

Électromagnétisme

IV — Symétries du champ magnétique

Distribution de courant

Soit Σ une surface élémentaire orientée située en M . Si δQ est la charge traversant Σ pendant dt , l'intensité électrique I à travers cette surface est définie par

$$\delta Q = I dt.$$

- L'intensité s'exprime en ampère (A). On a $1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$.
- L'intensité électrique est une grandeur scalaire algébrique dont le signe dépend de l'orientation de la surface Σ .

Par définition du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M)$, l'intensité électrique est le flux de ce vecteur à travers la surface Σ :

$$I = \iint_{M \in \Sigma} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_M.$$

- Si le courant est dû à un déplacement de charge q identiques à la même vitesse $\vec{v}$ on a $\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$, où n est la densité volumique de porteurs de charge et ρ la densité volumique de charge correspondante.

Le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M)$ est un vecteur polaire.

Invariances d'une distribution de courant et champ magnétique

Invariance par translation

Une distribution de courant est **invariante par translation** d'axe Δ si elle reste inchangée par *toute* translation selon cet axe.

- Si Δ est l'axe Oz , les composantes de $\vec{j}(M)$ sont indépendantes de z .
- Une distribution invariante par translation selon Oz est nécessairement d'**extension spatiale infinie**¹ selon cet axe.

Si une distribution de courant est invariante par translation d'axe Δ , le champ magnétique créé est inchangé par toute translation selon Δ .

- Si Δ est l'axe Oz , les composantes de $\vec{B}(M)$ sont indépendantes de z .

Invariance par rotation

Une distribution de courant est **invariante par rotation** d'axe Δ si elle reste inchangée par *toute* rotation autour de cet axe.

- Si Δ est l'axe Oz , les composantes de $\vec{j}(M)$ sont indépendantes de θ en coordonnées cylindriques d'axe Oz .

Si une distribution de courant est invariante par rotation d'axe Δ , le champ magnétique créé est inchangé par toute rotation autour de Δ .

- Si Δ est l'axe Oz , les composantes de $\vec{B}(M)$ sont indépendantes de θ en coordonnées cylindriques d'axe Oz .

1. C'est une modélisation, qui revient à négliger les « effets de bord » ; une distribution de longueur L peut-être considérée comme infini si elle est vue d'une distance $r \ll L$.

Propriétés de symétrie du champ magnétostatique

Le champ magnétique $\vec{B}$ est un vecteur axial.

Les vecteurs axiaux suivent des règles de transformation particulières lors d'une symétrie par rapport à un plan Π . On note $\vec{U} = \vec{U}_{//} + \vec{U}_{\perp}$, où $\vec{U}_{//}$ est la composante du vecteur $\vec{U}$ parallèle au plan Π et $\vec{U}_{\perp}$ sa composante perpendiculaire au plan.

Règles de transformation d'un vecteur axial selon une symétrie plane :

$$\begin{cases} \vec{U}'_{//} = -\vec{U}_{//} \\ \vec{U}'_{\perp} = \vec{U}_{\perp} \end{cases} \quad (1)$$

Plan de symétrie d'une distribution de courant

Une distribution de courant admet un plan de symétrie Π si la distribution de courant obtenue par symétrie par rapport à Π lui est en tout point identique.

Le vecteur densité de courant étant un vecteur polaire, si $M' = \mathcal{S}_{\Pi}(M)$ on a alors

$$\begin{cases} \vec{j}_{//}(M') = \vec{j}_{//}(M) \\ \vec{j}_{\perp}(M') = -\vec{j}_{\perp}(M) \end{cases}$$

$\vec{B}(M)$ étant un vecteur axial, $\vec{B}(M')$ est identique au transformé de $\vec{B}(M)$ par symétrie plane, soit

$$\begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = -\vec{B}_{//}(M) \\ \vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) \end{cases}$$

Si $M \in \Pi$, on a donc $\vec{B}_{//}(M) = \vec{0}$.

En tout point M d'un plan de symétrie Π d'une distribution de courants, le champ magnétique créé est normal à ce plan : $\vec{B}_{//}(M) = \vec{0}$.

Plan d'antisymétrie d'une distribution de courant

Une distribution de courant admet un plan d'antisymétrie Π^* si la distribution de courant obtenue par symétrie par rapport à Π^* lui est en tout point opposée.

► La distribution est invariante par la transformation $-\text{Id} \circ \mathcal{S}_{\Pi^*}$.

Le vecteur densité de courant étant un vecteur polaire, si $M' = \mathcal{S}_{\Pi^*}(M)$ on a alors

$$\begin{cases} \vec{j}_{//}(M') = -\vec{j}_{//}(M) \\ \vec{j}_{\perp}(M') = \vec{j}_{\perp}(M) \end{cases}$$

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ étant un vecteur axial, $\vec{B}(M')$ est opposé au transformé de $\vec{B}(M)$ par symétrie plane, soit

$$\begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = \vec{B}_{//}(M) \\ \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \end{cases}$$

Si $M \in \Pi^*$, on a donc $\vec{B}_{\perp}(M) = \vec{0}$.

En tout point M d'un plan d'antisymétrie Π^* d'une distribution de courants, le champ magnétique créé est contenu dans ce plan : $\vec{B}(M) \perp \vec{0}$.