

Sujet d'entraînement n° 7

Centrale PC 2015 — Solution

Son et audition

I — Ondes acoustiques et oreille externe

I.A — Équation des ondes acoustiques

I.A.1) Dans l'approximation acoustique, les champs $p(x, t)$ et $\mu(x, t)$ caractérisant l'onde acoustique :

- sont des infiniment petits du même ordre ainsi que leurs dérivées ;
- sont de valeur moyenne nulle.

Une conversation normale correspond à $I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{I}{I_0} = 60 \text{ dB}$, d'où $I = I_0 10^6 = 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$. L'intensité acoustique s'écrit $I = \frac{p^2}{2\rho_0 c}$. Le volume molaire de l'air, considéré comme un gaz parfait, est $V_m = 22 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$, et sa masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, d'où une masse volumique $\rho_0 = \frac{M}{V_m} \approx 1,3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Avec $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient $p = \sqrt{2\rho_0 c I} = \sqrt{2 \times 1,3 \times 340 \times 10^{-6}}$, soit $p \approx 30 \text{ mPa}$.

I.A.2) Équations non linéarisées :

Équation d'Euler	$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } P$
Conservation de la masse	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$
Adiabaticité	$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S$

Équations linéarisées :

Équation d'Euler	$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p$
Conservation de la masse	$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} = 0$
Adiabaticité	$\mu = \rho_0 \chi_S p$

Dans le cas unidimensionnel présent, avec $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$, on a

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \mu}{\partial t} = -\chi_S \frac{\partial p}{\partial t}$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\chi_S} \left(-\frac{1}{\rho_0} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$$

I.A.3) L'équation du gaz parfait étant $P_0 = \frac{nRT_0}{V}$. La masse du gaz étant $m = \rho_0 V = nM$, on a donc $P_0 = \frac{\rho_0 RT_0}{M}$.

Pour une évolution isentropique, la loi de Laplace s'écrit $P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$, soit $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$.

On a donc $\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\gamma P_0}$. On en déduit $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$, soit $c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$.

On calcule $c = \sqrt{1,40 \times 8,31 \times 29028,8 \times 10^{-3}}$ soit $c = 342 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

I.A.4) L'eau est très faiblement compressible; on a donc $\chi_{S,\text{eau}} \ll \chi_{S,\text{air}}$. Bien que $\rho_{0,\text{eau}} > \rho_{0,\text{air}}$, cela explique pourquoi $c_{\text{eau}} > c_{\text{air}}$.

I.A.5) Le tympan n'est pas adapté à la perception des sons dans l'eau, dont l'impédance acoustique est différente de celle de l'air. La perception du son sous l'eau se fait principalement par la vibration de la boîte crânienne où se logent les deux oreilles internes. La localisation spatiale n'est plus possible, tous les sons semblant « centrés » au milieu de la tête.

I.A.6) Cette équation traduit le bilan local d'énergie de l'onde acoustique.

Le terme $\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\chi_S p^2$ est la densité volumique d'énergie acoustique portée par l'onde (le premier terme est l'énergie potentielle volumique, le second l'énergie cinétique volumique).

Le terme $p\vec{v}$ est le vecteur densité de courant énergétique transporté par l'onde. Le flux de $p\vec{v}$ à travers une surface représente la puissance acoustique transmise par l'onde à travers cette surface.

L'équation de Poynting est analogue à cette équation pour les ondes électromagnétiques.

I.B – Impédance et intensité acoustique

I.B.1) D'après l'équation d'Euler linéarisée, $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c} p'(t - x/c)$. En intégrant par rapport à t , on obtient

$$v(t - x/c) = \frac{1}{\rho_0 c} p(t - x/c) = \frac{1}{Z} p(t - x/c).$$

L'impédance acoustique s'écrit $Z = \rho_0 c$; elle ne dépend que des caractéristiques du fluide.

Pour l'air, on a $Z_{\text{air}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} = \sqrt{\gamma \rho_0 P_0} = \sqrt{\frac{\gamma M P_0^2}{R T_0}} = \sqrt{\frac{1,40 \times 28,8 \times 10^{-3} \times 10^{10}}{8,31 \times 290}}$ soit $Z_{\text{air}} = 409 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$

Pour l'eau, on a $Z_{\text{eau}} = 10^3 \times 1500$ soit $Z_{\text{eau}} = 1,50 \times 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$.

I.B.2) Avec $p(x, t) = p_0 e^{i(\omega t - kx)}$ on a $\vec{v} = \frac{p_0}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_x$. Il faut prendre les champs réels pour calculer les grandeurs énergétiques, soit $p(x, t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$ et $\vec{v} = \frac{p_0}{\rho_0 c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x$. On a alors

$$\vec{\Pi} = p(x, t) \vec{v}(x, t) = \frac{p_0^2}{\rho_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x.$$

On en déduit $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ soit $I = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c}$.

I.B.3) Notons $\xi(x, t)$ le déplacement de l'onde sonore. On a $v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, soit $\underline{v} = i\omega \underline{\xi}$. On en déduit $\underline{\xi} = \frac{1}{i\omega} \underline{v}$, d'où en amplitude

$$\xi_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{p_0}{2\pi f Z} = \frac{\sqrt{2\rho_0 c I}}{2\pi f Z} \quad \text{soit} \quad \xi_0 = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c}}.$$

Au seuil d'audition ($I = I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$), on calcule $\xi_0 = \frac{1}{2\pi \times 440} \sqrt{\frac{2 \times 10^{-12}}{409}}$, soit $\xi_0 = 25 \text{ pm}$. C'est un déplacement inférieur aux dimensions atomiques!

Au seuil de douleur ($I = I_0 = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$), on calcule $\xi_0 = \frac{1}{2\pi \times 440} \sqrt{\frac{2}{409}}$ soit $\xi_0 = 25 \text{ } \mu\text{m}$. C'est encore très faible.

I.C – L'oreille externe

I.C.1) La section S du pavillon diminue dans le sens de propagation de l'onde. En négligeant les phénomènes d'atténuation, la conservation de l'énergie se traduit par la conservation du flux IS . Comme S diminue, I augmente lors de la propagation dans le pavillon : on peut dire que le pavillon concentre l'énergie sonore.

I.C.2) L'impédance est donnée par $p = Zv$.

Une impédance nulle correspond à une surpression acoustique nulle; c'est le cas quand l'extrémité est ouverte sur l'atmosphère, où la pression vaut P_0 .

Une impédance infinie correspond à $v = 0$; c'est le cas quand l'extrémité est fermée (condition de cinématique des fluides sur un obstacle).

Impédance nulle	extrémité ouverte
Impédance infinie	extrémité fermée

Dans les deux cas, l'onde est totalement réfléchiée sur les deux extrémités : l'onde résultante est une **onde stationnaire**.

I.C.3) On peut considérer le canal auditif externe comme un tuyau de longueur L dont l'extrémité ouverte sur l'air est d'impédance nulle, et l'extrémité se terminant sur le tympan d'impédance infinie.

Le mode fondamental présente un ventre de vitesse à l'extrémité ouverte et un nœud au niveau du tympan; il correspond donc à $L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f}$, d'où $f = \frac{c}{4L}$. On calcule $f = \frac{343}{4 \times 0,03}$ soit $f = 2,8 \text{ kHz}$.

Cette fréquence correspond bien au maximum de sensibilité (document 4) ; le phénomène de résonance dans le conduit auditif est donc à prendre en compte.

I.D – Protection acoustique

I.D.1) La longueur d'onde correspondant au « fondamental » émis par la position 1 est $\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{342}{115,2} = 2,97 \text{ m}$, valeur très proche de la longueur du tuyau. On observe donc un fuseau complet, d'où l'on peut déduire que :

- les conditions aux limites sont symétriques (deux nœuds de surpression);
- le « fondamental » émis correspond en fait au premier harmonique.

On peut donc relier la fréquence du son émis à la longueur du tuyau selon $f = \frac{c}{L}$, soit $fL = c$.

Pour les deux premières positions, on peut écrire $f_1 L_1 = f_2 L_2$, d'où $f_2 = f_1 \frac{L_1}{L_2} = 115,2 \times \frac{2,95}{3,126}$, soit $f_2 = 108,7 \text{ Hz}$.

Le rapport des fréquences pour deux notes distantes d'un ton est 8/9. Deux cases successives étant distantes d'un demi-ton, les cases séparées d'un ton sont 1, 3, 5 et 7 d'une part, et 2, 4 et 6 d'autre part. On a donc

$$f_3 = \frac{8}{9} f_1 = 102,4 \text{ Hz}; \quad f_5 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 f_1 = 91,02 \text{ Hz}; \quad f_7 = \left(\frac{8}{9}\right)^3 f_1 = 80,91 \text{ Hz}$$

et d'autre part

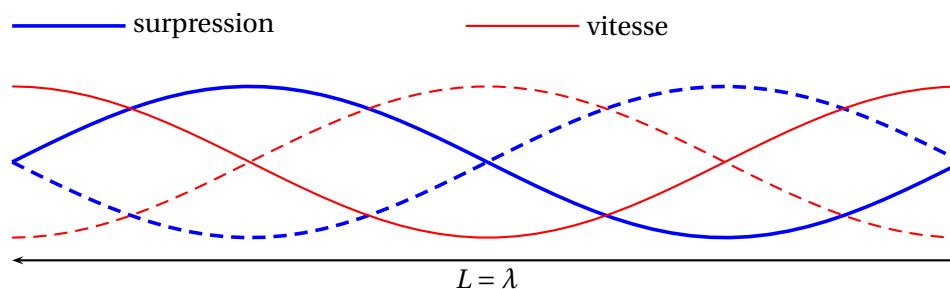
$$f_4 = \frac{8}{9} f_2 = 96,62 \text{ Hz}; \quad f_6 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 f_2 = 85,89 \text{ Hz}$$

Les longueurs correspondantes se calculent avec $L_i = L_1 \frac{f_1}{f_i}$.

Position de la coulisse	1	2	3	4	5	6	7
Fréquence de la note (Hz)	115,2	108,7	102,4	96,62	91,02	85,89	80,91
Longueur du tuyau (m)	2,950	3,126	3,319	3,517	3,734	3,957	4,174

La longueur obtenue pour la 7^e position diffère de moins de 1 % de celle donnée dans le tableau.

I.D.2) On a montré que $\lambda = L$ pour la note émise. Le pavillon étant une extrémité ouverte, il s'agit d'un nœud de surpression (donc d'un ventre de vitesse). Il en est donc de même au niveau de l'embouchure.



I.D.3) La note la plus basse, correspondant à la position 7, a pour fréquence $f_b = 80,91$ Hz.

La tessiture du trombone s'étend sur trois octaves et une quinte. Une octave correspond à deux sons de fréquences doubles. Un son à trois octaves de la fréquence f_b a pour fréquence $f_b''' = 2^3 f_b = 8 f_b$. Un son une quinte au-dessus a pour fréquence $f_h = \frac{3}{2} f_b''' = 12 f_b$, soit $f_h = 970,9$ Hz.

La tessiture du trombone correspond à l'intervalle de fréquences $[80,91 \text{ Hz}; 970,9 \text{ Hz}]$.

I.D.4) Un tromboniste n'a pas la tête à 20 cm du pavillon ! Quand le cas d'un tromboniste seul chez lui, on peut estimer le son émis à 100 dB dans une petite pièce. Il faut une atténuation de d'au moins 10 dB dans la gamme de fréquences inférieures à 1 kHz (émises par le trombone), ce que permettent les bouchons de type A, B et C, mais pas de type D.

Dans le cas où il joue avec un orchestre symphonique, la situation est plus délicate à évaluer :

- il y a plus d'instrumentistes, mais les trombonistes sont situés à l'arrière de l'orchestre ;
- la salle est plus grande, donc le son réverbéré est moins fort que dans une salle de cours ;
- il y a des instruments plus aigus qui émettent des sons de fréquences plus élevées.

On peut estimer que les bouchons de type A et B conviendront, d'autant plus qu'ils atténuent aussi convenablement les sons aigus.

II — Le rôle de l'oreille moyenne

II.A – Onde acoustique et conditions aux limites

II.A.1) La composante normale à un obstacle de la vitesse devant être égale à celle de l'obstacle (ici l'interface), **la vitesse est continue à la traversée de l'interface.**

La surface de séparation étant de masse négligeable, on en conclut à la nullité des forces s'exerçant sur elle d'après le principe de la dynamique. **La surpression acoustique est donc continue à la traversée de l'interface.**

II.A.2) Dans le milieu 1 ($x < 0$), l'onde est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. L'onde de surpression y vaut

$$p_1(x, t) = p_i(x, t) + p_r(x, t).$$

L'onde incidente est progressive dans le sens des x croissants, donc $v_i = \frac{p_i(x, t)}{Z_1}$. L'onde réfléchie est progressive dans le sens des x décroissants, donc $v_r = -\frac{p_r(x, t)}{Z_1}$. On a donc

$$v_1(x, t) = \frac{1}{Z_1} [p_i(x, t) - p_r(x, t)].$$

Dans le milieu 2 ($x > 0$), l'onde se réduit à l'onde transmise, progressive dans le sens des x croissants, donc

$$p_2(x, t) = p_t(x, t) \quad \text{et} \quad v_2(x, t) = \frac{1}{Z_2} p_t(x, t).$$

Les relations de continuité s'écrivent, en $x = 0$:

$$p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z_1} [p_i(0, t) - p_r(0, t)] = \frac{1}{Z_2} p_t(0, t)$$

Le coefficient de réflexion pour la surpression acoustique est défini par $r = \frac{p_r(0, t)}{p_i(0, t)}$. En éliminant $p_t(0, t)$ du

système d'équations, on obtient $r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$.

Le coefficient de transmission pour la surpression acoustique est défini par $t = \frac{p_t(0, t)}{p_i(0, t)}$. En éliminant $p_r(0, t)$ du

système d'équations, on obtient $t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

1. Un son a une octave a pour fréquence $f_b' = 2f_b$; un son à l'octave au-dessus a pour fréquence $f_b'' = 2f_b'$ et ainsi de suite.

II.A.3) D'après la question I.B.2., l'intensité sonore est $I = \frac{p^2}{2Z}$. Le coefficient de réflexion pour l'intensité sonore s'écrit donc

$$R = \frac{I_r(0, t)}{I_i(0, t)} = \frac{p_r^2(0, t)}{p_i^2(0, t)} = r^2$$

soit $R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2$.

Le coefficient de transmission pour l'intensité sonore s'écrit

$$T = \frac{I_t(0, t)}{I_i(0, t)} = \frac{p_t^2(0, t)}{Z_2} \frac{Z_1}{p_i^2(0, t)} = \frac{Z_1}{Z_2} t^2$$

soit $T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$.

II.A.4) On a calculé en I.B.1) $Z_{\text{air}} = 409 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ et $Z_{\text{eau}} = 1,5 \times 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$. On en déduit

$$R = 0,999 \quad \text{et} \quad T = 1,1 \times 10^{-3}.$$

L'onde est très mal transmise à cette interface; la réflexion est quasi-totale.

Le niveau sonore est défini par $I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

Le niveau sonore transmis vaut donc $I_{t,\text{dB}} = 10 \log \frac{T I_i}{I_0} = I_{i,\text{dB}} - 10 \log T$. L'atténuation vaut donc $-10 \log T$, soit -30 dB .

II.A.5) L'oreille interne est remplie de liquide; le conduit auditif est rempli d'air. Une simple interface entre l'oreille interne et la cochlée ne permettrait pas une bonne transmission de l'intensité acoustique; la transmission se fait par l'intermédiaire de la chaîne d'osselets dont le rôle est « d'amplifier » les mouvements du tympan transmis à la face d'entrée de la cochlée.

II.B – La chaîne d'osselets

II.B.1) D'après les bras de levier indiqués, les forces F_1 et F_2 s'exerçant respectivement sur le tympan et sur la platine de l'étrier vérifient $d_1 F_1 = d_2 F_2$. Comme $F_1 = P_1 S_1$ et $F_2 = P_2 S_2$, la pression s'exerçant sur la platine de l'étrier s'écrit

$$P_2 = \frac{d_1 S_1}{d_2 S_2} P_1 = 20 \times 1,3 \times P_1$$

soit $P_2 = 26 P_1$.

II.B.2) Le niveau d'intensité au niveau de la platine de l'étrier vaut donc

$$I_{2,\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{p_2^2}{2Z I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{26^2 p_1^2}{2Z I_0} \right) = I_{1,\text{dB}} + 20 \log 26 = I_{1,\text{dB}} + 28,3$$

La chaîne d'osselets permet un gain d'environ 28 dB, ce qui est très important. Cela existe la grande sensibilité de l'oreille.

III — L'oreille interne

III.A – Le système étudié est la masse $m = \rho_0 \ell s$ contenue dans le tube. La pression à l'intérieur de la cavité étant $P(t)$ et la pression extérieure $P_0 + p_m \cos(\omega t)$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projection selon Ox :

$$\rho_0 \ell s \ddot{x} = P(t)s - [P_0 + p_m \cos(\omega t)]s.$$

L'évolution du fluide dans la cavité étant isentropique, à une variation δP de pression correspond une variation de volume δV donnée par

$$\chi s = -\frac{1}{V_0} \frac{\delta V}{\delta P}.$$

La pression dans la cavité vaut alors

$$P(t) = P_0 + \delta P = P_0 - \frac{1}{V_0 \chi_s} \delta V = P_0 - \frac{1}{V_0 \chi_s} s x(t)$$

car le volume accessible à l'eau de la cavité augmente de $s x(t)$ quand la masse de fluide du tuyau avance de $x(t)$. On a donc

$$\rho_0 \ell \ddot{x} = -\frac{s}{V_0 \chi_s} s x + p_m s \cos(\omega t) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{s}{V_0 \ell \rho_0 \chi_s} x = \frac{p_m}{\rho_0 \ell} \cos(\omega t).$$

En remarquant que $\frac{1}{\rho_0 \chi_s} = c^2$, on obtient

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{p_m}{\rho_0 \ell} \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = c \sqrt{\frac{s}{V_0 \ell}}$$

En régime harmonique forcé à la pulsation ω , l'amplitude complexe $\underline{X}$ vérifie

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \underline{X} = \frac{p_m}{\rho_0 \ell} \quad \underline{X} = \frac{p_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) \rho_0 \ell}.$$

On observe donc un phénomène de résonance pour $\omega = \omega_0$.

$$\text{Il existe une résonance en déplacement à la pulsation } \omega_0 = c \sqrt{\frac{s}{V_0 \ell}}.$$

III.B – D'après la théorie de Helmholtz, la sélectivité en fréquence est due à des résonateurs excités par la membrane basilaire. Les hautes fréquences sont perçues à la base de la membrane, là où elle est plus épaisse.

En considérant que le fluide au-dessus d'une certaine zone de la membrane se comporte comme un résonateur, les hautes fréquences correspondent à un volume de résonateur V_0 petit; les hautes fréquences entraînent une résonance à la base de la cochlée, là où elle est plus épaisse et donc où le volume accessible par le liquide est plus petit.

III.C – On peut envisager que la résonance à une fréquence donnée correspond à une résonance de la membrane elle-même.

La fréquence de résonance d'un système masse-ressort est donnée par $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$; une fréquence élevée correspond à une rigidité élevée (c'est-à-dire à une zone où la membrane est épaisse), et à une masse faible (la membrane est plus étroite à sa base).

IV — L'influx nerveux

IV.A – Modèle électrique des fibres nerveuses

IV.A.1) L'axoplasme étant un conducteur cylindrique, une longueur L a pour résistance $R_a = \frac{\rho_a L}{\pi \frac{d^2}{4}}$; la résistance

linéique $r_a = R_a/L$ vaut donc $r_a = \frac{4\rho_a}{\pi d^2}$. On calcule $r_a = 6,4 \times 10^9 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$.

Cette valeur est très élevée : le milieu est peu conducteur (ρ_a est faible), et sa section est très petite.

IV.A.2) On a $\frac{e}{d} = 7 \times 10^{-4} \ll 1$: on peut négliger l'épaisseur du condensateur devant le rayon de courbure de ses armatures et utiliser le modèle du condensateur plan infini.

IV.A.3) La capacité d'un condensateur plan infini s'écrit $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$. Pour une longueur L , la surface vaut ici

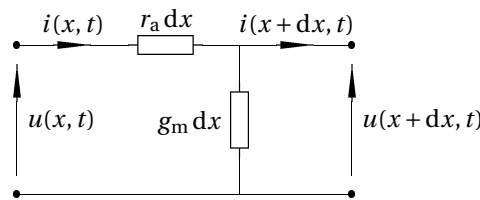
$S = 2\pi \frac{d}{2} L = \pi d L$. La capacité linéique $c_m = C/L$ s'écrit donc $c_m = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r d}{e}$. On calcule $c_m = 0,32 \mu\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$.

La membrane est parcourue par un courant traversant son épaisseur e . En négligeant sa courbure ($e/d \ll 1$), le courant traverse un conducteur « cylindrique » de longueur e et de section $S = \pi d L$ (pour une longueur L d'axone). Sa résistance est donc $R_m = \frac{\rho_m e}{\pi d L}$ et sa conductance $G_m = \frac{\pi d L}{\rho_m e}$. La conductance linéique $g_m = G_m/L$

vaut donc $g_m = \frac{\pi d}{\rho_m e}$. On calcule $g_m = 63 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1}$.

IV.B – Constante d'espace

IV.B.1) En régime permanent, le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, et le schéma devient :



IV.B.2) La loi des mailles s'écrit $u(x) = u(x + dx) + r_a i(x) dx$, d'où

$$-\frac{du(x)}{dx} = r_a i(x) .$$

La loi des nœuds s'écrit $i(x) = i(x + dx) + g_m dx u(x + dx)$ soit après linéarisation

$$-\frac{di(x)}{dx} = g_m u(x) .$$

On en déduit $\frac{d^2 u}{dx^2} = -r_a \frac{di}{dx}$, d'où $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2} u(x)$ avec $\lambda = \frac{1}{\sqrt{r_a g_m}}$.

On calcule $\lambda = 50 \mu\text{m}$.

IV.B.3) La solution générale de l'équation différentielle est $u(x) = A e^{-x/\lambda} + B e^{x/\lambda}$.

Le circuit n'étant constitué que de dipôle passifs dissipatifs, on ne peut avoir $u(x)$ qui diverge quand $x \gg \lambda$, donc $B = 0$. On en déduit

$$u(x) = u(0) e^{-x/\lambda} .$$

Le paramètre λ apparaît comme une **longueur caractéristique de l'atténuation** de la tension le long de la fibre nerveuse.

IV.B.4) D'après la courbes $u(x)$ données, la tension décroît avec sur une longueur caractéristique $\lambda' = 0,7 \text{ mm}$ (intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des abscisses). D'après $\lambda' = \frac{1}{\sqrt{r_a g'_m}}$, on en déduit $g'_m = \frac{1}{r_a \lambda'^2}$.

On calcule $g'_m = 0,3 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1}$.

La myéline fait considérablement baisser la conductivité linéique de fuite de l'axone.

La myéline entourant l'axone, elle est traversée par le même courant que la membrane. Myéline et membrane sont donc associées en série : $\frac{1}{g'_m} = \frac{1}{g_m} + \frac{1}{g_{\text{myéline}}}$, d'où $g_{\text{myéline}} = \frac{g_m - g'_m}{g_m g'_m}$.

On calcule $g_{\text{myéline}} = 0,3 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1}$.

On a $g_{\text{myéline}} \approx g'_m$ car $g'_m \ll g_m$.

IV.C – Régime variable

IV.C.1) On suppose les axones myélinisés : la conductance linéique de fuite est g'_m .

La loi des nœds s'écrit $u(x, t) = r_a dx i(x, t) - u(x + dx, t)$, soit après linéarisation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -r_a i(x, t) .$$

La loi des mailles s'écrit $i(x, t) = i(x + dx, t) + g'_m dx u(x + dx, t) + c_m dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t}$, soit après linéarisation

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -g'_m u(x, t) - c_m \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} .$$

On a $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -r_a \frac{\partial i(x, t)}{\partial x}$, d'où

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + r_a g'_m u(x, t).$$

IV.C.2) En régime harmonique, le terme de fuite a pour amplitude $r_a g'_m u_0$. L'autre terme a pour amplitude $j\omega r_a c_m u_0$. On peut négliger le terme de fuite si $r_a g'_m \ll r_a c_m \omega$, soit pour une fréquence $f \gg \frac{g'_m}{2\pi c_m}$.

On calcule $f \gg 150 \text{ Hz}$.

Il faut que la fréquence des signaux soit assez élevée pour que cette approximation soit valide.

IV.C.3) L'équation $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ est l'équation de la diffusion.

Cette équation régit la diffusion thermique, la diffusion de particules, la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique (effet de peau), la propagation d'ondes de cisaillement dans un fluide visqueux newtonien.

IV.C.4) En écrivant que $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$ vérifie l'équation de la diffusion, on obtient la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = -j r_a c_m \omega.$$

On peut écrire $\underline{k}^2 = r_a c_m \omega e^{-j\frac{\pi}{2}}$, d'où $\underline{k} = \pm \sqrt{r_a c_m \omega} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \pm \sqrt{\frac{r_a c_m \omega}{2}} (1 - j)$.

Le module d'onde est complexe : $\underline{k} = k' + jk''$; l'onde s'écrit alors $\underline{u}(x, t) = 0 e^{k''x} e^{j(\omega t - k'x)}$.

On a d'une part $k'' = \text{Im}(\underline{k}) \neq 0$: **le milieu est absorbant**. Il faut $k'' < 0$ pour ne pas avoir de divergence de l'amplitude, d'où $\underline{k} = +\sqrt{\frac{r_a c_m \omega}{2}} (1 - j)$.

D'autre part $k'(\omega) = \sqrt{\frac{r_a c_m \omega}{2}}$: la partie réelle du module d'onde dépend de ω de façon non linéaire ; **la propagation est donc dispersive**.

La vitesse de phase est donnée par $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$, soit $v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{r_a c_m}}$.

La vitesse de groupe est donnée par $v_g = \frac{d\omega}{dk'}$, avec $\omega = \frac{2k'^2}{r_a c_m}$, d'où $v_g = \frac{4k'}{r_a c_m} = \frac{4}{r_a c_m} \sqrt{\frac{r_a c_m \omega}{2}}$, soit $v_g = \sqrt{\frac{8\omega}{r_a c_m}}$.

On remarque que $v_g = 4v_\varphi$.

IV.C.5) L'onde de tension s'écrit $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{k''x} e^{j(\omega t - k'x)}$ avec $k'' = -\sqrt{\frac{r_a c_m \omega}{2}}$. On peut donc écrire

$$\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - k'x)} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{r_a c_m \omega}}.$$

L'amplitude décroît sur une distance caractéristique δ . L'atténuation est d'autant plus importante que la fréquence est élevée : c'est l'effet de peau, caractéristique d'un phénomène diffusif en régime harmonique.

IV.D – Ça brûle !

La gaine de myéline étant associée en série avec la membrane, la capacité linéique d'une fibre nerveuse myélinisée est donnée par

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c'_m} + \frac{1}{c_m} > \frac{2}{c_m} \quad \text{car} \quad c'_m < c_m.$$

On a donc $c < \frac{c_m}{2} < c_m$.

Les vitesses de phase et de groupe sont donc supérieures dans une fibre nerveuse myélinisée.

Les fibres nerveuses sensibles à la douleur étant entourées d'une gaine de myéline, les influx nerveux s'y propagent plus rapidement quand dans les fibres nerveuses sensibles à la chaleur. On a donc mal avant d'avoir chaud lorsque l'on se brûle.