

Exercice corrigé

Ondes sonores

Réflexion d'une onde sonore sur une paroi élastique

1. Retrouver l'équation de propagation pour la surpression, dans l'air, dans le cadre de l'approximation acoustique. Quelle est la célérité des ondes?

Application en considérant l'air comme un gaz parfait diatomique, à 20 °C.

2. Quelle relation existe-t-il entre $v(x, t)$ et $p(x, t)$ pour une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des x croissants? Et décroissants?

3. On dispose du système suivant :



À l'arrivée sur le piston de masse M , calculer le coefficient de réflexion. On considérera l'existence d'une onde réfléchie et d'une onde transmise.

4. Peut-on annuler l'onde réfléchie? Comment?

Solution

1. C'est du cours. Il faut retrouver

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}.$$

Pour le gaz parfait, il faut retrouver

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}.$$

Dans le cas de l'air, on a $\gamma = 1,40$ (gaz diatomiques : N_2 et O_2), et $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On calcule

$$c = \sqrt{\frac{1,40 \times 8,31 \times 293}{29 \times 10^{-3}}} = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Encore du cours! On part de l'équation de la dynamique linéarisée

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Pour une OPPH dans le sens des x croissants, on a

$$p(x, t) = p_m \cos(\omega t - kx),$$

d'où

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -k p_m \sin(\omega t - kx)$$

qui s'intègre pour donner (avec $\omega = kc$)

$$v(x, t) = \frac{k}{\mu_0 \omega} p_m \cos(\omega t - kx) = \frac{p_m}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kx).$$

On a donc

$$v(x, t) = \frac{p(x, t)}{Z} \quad \text{avec} \quad Z = \mu_0 c.$$

Pour une OPPH dans le sens des x décroissants, on a

$$p(x, t) = p_m \cos(\omega t + kx),$$

Un calcul similaire conduit à

$$v(x, t) = -\frac{p(x, t)}{Z}.$$

3. Il est essentiel d'utiliser les notations complexes pour cette partie, la réflexion et la transmission s'accompagnant *a priori* d'un déphasage.

Onde incidente : $\underline{p}_i(x, t) = p_{im} e^{i(\omega t - kx)}$

Onde réfléchie : $\underline{p}_r(x, t) = p_{rm} e^{i(\omega t + kx)}$

Onde transmise : $\underline{p}_t(x, t) = p_{tm} e^{i(\omega t - kx)}$

L'onde de surpression est donc

$$\underline{p}(x, t) = \begin{cases} p_{im} e^{i(\omega t - kx)} + p_{rm} e^{i(\omega t + kx)} & \text{pour } x < 0 \\ p_t(x, t) = p_{tm} e^{i(\omega t - kx)} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Compte tenu de la question 2, on en déduit l'onde de vitesse

$$\underline{v}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{Z} (p_{im} e^{i(\omega t - kx)} - p_{rm} e^{i(\omega t + kx)}) & \text{pour } x < 0 \\ p_t(x, t) = \frac{1}{Z} p_{tm} e^{i(\omega t - kx)} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Le coefficient de réflexion est défini par

$$\underline{r} = \frac{p_r(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{p_{rm}}{p_{im}}.$$

Notons $X(t)$ la position du piston, en prenant $X = 0$ lorsque le ressort est au repos.

On écrit le principe fondamental de la dynamique au piston de surface S , c'est-à-dire en $x = 0$ au premier ordre (le déplacement du piston, dû au déplacement des particules d'air sous l'effet d'une onde acoustique, est un infiniment petit) :

$$Mi\omega \underline{V} = (p_{im} + p_{rm} - p_{tm})S - k\underline{X}$$

où la vitesse du piston a pour amplitude complexe $\underline{V}$, et sa position $\underline{X} = \frac{\underline{V}}{i\omega}$ (par intégration temporelle). On a donc

$$Mi\omega \underline{V} = (p_{im} + p_{rm} - p_{tm})S - \frac{k}{i\omega} \underline{V}. \quad (1)$$

On écrit la continuité de la vitesse de l'air au niveau du piston :

$$\underline{V} = \frac{p_{im} - p_{rm}}{Z} = \frac{p_{tm}}{Z}.$$

On a donc

$$p_{im} - p_{rm} = p_{tm}.$$

Avec la définition du coefficient de réflexion, on peut donc écrire

$$p_{rm} = \underline{r} p_{im} \quad \text{et} \quad p_{tm} = (1 - \underline{r}) p_{im}.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$(-M\omega^2 + k)\underline{V} = i\omega[1 + \underline{r} - (1 - \underline{r})]p_{im}S = 2i\omega \underline{r} p_{im}S.$$

Avec

$$\underline{V} = (1 - \underline{r}) \frac{p_{im}}{Z}$$

on obtient

$$(-M\omega^2 + k)(1 - \underline{r}) \frac{p_{im}}{Z} = 2i\omega \underline{r} p_{im}S$$

soit

$$k - M\omega^2 = \underline{r}(2i\omega ZS + k - M\omega^2).$$

On a donc

$$\underline{r} = \frac{k - M\omega^2}{k - M\omega^2 + 2i\omega ZS}.$$

4. On peut annuler l'onde réfléchie si la pulsation de l'onde acoustique est telle que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

➤ Elle est alors égale à la pulsation propre du système masse-ressort.