

Exercice corrigé

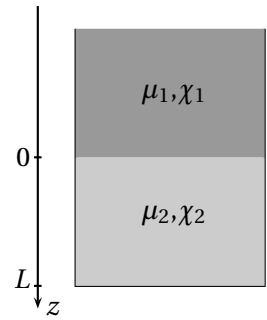
Ondes sonores

Onde acoustique dans deux liquides superposés

Un réservoir contient deux liquides non miscibles superposés, de masses volumiques μ_1 et μ_2 ($\mu_1 < \mu_2$) et de compressibilités adiabatiques χ_1 et χ_2 . On définit un axe vertical descendant Oz , l'origine étant prise à l'interface entre les deux liquides.

Le fond du réservoir, situé en $z = L$, est une paroi rigide.

Une onde acoustique harmonique plane $\underline{p}_1(z, t) = A_1 e^{i(\omega t - k_1 z)}$ se propage dans le liquide 1.



1. En notant $\underline{B}_1$, $\underline{A}_2$ et $\underline{B}_2$ les amplitudes respectives des ondes réfléchi dans le milieu 1, transmise et réfléchi dans le milieu 2, donner la forme des ondes de surpression correspondantes.

2. Écrire les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = L$.

En déduire le coefficient de réflexion en surpression r_p à l'interface. Quel est son module? Interpréter le résultat.

3. Exprimer la surpression sur le fond du récipient. Tracer son amplitude en fonction de $k_2 L$, par exemple dans le cas où l'impédance caractéristique du milieu 2 est double de celle du milieu 1.

Pour quelles valeurs de $k_2 L$ l'amplitude est-elle maximale? Quelle est alors sa valeur par rapport à celle de la surpression incidente?

Solution

1. Écrivons l'onde de surpression

$$\underline{p}(x, t) = \begin{cases} A_1 e^{i(\omega t - k_1 z)} + \underline{B}_1 e^{i(\omega t + k_1 z)} & \text{pour } z < 0 \text{ (milieu 1)} \\ \underline{A}_2 e^{i(\omega t - k_2 z)} + \underline{B}_2 e^{i(\omega t + k_2 z)} & \text{pour } 0 < z < L \text{ (milieu 2)} \end{cases}$$

2. On déduit l'expression de l'onde de vitesse à partir de celle de surpression :

$$\underline{v}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{Z_1} (A_1 e^{i(\omega t - k_1 z)} - \underline{B}_1 e^{i(\omega t + k_1 z)}) & \text{pour } z < 0 \text{ (milieu 1)} \\ \frac{1}{Z_2} (\underline{A}_2 e^{i(\omega t - k_2 z)} - \underline{B}_2 e^{i(\omega t + k_2 z)}) & \text{pour } 0 < z < L \text{ (milieu 2)} \end{cases}$$

avec $Z_1 = \mu_1 c_1$ et $Z_2 = \mu_2 c_2$, les célérités étant données par $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \chi_1}}$ et $c_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \chi_2}}$.

À l'interface entre les deux fluides ($z = 0$) on a continuité de la surpression, soit

$$A_1 + \underline{B}_1 = \underline{A}_2 + \underline{B}_2$$

et continuité de la vitesse, soit

$$\frac{A_1 - \underline{B}_1}{Z_1} = \frac{\underline{A}_2 - \underline{B}_2}{Z_2}.$$

Au fond du récipient ($z = L$), la vitesse est nulle (paroi solide), soit

$$\underline{A}_2 e^{-ik_2 L} - \underline{B}_2 e^{ik_2 L} = 0.$$

Le coefficient de réflexion en surpression à l'interface est défini par

$$r_p = \frac{\underline{p}(0, t)}{\underline{p}(0, r)} = \frac{\underline{B}_1}{A_1}.$$

D'après la condition au fond, on a

$$\underline{B}_2 = \underline{A}_2 e^{-2ik_2 L}.$$

La continuité de la surpression à l'interface s'écrit donc

$$A_1 + \underline{B}_1 = \underline{A}_2 \left(1 + e^{-2ik_2L} \right)$$

et la continuité de la vitesse

$$A_1 - \underline{B}_1 = \frac{Z_1}{Z_2} \underline{A}_2 \left(1 - e^{-2ik_2L} \right).$$

On a donc

$$\frac{A_1 - \underline{B}_1}{A_1 + \underline{B}_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{1 - e^{-2ik_2L}}{1 + e^{-2ik_2L}} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{e^{ik_2L} - e^{-ik_2L}}{e^{ik_2L} + e^{-ik_2L}} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{i \sin(k_2L)}{\cos(k_2L)} = i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L),$$

d'où

$$A_1 \left(1 - i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L) \right) = \underline{B}_1 \left(1 + i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L) \right).$$

On en déduit

$$\underline{r}_p = \frac{1 - i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L)}{1 + i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L)}.$$

Le dénominateur et le numérateur de cette expression étant deux complexes conjugués, ils ont même module, et

$|\underline{r}_p| = 1$. Le fond étant une paroi rigide, il réfléchit totalement l'onde incidente. Comme il n'y a pas dissipation à l'interface entre les fluides, l'onde réfléchie dans le milieu 1 a donc même amplitude que l'onde incidente.

3. L'onde de surpression dans le fond vaut

$$\underline{p}(L, t) = \left(\underline{A}_2 e^{-ik_2L} + \underline{B}_2 e^{-ik_2L} \right) e^{i\omega t} = \underline{A}_2 \left(e^{-ik_2L} + e^{-ik_2L} \right) e^{i\omega t} = 2\underline{A}_2 e^{i(\omega t - k_2L)}.$$

La continuité de la surpression à l'interface peut s'écrire

$$\underline{A}_1 (1 + \underline{r}_p) = \underline{A}_2 \left(1 + e^{-2ik_2L} \right).$$

On en déduit

$$\underline{p}(L, t) = 2A_1 \frac{1 + \underline{r}_p}{1 + e^{-2ik_2L}} e^{i(\omega t - k_2L)}.$$

L'amplitude complexe vaut

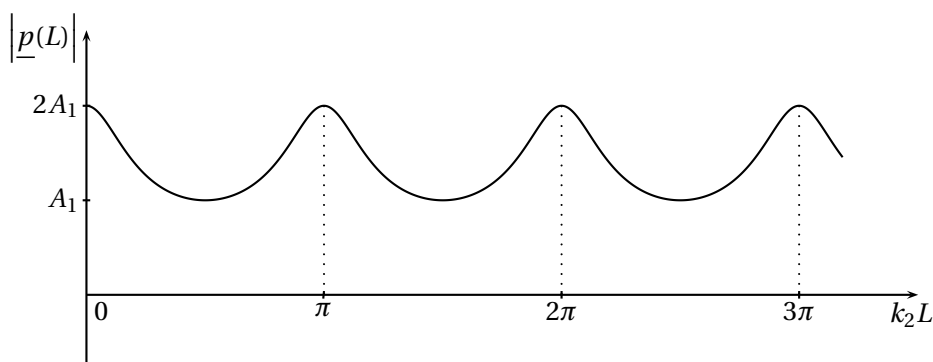
$$\begin{aligned} \underline{p}(L) &= 2A_1 \frac{1 + \frac{1 - i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L)}{1 + i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L)}}{1 + e^{-2ik_2L}} e^{-ik_2L} = 2A_1 \frac{2}{\left[1 + i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L) \right]} \frac{1}{\left[e^{ik_2L} + e^{-ik_2L} \right]} = \frac{4A_1}{2 \cos(k_2L) \left[1 + i \frac{Z_1}{Z_2} \tan(k_2L) \right]} \\ &= \frac{2A_1}{\cos(k_2L) + i \frac{Z_1}{Z_2} \sin(k_2L)}. \end{aligned}$$

Le module de l'amplitude dans le fond du récipient vaut donc

$$|\underline{p}(L)| = \frac{2A_1}{\sqrt{\cos^2(k_2L) + \frac{Z_1^2}{Z_2^2} \sin^2(k_2L)}}.$$

Dans le cas où $Z_2 = 2Z_1$, on a

$$|\underline{p}(L)| = \frac{2A_1}{\sqrt{\cos^2(k_2L) + 4 \sin^2(k_2L)}}$$



Posons $f(x) = \cos^2 x + 4 \sin^2 x$. On a $f'(x) = -2 \cos x \sin x + 8 \cos x \sin x = 6 \cos x \sin x$. On a donc $f'(x) = 0$ pour $\cos x = 0$ ou $\sin x = 0$, c'est-à-dire pour $x = n\frac{\pi}{2}$. La fonction f présente une alternance de maxima et minima séparés de $\pi/2$. La distance entre deux minima successifs de f — en donc des maxima de $\left| \underline{p} \right|$ — est donc de π , d'où le graphe.

L'amplitude de la pression au fond du récipient est maximale pour $k_2 L = n\pi$ et vaut $P_{\max}(L) = 2A_1$. Elle vaut le double de la surpression incidente.