

DM n° 6 bis

Ondes

vibrations musicales (Centrale)

Ce problème aborde les vibrations mécaniques sources de l'émission sonore des claviers à percussion. Dans tout le problème, on néglige l'influence des forces de pesanteur.

Données et notations :

Masse volumique de l'air	$\rho_a = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Vitesse du son dans l'air	$c = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'air	$\eta = 1,85 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Viscosité dynamique de l'eau	$\eta_e = 1,00 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Masse volumique de l'acier	$\rho = 7,80 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young de l'acier	$E = 19,5 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Masse volumique du bronze	$\rho = 8,70 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young du bronze	$E = 1,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Masse volumique du bois de palissandre	$\rho = 740 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young du bois de palissandre	$E = 1,2 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Nous étudions certains instruments à percussion tels que le xylophone, le marimba ou le glockenspiel. Ils sont formés de lames parallélépipédiques de bois ou de métal. Chacune d'elle produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, un son de hauteur déterminée.

Partie 1 — Vibrations transversales d'une lame

En considérant les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L (figure 1), la matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation. Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + \xi(x, t)$ et est soumise, de la part de la matière située à droite, à une force $\vec{F} = F(x, t) \vec{u}_x$. On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta\ell$ la longueur d'une tige de section S , il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES \frac{\delta\ell}{\ell_0}$.

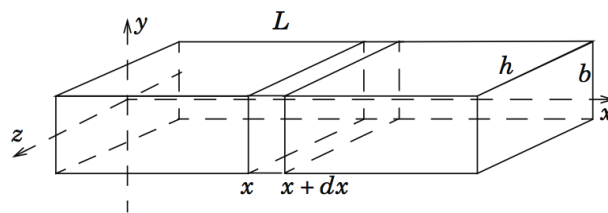


FIGURE 1 – Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

Dans les questions qui suivent, on analyse les petits mouvements transversaux de la lame (partie gauche de la figure 2). Les points situés au repos dans le plan médian de la lame, à l'abscisse x et à l'ordonnée $y = 0$, se trouvent à l'instant t du mouvement, à l'ordonnée $y(x, t)$. Dans le plan (Oxy) , ils sont alors représentés par une courbe formant avec l'horizontale un angle local $\alpha(x, t) \approx \frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ et de courbure $C(x, t) \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

On rappelle que $C = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dL}$, où R désigne le rayon de courbure et dL la longueur infinitésimale d'un élément de courbe.

Pour établir l'équation du mouvement, on adopte une double décomposition en éléments infinitésimaux (partie droite de la figure 2). D'une part, on analyse le mouvement et les déformations d'une portion de lame occupant les abscisses $[x, x + dx]$ et dont les faces forment entre elles l'angle $d\alpha$. D'autre part, cet élément peut être considéré comme un assemblage de couches d'ordonnées $y(x, t) + u$ et d'épaisseur du , avec $u \in [-b/2, b/2]$.

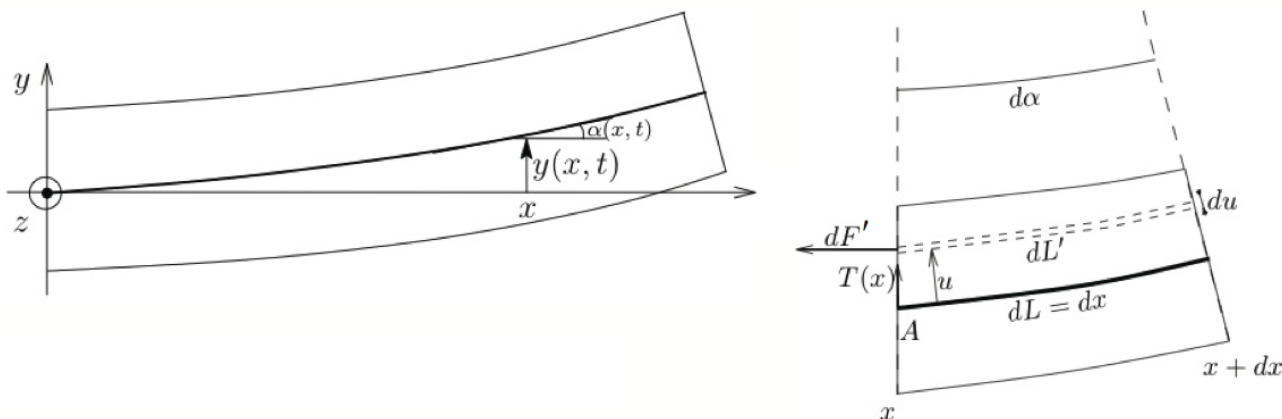


FIGURE 2 – Mouvements transversaux d'une lame

Q 1. En flexion, certaines couches se trouvent étirées et d'autres comprimées. On admet que la couche repérée par $u = 0$ conserve au cours du mouvement une longueur dx inchangée alors que les autres voient leur longueur passer de dx au repos à $dL' \neq dx$. Exprimer $\frac{dL' - dx}{dx}$ en fonction de u et C .

Q 2. Quelle est l'aire dS de la section transversale de la couche d'épaisseur du ? En déduire la force dF que cette couche étirée subit, puis celle dF' qu'elle exerce réciproquement sur la matière située à gauche.

Q 3. Vérifier la nullité de la résultante de ces forces sur la section entière de la lame.

Q 4. Calculer le moment $M(x)$ par rapport à l'axe $(A, \vec{u}_z)$ des forces exercées par le tronçon de longueur dx sur la matière située à sa gauche, où A désigne le point d'abscisse x tel que $u = 0$.

Q 5. Au travers d'une section de la lame s'exercent aussi des efforts transversaux : la partie de lame occupant les abscisses supérieures à x exerce sur celle se trouvant à sa gauche des efforts de résultante $\vec{T} \approx T(x, t) \vec{u}_y$. En admettant la relation

$$\frac{\partial M}{\partial x} \approx -T(x, t),$$

en déduire l'équation des mouvements transversaux sous la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_\ell^2 b^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Q 6. On envisage maintenant des solutions telles que $y(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$. Préciser l'équation différentielle dont $f(x)$ est solution.

Q 7. La fonction f s'exprime à l'aide de quatre constantes A , B , C et D sous la forme

$$f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + C \cosh(kx) + D \sinh(kx).$$

Donner, en la justifiant, la relation entre ω et k .

Q 8. Dans cette question, les deux extrémités de la barre, d'abscisses $x = 0$ et $x = L$, sont liées à des supports fixes par des charnières assurant des liaisons de type pivot parfait d'axes parallèles à $\vec{u}_z$. En déduire en fonction d'un entier n les valeurs k_n permises pour k puis les fréquences propres f_n .

Q 9. Pour vibrer correctement, les lames des instruments de percussion reposent sans fixation rigide sur un support. Leurs extrémités ne sont donc soumises à aucune contrainte assujettissant leur position. Exprimer ces conditions en faisant intervenir deux des quatre grandeurs T , M , y et α introduites plus haut. En déduire quatre équations portant sur A , B , C et D . Leur résolution, non demandée, conduit aux fréquences propres

$$f_n = \frac{\pi b}{16\sqrt{3}L^2} c_\ell u_n^2 \quad \text{avec} \quad u_1 = 3,01; \quad u_2 = 5,00; \quad u_n \approx 2n + 1.$$

Q 10. Expérimentalement, on a mesuré $f_2/f_1 = 2,71$, $f_3/f_1 = 5,15$, $f_4/f_1 = 8,43$ pour une lame de glockenspiel. Commenter ces valeurs. Calculer numériquement f_1 pour une lame d'épaisseur $b = 9,15$ mm et de longueur $L = 24,3$ cm correspondant à la note la plus grave de l'instrument.

Q 11. Les lames d'un marimba basse sont constituées de bois de palissandre d'épaisseur $b = 2,31$ cm. Quelle valeur faut-il donner à L pour atteindre $f_1 = 65$ Hz?

Q 12. Pour accorder un marimba, on entaille la partie inférieure de la lame de manière à lui donner la forme d'une voûte (figure 3). Qualitativement, cela a-t-il pour effet d'augmenter ou de diminuer la valeur L nécessaire pour obtenir une fréquence donnée? Le facteur de l'instrument ajuste aussi cette voûte de manière à obtenir $f_2/f_1 \approx 4$, ce qui produit un son plus harmonieux. Pourquoi ce second point est-il inutile sur un glockenspiel?

Partie 2 — Accord des résonateurs

Pour améliorer le rayonnement du son par le marimba, on place sous chaque lame un tube résonateur (figure 3). Ce tube cylindrique creux de diamètre D , d'axe (Oy) , présente une extrémité ouverte au voisinage de la lame (en $y = 0$) alors que l'autre, en $y = -H$, est rigidement fermée. On note en représentation complexe $p(y = 0, t) = p_0 e^{j\omega t}$ la pression de l'onde acoustique produite en $y = 0$ par la vibration de la lame.

On recherche la pression acoustique dans le tuyau sous la forme

$$p(y, t) = A e^{j(\omega t - ky)} + B e^{j(\omega t + ky)}.$$

Q 13. Rappeler sans démonstration la relation de dispersion des ondes acoustiques dans l'air.

Q 14. Écrire, dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation d'Euler reliant le champ des vitesses au gradient de pression.

Q 15. En déduire l'expression de la vitesse acoustique $v(y, t)$ en fonction des données de l'énoncé.

Q 16. Exprimer les constantes A et B en fonction des données du problème.

Q 17. Quelle est la plus petite valeur de H correspondant à une résonance du tuyau pour une fréquence f donnée?

Faire l'application numérique pour $f = f_1 = 65$ Hz. Y-a-t-il résonance de l'harmonique de rang 2 accordée sur $f_2 \approx 4f_1$?

Q 18. Sur les marimbas de concert, la valeur de H peut être modifiée en déplaçant un bouchon rigide à l'intérieur du tube résonateur. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif?

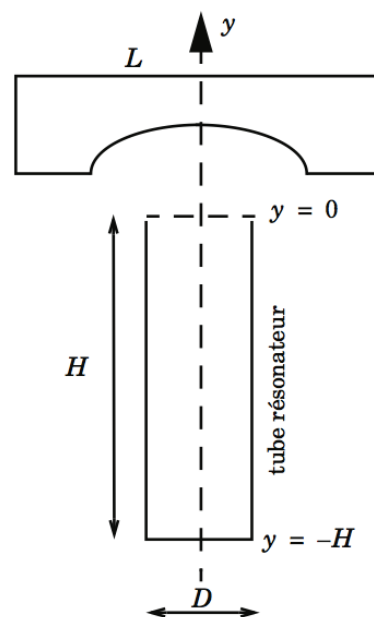


FIGURE 3 – Lame de marimba présentant une voûte et munie d'un tube résonateur

Partie 3 — Vibration d'une cymbale

Les cymbales sont des plateaux circulaires en métal que l'on frappe pour obtenir un son. Contrairement aux lames de clavier étudiées dans les questions précédentes, elles ne produisent pas un son de hauteur bien définie. Bien qu'une cymbale possède une forme incurvée, nous les assimilons à de fines plaques planes circulaires de rayon R et d'épaisseur b contenues au repos dans le plan (Oxz) .

Dans ce cadre, les vibrations transversales consécutives à l'excitation de la surface par un choc obéissent à une équation voisine de celle établie pour les vibrations transversales d'une lame :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_\ell^2 b^2}{12(1 - \sigma^2)} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2} \right) = 0 \quad \text{avec } \sigma = 0,34.$$

Q 19. On envisage la propagation d'une onde plane progressive du type

$$y(x, z, t) = y_0 \exp \left\{ i[\omega t - \vec{k} \cdot (x \vec{u}_x + z \vec{u}_z)] \right\}.$$

Établir la relation entre ω et $k = |\vec{k}|$. En déduire l'expression de la fréquence f en fonction de la longueur d'onde λ .

Q 20. Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de la longueur d'onde λ . La propagation est-elle dispersive?

Q 21. La figure 4 représente l'état vibratoire d'une cymbale de bronze à divers instants suivant une excitation ponctuelle. L'observation confirme-t-elle la réponse de la question précédente? Expliquer.

Q 22. On a signalé sur la figure 4 des déformations de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 6$ mm et $\lambda_2 = 12$ mm. En exploitant les images, déterminer $v_\varphi(\lambda_1)$ et $v_\varphi(\lambda_2)$. Comparer quantitativement ces deux valeurs et confronter le résultat à la prédiction théorique de l'avant dernière question. Sachant que la cymbale est en bronze, déterminer son épaisseur b .

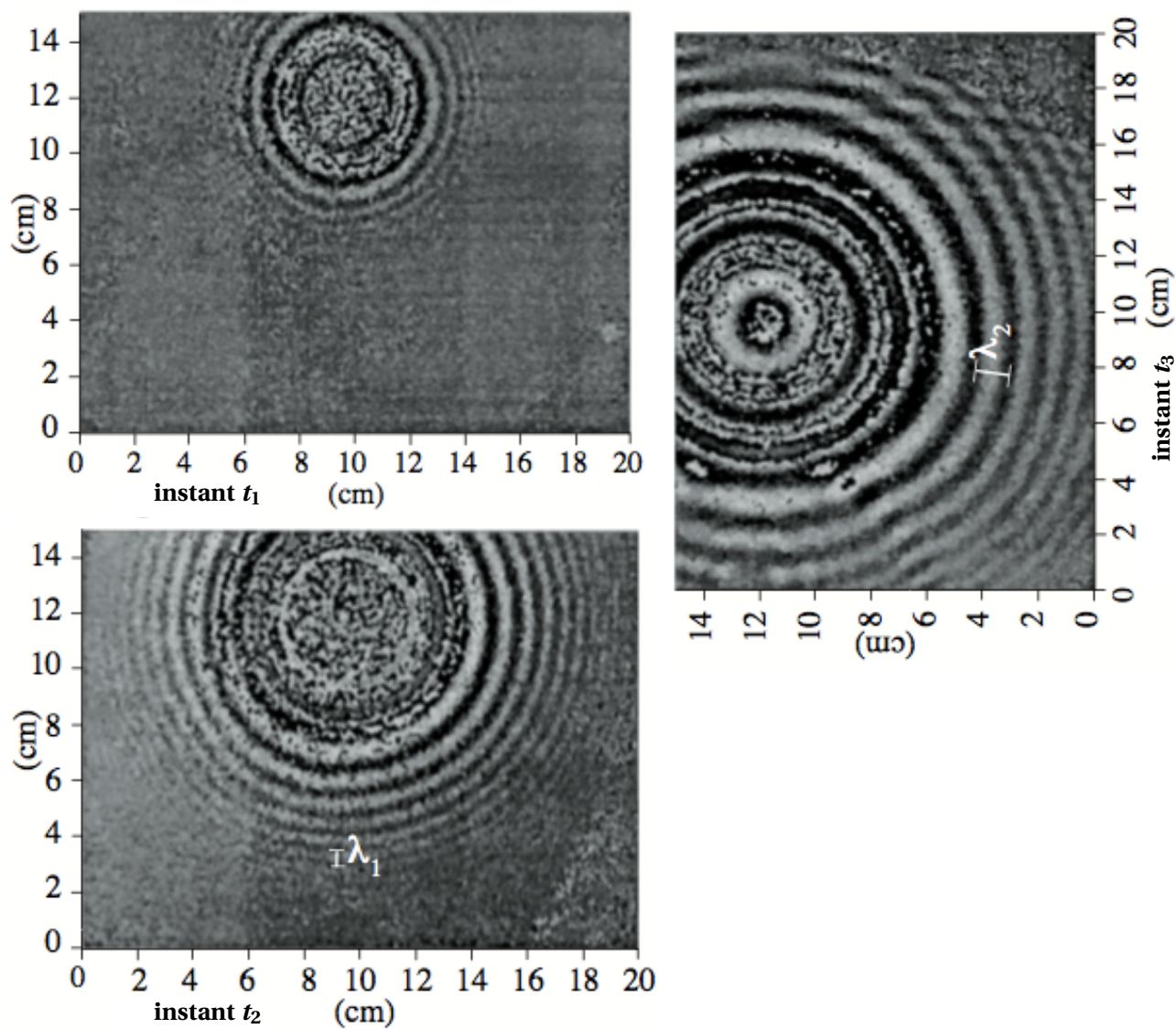


FIGURE 4 – État vibratoire d'une cymbale à trois instants suivant une excitation ponctuelle :
 $t_1 = 30 \mu\text{s}$, $t_2 = 60 \mu\text{s}$, $t_3 = 120 \mu\text{s}$