

DM n° 4

Phénomènes de transport — solution

Étude de la thermoélectricité : phénomènes de transport couplés — D'après Centrale MP 2005

1 — Effet Joule

1. Loi de Fourier : $\vec{J}_q(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$, où λ est la conductivité thermique du milieu.

2. Considérons comme système la portion de conducteur comprise entre x et $x + dx$. En régime stationnaire, le bilan d'énergie s'écrit

$$0 = J_q(x)\Sigma dt - J_q(x+dx)\Sigma dt + \delta RI^2 dt,$$

où δR est la résistance électrique de la portion de conducteur.

En notant ρ la résistivité électrique du milieu, la résistance s'écrit, en prenant en compte l'énergie reçue par effet Joule,

$$\delta R = \frac{\rho dx}{\Sigma}.$$

La résistance totale du barreau étant donnée par $R = \frac{\rho L}{\Sigma}$, on peut écrire $\delta R = R \frac{dx}{L}$.

Le bilan s'écrit alors

$$0 = -\frac{dJ_q}{dx} \Sigma dx + RI^2 \frac{dx}{L}.$$

La loi de Fourier s'écrivant $J_q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$, on en déduit l'équation différentielle

$$0 = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} \Sigma + \frac{R}{L} I^2.$$

3. On a

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{RI^2}{\lambda \Sigma L},$$

d'où

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{RI^2}{\lambda \Sigma L} x + A \quad \text{et} \quad T(x) = -\frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} x^2 + Ax + B,$$

où A et B sont deux constantes à déterminer à partir des conditions aux frontières.

On a d'une part

$$T(0) = T_c = B.$$

D'autre part

$$T(L) = T_f = B.$$

d'où

$$A = \frac{T_f - T_c}{L} + \frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} L.$$

On a donc

$$T(x) = -\frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} x^2 + \frac{T_f - T_c}{L} x + \frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} Lx + T_c.$$

La température dans le barreau s'écrit

$$T(x) = T_c - \frac{T_c - T_f}{L} x + \frac{RI^2}{2\lambda \Sigma L} x(L - x).$$

4. Le vecteur densité de courant thermique est donnée par

$$J_q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda(T_c - T_f)}{L} - \frac{RI^2}{2\Sigma} + \frac{RI^2}{\Sigma} \frac{x}{L}.$$

La puissance thermique reçue de la part de la source chaude, en $x = 0$, est donnée par

$$\mathcal{P}_c = J_q(0)\Sigma,$$

soit

$$\mathcal{P}_c = \frac{\lambda \Sigma}{L} (T_c - T_f) - \frac{RI^2}{2}.$$

Compte tenue de l'orientation, la puissance thermique reçue de la part de la source froide en $x = L$ est donnée par

$$\mathcal{P}_f = -J_q(L)\Sigma,$$

soit

$$\mathcal{P}_f = -\frac{\lambda \Sigma}{L} (T_c - T_f) - \frac{RI^2}{2}.$$

On calcule

$$\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_f = -RI^2.$$

On retrouve le bilan de puissance appliqué au barreau en régime stationnaire :

$$0 = \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_J$$

où $\mathcal{P}_J = RI^2$ est la puissance reçue par effet Joule.

2 — Forces thermodynamiques

1 Conduction thermique pure

5. Le bilan d'énergie appliqué à la portion de conducteur comprise entre x et $x + dx$ s'écrit, en régime stationnaire

$$0 = J_q(x)\Sigma dt - J_q(x+dx)\Sigma dt = -\frac{dJ_q}{dx} \Sigma dx dt.$$

On a donc $\frac{dJ_q}{dx} = 0$: **la densité de courant thermique J_q est uniforme dans le barreau.**

6. Le transfert thermique à travers l'interface à l'abscisse x , à la température $T(x)$, s'accompagne d'une entropie reçue $\frac{\delta Q_{\text{reçu}}(x)}{T(x)}$; de même l'entropie reçue à travers la section d'abscisse $x + dx$ à la température $T(x + dx)$ est $\frac{\delta Q_{\text{reçu}}(x + dx)}{T(x + dx)}$. Finalement pour la tranche considérée,

$$\delta S_e = \frac{\delta Q_{\text{reçu}}(x)}{T(x)} + \frac{\delta Q_{\text{reçu}}(x + dx)}{T(x + dx)}.$$

Comme

$$\delta Q_{\text{reçu}}(x) = J_q(x) \Sigma dt = J_q \Sigma dt$$

et

$$\delta Q_{\text{reçu}}(x + dx) = -J_q(x + dx) \Sigma dt = -J_q \Sigma dt,$$

On a

$$\delta S_e = \left[\frac{J_q}{T(x)} - \frac{J_q}{T(x + dx)} \right] \Sigma dt.$$

7. Le bilan d'entropie pour la tranche comprise entre x et $x + dx$ s'écrit

$$dS = \delta S_e + \delta S_c.$$

En régime stationnaire, $dS = S(t + dt) - S(t) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \delta S_c = -\delta S_e &= J_q \left[\frac{1}{T(x + dx)} - \frac{1}{T(x)} \right] \Sigma dt \\ &= J_q \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T} \right) \Sigma dx dt. \end{aligned}$$

Le volume de la tranche étant $d\tau = \Sigma dx$, l'entropie créée par unité de temps et de volume est donnée par

$$\sigma = \frac{\delta S_c}{\Sigma dx dt} = J_q \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T} \right).$$

Dans le cas unidimensionnel, on a $\vec{J}_q = J_q \vec{e}_x$ et $T(M) = T(x)$, soit $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T} \right) \vec{e}_x$. On peut donc écrire

$$\sigma = J_q \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T} \right) = \vec{J}_q \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T} \right).$$

8. On a

$$\sigma = J_q \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{J_q}{T^2} \frac{dT}{dx} \quad \text{avec} \quad J_q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

soit

$$\sigma = \frac{\lambda}{T^2(x)} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2.$$

► On remarque que $\sigma > 0$ si la température n'est pas uniforme, ce qui traduit le caractère irréversible de la conduction thermique.

Comme J_q est uniforme le profil de température est affine dans le barreau, et

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T(L) - T(0)}{L}.$$

La température au milieu du barreau est donnée par

$$T(L/2) = \frac{T(L) + T(0)}{2}.$$

On a donc

$$\sigma = \frac{4\lambda}{L^2} \left(\frac{T(L) - T(0)}{2} \right)^2.$$

On calcule $\sigma = 200 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \text{m}^{-3}$.

► On peut écrire $\sigma = 200 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \text{m}^{-3}$.

2 Conduction électrique pure

9. En régime stationnaire, la conservation de la charge électrique s'écrit

$$\text{div } \vec{J}_e = 0 = \frac{dJ_e}{dx}.$$

Le vecteur densité de courant $\vec{J}_e$ est donc uniforme dans le conducteur.

10. La puissance volumique cédée par le champ électrique à la matière valant $\vec{J}_e \cdot \vec{E}$, la tranche considérée reçoit la puissance

$$\delta \mathcal{P}_e = \vec{J}_e \cdot \vec{E} \Sigma dx.$$

Le bilan enthalpique en régime stationnaire pour cette tranche s'écrit

$$0 = \delta W + \delta Q$$

où le travail reçu par la force électrique est donné par $\delta W = \mathcal{P}_e dt$. On a donc

$$\delta Q = -\vec{J}_e \cdot \vec{E} \Sigma dx dt.$$

L'entropie reçue est alors donnée par

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T} = -\frac{\vec{J}_e \cdot \vec{E}}{T} \Sigma dx dt.$$

Le bilan d'entropie $0 = \delta S_e + \delta S_c$ en régime stationnaire conduit à

$$\delta S_c = \sigma \Sigma dx dt = \frac{\vec{J}_e \cdot \vec{E}}{T} \Sigma dx dt.$$

On en déduit le taux volumique de création d'entropie :

$$\sigma = \frac{\vec{J}_e \cdot \vec{E}}{T}.$$

11. Avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, l'expression précédente s'écrit

$$\sigma = -\frac{\vec{J}_e \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V}{T}.$$

On peut donc écrire

$$\sigma = \vec{J}_e \cdot \vec{X}_e \quad \text{avec} \quad \vec{X}_e = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}$$

12. La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{J}_e = \gamma \vec{E}$, d'où

$$\sigma = \frac{\vec{J}_e \cdot \vec{E}}{T} = \frac{J_e^2}{\gamma T}.$$

L'intensité étant donnée par $I = J_e \Sigma$, on a

$$\sigma = \frac{I^2}{\gamma T \Sigma^2}.$$

On calcule $\sigma = 0,58 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$.

3 Forces thermodynamiques

13. Récapitulons les résultats précédents.

Force thermodynamique pour la conduction thermique seule :

$$\vec{X}_q = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

Force thermodynamique pour la conduction électrique seule :

$$\vec{X}_e = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}.$$

14. **Équilibre thermodynamique : conduction thermique seule**

On a $\vec{J}_q = \vec{0}$. D'après la loi de Fourier, $\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$, donc $\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$. On en déduit

$$\vec{X}_q = -\frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}.$$

Équilibre thermodynamique : conduction électrique seule

On a $\vec{J}_e = \vec{0}$. D'après la loi d'Ohm, $\vec{J}_e = \gamma \vec{E}$, donc $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$. On en déduit

$$\vec{X}_e = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T} = \vec{0}.$$

À l'équilibre thermodynamique, les forces thermodynamiques sont nulles.

3 — Phénomènes thermoélectriques couplés

1 Théorie de la réponse linéaire de Onsager

15. La densité de courant électrique vérifie l'équation

$$\vec{J}_e = -\frac{L_{eq}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T - L_{ee} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}. \quad (1)$$

La température étant uniforme, $\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$. On en déduit

$$\vec{J}_e = -L_{ee} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}.$$

On retrouve donc la loi d'Ohm locale

$$\vec{J}_e = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$$

avec $\gamma = \frac{L_{ee}}{T}$.

16. Le vecteur densité de courant thermique vérifie l'équation

$$\vec{J}_q = -\frac{L_{qq}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T - L_{qe} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}. \quad (2)$$

Si aucun courant électrique ne circule, on a $\vec{J}_e = \vec{0}$ et l'équation (1) s'écrit

$$\vec{0} = -\frac{L_{eq}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T - L_{ee} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T},$$

d'où

$$-\frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T} = \frac{L_{eq}}{L_{ee} T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

L'équation (2) s'écrit alors

$$\vec{J}_q = -\frac{L_{qq}}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T + \frac{L_{qe}}{L_{ee} T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

En identifiant avec $\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ on en déduit

$$\lambda = \frac{1}{T^2} \left(L_{qq} - \frac{L_{qe}^2}{L_{ee}} \right).$$

Le gradient de température entraîne l'existence dans le conducteur d'un champ électrique donné par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{TL_{eq}}{L_{ee} T^2} \overrightarrow{\text{grad}} T,$$

soit

$$\vec{E} = \varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{L_{qe}}{TL_{ee}}.$$

17. Nous pouvons exprimer les coefficients phénoménologiques en fonction des caractéristiques du milieu.

On a montré à la question 15

$$L_{ee} = \gamma T.$$

D'après la question précédente, on a

$$L_{qe} = \varepsilon \gamma T^2.$$

De l'expression de λ établie à la question précédente on peut déduire

$$L_{qq} = \lambda T^2 + \frac{L_{qe}^2}{L_{ee}} = \lambda T^2 + \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 T^4}{\gamma T}$$

soit

$$L_{qq} = \lambda T^2 + \varepsilon^2 \gamma T^3.$$

On en déduit

$$\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T + \varepsilon T \left[-\varepsilon \gamma \overrightarrow{\text{grad}} T - \gamma \overrightarrow{\text{grad}} V \right]$$

et

$$\vec{J}_e = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V - \varepsilon \gamma \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

18. D'après les relations précédentes, on a

$$\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T + \varepsilon T \vec{J}_e.$$

La loi de Fourier n'est valable qu'en l'absence de courant électrique. Le terme $\varepsilon T \vec{J}_e$ traduit un transfert thermique dans le sens du courant électrique si $\varepsilon > 0$ et dans le sens contraire si $\varepsilon < 0$.

2 Effet Seebeck : mesure de température

19. Un **mélange eau-glace** permet de réaliser une source idéale de chaleur à la température de 0 °C.

20. Si le voltmètre est de résistance infinie, l'intensité électrique est nulle dans le circuit, soit $\vec{J}_e = \vec{0}$.

De la relation précédente on déduit alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = -\varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

On peut donc écrire

$$\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = -\varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot d\vec{\ell}$$

d'où

$$dV = -\varepsilon dT.$$

On peut décomposer le calcul de la différence de potentiel :

$$V_M - V_N = \int_N^{j_2} dV + \int_{j_2}^j dV + \int_j^{j_1} dV + \int_{j_1}^M dV.$$

On utilise la relation $dV = -\varepsilon dT$ en utilisant le coefficient ε relatif au métal constituant chaque segment :

$$\begin{aligned} V_M - V_N &= - \int_{T_a}^{T_{\text{réf}}} \varepsilon_{\text{Cu}} dT - \int_{T_{\text{réf}}}^{T_e} \varepsilon_B dT - \int_{T_e}^{T_{\text{réf}}} \varepsilon_A dT \\ &\quad - \int_{T_{\text{réf}}}^{T_a} \varepsilon_{\text{Cu}} dT \\ &= - \int_{T_{\text{réf}}}^{T_e} \varepsilon_B dT - \int_{T_e}^{T_{\text{réf}}} \varepsilon_A dT, \end{aligned}$$

soit

$$e_{AB} = V_M - V_N = \int_{T_{\text{réf}}}^{T_c} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) dT.$$

► Il faut utiliser deux conducteurs de même nature (par exemple en cuivre) pour connecter l'appareil de mesure afin que $V_M - V_N$ ne dépende pas de la température ambiante T_a .

21. A priori, les coefficients ε_A et ε_B dépendent de la température; la loi $e_{AB}(T)$ n'est alors pas affine.

► Si ε_A et ε_B sont indépendants de T , on peut écrire $e_{AB}(T) = (\varepsilon_A - \varepsilon_B)(T - T_{\text{réf}})$.

22. En considérant que l'on puisse écrire

$$e_{AB}(T) = (\varepsilon_A - \varepsilon_B)(T - T_{\text{réf}}),$$

on calcule $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_A - \varepsilon_B$ pour les différentes températures.

T	450 °C	500 °C	550 °C
ε_{AB}	41,1 $\mu\text{V} \cdot \text{K}^{-1}$	41,3 $\mu\text{V} \cdot \text{K}^{-1}$	41,4 $\mu\text{V} \cdot \text{K}^{-1}$

La réponse n'est pas complètement affine. On peut prendre $\varepsilon_{AB} = 41,3 \mu\text{V} \cdot \text{K}^{-1}$.

23. On décompose le long des conducteurs :

$$V_M - V_N = \int_N^j dV + \int_j^M dV$$

soit

$$V_M - V_N = - \int_{T_f}^{T_c} \varepsilon_B dT - \int_{T_c}^{T_f} \varepsilon_A dT.$$

On a donc

$$V_M - V_N = \int_{T_f}^{T_c} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) dT, .$$

La tension mesurée dépend de T_c .

3 Effet Peltier

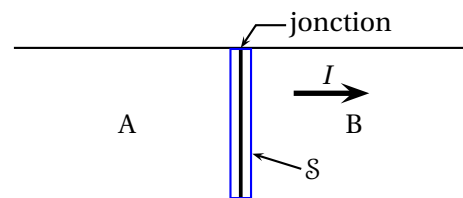
24. On a montré à la question 18 que

$$\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T + \varepsilon T \vec{J}_e.$$

Si la température est uniforme, on a $\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$, d'où

$$\vec{J}_q = \varepsilon T \vec{J}_e. \quad (3)$$

25. On considère comme système S une fine tranche englobant la jonction.



Le transfert thermique reçu par le système est

$$\delta Q = J_{Q,A} \Sigma dt - J_{Q,B} \Sigma dt,$$

soit compte tenu de la relation (3), on peut écrire

$$\delta Q = \varepsilon_A T J_e \Sigma dt - \varepsilon_B T J_e \Sigma dt = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) T I dt.$$

La puissance thermique $\mathcal{P}_P = \delta Q / dt$ reçue par la jonction est alors donnée par

$$\mathcal{P}_P = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) T I,$$

soit

$$\mathcal{P}_P = \Pi_{AB} I \quad \text{avec} \quad \Pi_{AB} = T \varepsilon_{AB}.$$

► La relation (3) indique d'un courant électrique entraîne l'apparition d'un courant thermique. Il est nécessaire d'avoir une jonction entre deux matériaux différents pour que cette effet se traduisent par le dégagement (algébrique) d'une puissance thermique : la densité de courant électrique $\vec{J}_e$ étant continue, c'est la variation de ε qui permet d'avoir une densité de courant thermique $\vec{J}_q$ discontinue d'après $\vec{J}_q = \varepsilon T \vec{J}_e$.

26. Considérons $I > 0$.

Si $\varepsilon_A > \varepsilon_B$ on a $\mathcal{P}_P > 0$ et la jonction absorbe de la chaleur.

Si $\varepsilon_A < \varepsilon_B$ on a $\mathcal{P}_P < 0$ et la jonction libère de la chaleur.

► Le comportement dépend du sens du courant. Si $I < 0$, on obtient le comportement inverse.