Delta T = \frac{\pi D^2}{4} E \alpha \Delta\theta.$$

Pour une corde de tirant 30, on calcule $\Delta T = 0,11$ N. La tension valant $T \approx 100$ N, cela correspond à une variation relative de tension $\frac{\Delta T}{T} \approx 1 \times 10^{-3}$.

La fréquence est donnée par

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Par différentielle logarithmique, on en déduit

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} \approx 5,5 \times 10^{-4}.$$

Cette valeur est inférieure au seuil 4×10^{-3} : la variation de la fréquence n'est pas audible, et le désaccordage de la guitare n'est pas dû à la contraction thermique des cordes.

Le coefficient de dilatation thermique du bois étant plus fiable que celui du nylon, la contraction thermique de la guitare ne peut expliquer son désaccordage.

En revanche, le bois est très sensible à l'humidité : c'est la variation du taux d'humidité qui peut expliquer le désaccordage.

On aurait pu affiner l'étude précédente en prenant en compte la contraction thermique du manche de la guitare, qui « compense » en partie celle de la corde. La variation de la tension est alors donnée par

$$\Delta T = \frac{\pi D^2}{4} E (\alpha_{\text{nylon}} - \alpha_{\text{bois}}) \Delta\theta$$

La valeur est encore plus faible, ce qui se traduit par une variation de fréquence encore plus faible.