

Préparation au DS n° 6

Ondes — solution

Partie I — Physique des vagues (Mines-Ponts PSI 2023)

1 — Les équations de la vague linéaire

1. Le volume $d\tau = dx dy dz$ contient la masse

$$\delta m = \rho(x, z, t) dx dy dz.$$

Entre t et $t + dt$, elle varie de

$$\begin{aligned} d(\delta m) &= (\rho(x, z, t + dt) - \rho(x, z, t)) dx dy dz \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz. \end{aligned}$$

La masse qui franchit une section par unité de temps est donnée par le flux de vecteur densité de courant de masse

$$\vec{j}_m = \rho \vec{u}.$$

La masse reçue par le volume $d\tau$ pendant dt est donc

$$\begin{aligned} \delta m_{\text{reçue}} &= j_{m,x}(x, z, t) dy dz dt - j_{m,x}(x dx, z, t) dy dz dt \\ &\quad + j_{m,z}(x, z, t) dx dy dt - j_{m,z}(x, z + dz, t) dx dy dt \\ &\quad - \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} dx dy dz dt - \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} dx dy dz dt. \end{aligned}$$

Le bilan de matière s'écrit donc, après simplification

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}.$$

2. Dans le cas où le fluide est incompressible, sa masse volumique est constante. On a donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

et

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

La relation précédente donne alors

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

3. Le champ des vitesses s'écrivant $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$, on a

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

La relation de la question précédente s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0,$$

soit

$$\Delta \phi = 0.$$

4. Avec $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$, la relation d'Euler s'écrit

$$\rho \left[\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} \phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u} \cdot \vec{u}) \right] + \rho g \hat{e}_z + \overrightarrow{\text{grad}}(p) = \vec{0}$$

Les variables de temps et d'espace étant indépendantes, le théorème de Schwarz permet d'écrire

$$\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} \phi)}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right).$$

D'autre part, on peut écrire

$$\rho g \hat{e}_z = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z).$$

On a donc

$$\rho \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z + p) = \vec{0}.$$

Le fluide étant incompressible, la masse volumique ρ est uniforme et on peut écrire

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z + p) = \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left(g z + \frac{p}{\rho} \right)$$

d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + g z + \frac{p}{\rho} \right] = \vec{0}.$$

Une expression de gradient nul est uniforme : elle ne dépend pas des coordonnées d'espace, mais dépend *a priori* du temps. On a donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + g z + \frac{p}{\rho} = f(t).$$

Dans le cas où l'écoulement est stationnaire, on a $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, et $f(t) = C$ constante. La relation précédente devient alors

$$\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + g z + \frac{p}{\rho} = C.$$

On retrouve la **relation de Bernoulli**.

5. Considérons une particule de fluide à la surface libre. La composante verticale de sa vitesse est u_z , soit avec $\vec{u} = \text{grad } \phi$,

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (1)$$

La composante verticale de sa vitesse est aussi donnée par la dérivée temporelle de sa cote, dérivée calculée *en suivant le fluide*, c'est-à-dire avec la dérivée particulaire.

$$u_z(x, z = \eta(x, t), t) = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\eta(x, t).$$

Comme η ne dépend que la variable d'espace x , on a

$$(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\eta(x, t) = u_x \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

d'où

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Avec $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ on a $u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, d'où

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

En utilisant (1) on en déduit

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2)$$

6. La pression à la surface libre est égale à la pression atmosphérique par continuité, soit

$$p(x, z = \eta, t) = p_0.$$

On a établi à la question 4 la relation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}.$$

Écrivons cette relation en un point de la surface libre de cote $z = \eta$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \Big|_{z=\eta} + g\eta + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho},$$

d'où

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2g} \Big|_{z=\eta}. \quad (3)$$

7. L'équation de Laplace s'écrit

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

Avec $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$, elle devient

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Z(z) + X(x, t) \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0,$$

soit

$$\frac{1}{X(x, t)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Le membre de gauche ne dépend pas de z , tandis que le membre de droite ne dépend ni de x ni de t . Ces deux termes étant égaux, ils sont donc constants, soit en introduisant une constante μ :

$$\frac{1}{X(x, t)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\mu.$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z \end{cases}$$

8. On a la condition aux limites

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Avec $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t).$$

Avec $\phi(x, z) = X(x, t)Z(z)$, on a de plus

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = X(x, t) \frac{\partial Z}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

On obtient alors

$$\omega A \sin(kx - \omega t) = X(x, t) \frac{\partial Z}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

En identifiant le terme fonction de x et t on peut écrire

$$X(x, t) = \sin(kx - \omega t)$$

et

$$\frac{\partial Z}{\partial z} \Big|_{z=0} = A\omega,$$

soit les expressions demandées avec $\gamma = A\omega$.

9. Avec $X(x, t) = \sin(kx - \omega t)$, on a

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \sin(kx - \omega t) = -k^2 X.$$

(3) En identifiant avec l'équation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X,$$

on obtient $\mu = k^2$.

L'équation différentielle vérifiée par $Z(z)$ s'écrit alors

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0.$$

La solution générale est de la forme

$$Z(z) = \alpha \cosh(kz) + \beta \sinh(kz).$$

On a

$$\frac{dZ}{dz} = \alpha k \sinh(kz) + \beta k \cosh(kz)$$

soit en $z = 0$

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{z=0} = \beta k = A\omega,$$

d'où

$$\beta = \frac{A\omega}{k}.$$

On a

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \sin(kx - \omega t) \frac{dZ}{dz}.$$

La condition sur le fond

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0$$

s'écrit alors

$$\left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=-H} = 0$$

soit

$$\alpha k \sinh(-kH) + \frac{A\omega}{k} \cosh(-kH) = 0.$$

La fonction $\sinh$ étant impaire et la fonction $\cosh$ paire, on a donc

$$\frac{A\omega}{k} \cosh(kH) = \alpha k \sinh(kH)$$

d'où

$$\alpha = \frac{A\omega \cosh(kH)}{k \sinh(kH)} = \frac{A\omega}{k \tanh(kH)}.$$

On a alors

$$Z(z) = \frac{A\omega}{g} \left[\sinh(kz) + \frac{\cosh(kz)}{\tanh(kH)} \right].$$

En l'absence de formulaire de trigonométrie hyperbolique, on pouvait conclure avec cette expression.

On peut écrire

$$Z(z) = \frac{A\omega}{k} \left[\frac{\sinh(kz) \sinh(kH) \cosh(kz) \cosh(kH)}{\sinh(kH)} \right].$$

Avec

$$\sinh(a) \sinh(b) + \cosh(a) \cosh(b) = \cosh(a+b)$$

on obtient

$$Z(z) = \zeta \frac{\cosh[k(z+H)]}{\sinh(kH)} \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{A\omega}{k}.$$

10. Il reste à utiliser la condition de surface au repos

$$\eta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0}.$$

On a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} Z(z) = -\omega \cos(kx - \omega t) Z(z)$$

soit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} &= -\omega \cos(kx - \omega t) Z(0) \\ &= -\omega \cos(kx - \omega t) \frac{A\omega}{\tanh(kH)}. \end{aligned}$$

Avec $\eta = A \cos(kx - \omega t)$, on obtient

$$A \cos(kx - \omega t) = \frac{\omega}{gk} \cos(kx - \omega t) \frac{A\omega}{\tanh(kH)}.$$

En simplifiant par $A \cos(kx - \omega t)$ on en déduit la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kH).$$

11. La vitesse de phase est donnée par

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{g \tanh(kH)}{\omega} = \frac{g \tanh(kH)}{\sqrt{gk \tanh(kH)}}$$

soit

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g \tanh(kH)}{k}}.$$

Eau peu profonde

Si $H \ll \lambda$, comme $k = 2\pi/\lambda$, on a $kH \ll 1$. On peut alors linéariser

$$\tanh(kH) \approx kH$$

d'où

$$v_\phi \approx \sqrt{gH}.$$

La vitesse de phase ne dépend pas de ω : **la propagation n'est pas dispersive en eau peu profonde.**

Eau profonde

Si $H \gg \lambda$, on a $kH \gg 1$. On peut alors linéariser

$$\tanh(kH) \approx 1$$

d'où

$$v_\phi \approx \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

La vitesse de phase dépend de k , donc de ω (via la relation de dispersion) : **la propagation est dispersive en eau profonde.**

12. Différencions la relation de dispersion :

$$2\omega d\omega = g \tanh(kH) dk + gk d[\tanh(kH)].$$

Comme

$$d[\tanh(kH)] = H(1 - \tanh^2(kH)) dk$$

on obtient

$$2\omega d\omega = g [\tanh(kH) + kH(1 - \tanh^2(kH))] dk.$$

On en déduit la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} [\tanh(kH) + kH(1 - \tanh^2(kH))].$$

D'après la relation de dispersion établie à la question 10, on a

$$\tanh(kH) = \frac{\omega^2}{gk},$$

d'où

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{g}{2\omega} \left[\frac{\omega^2}{gk} + kH \left(1 - \frac{\omega^4}{g^2 k^2} \right) \right] \\ &= \frac{\omega}{2k} \left[1 + kH \left(\frac{gk}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{gk} \right) \right] \\ &= \frac{\omega}{2k} \left[1 + kH \left(\frac{\sinh(kH)}{\cosh(kH)} - \frac{\cosh(kH)}{\sinh(kH)} \right) \right] \\ &= \frac{\omega}{2k} \left[1 + kH \frac{\sinh^2(kH) - \cosh^2(kH)}{\cosh(kH) \sinh(kH)} \right] \\ &= \frac{v_\varphi}{2} \left[1 + kH \frac{2}{\sinh(2kH)} \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$v_g = \frac{v_\varphi}{n} \left[1 + \frac{nkH}{\sinh(2kH)} \right] \quad \text{avec} \quad n = 2.$$

On forme le rapport

$$\frac{v_g}{v_\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{kH}{\sinh(2kH)}.$$

Dans le cas $kH \ll 1$, on a $\sinh(2kH) \approx 2kH$, et

$$\frac{v_g}{v_\varphi} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

soit

$$v_g \approx v_\varphi \approx \sqrt{gH}.$$

Dans le cas $kH \gg 1$, on a $\sinh(2kH) / ggkH$, d'où

$$\frac{v_g}{v_\varphi} \approx \frac{1}{2}$$

soit

$$v_g \approx \frac{v_\varphi}{2} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

La relation de dispersion donne

$$\omega^2 = kg \tanh(kH) \approx kg,$$

d'où

$$v_g \approx \frac{v_\varphi}{2} \approx \frac{g}{2\omega}.$$

13. La vague résultante s'écrit

$$\eta(x, t) = \eta_1 + \eta_2 = A [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$$

soit

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= 2A \cos \left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \\ &\quad \times \cos \left[\left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) x - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]. \end{aligned}$$

En supposant $k_1 > k_2$ et $\omega_1 > \omega_2$, on pose

$$k = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad \text{et} \quad k' = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

ainsi que

$$\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

On a alors

$$\eta(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(k'x - \omega' t).$$

On représente l'évolution spatiale de l'onde à un instant t_0 donné :

