

Conversion de puissance I — Puissance électrique en régime sinusoïdal

1 — Puissance moyenne — Facteur de puissance

1.1 Valeurs instantanée, moyenne efficace

Soit $s(t)$ un signal de période T .

$$\text{Valeur instantanée : } s(t) \quad \left| \quad \text{Valeur moyenne : } \langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \quad \right| \quad \text{Valeur efficace : } S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}$$

- La valeur moyenne est calculée sur tout intervalle de largeur T , comme $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$.
 - La valeur efficace est calculée de même.
- Les appareils affichant la valeur efficace d'un signal sont dits « RMS » : *Root Mean Square*.

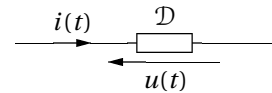
Cas du signal sinusoïdal

Dans le cas d'un signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on a

$$\langle s \rangle = 0 \quad \text{et} \quad S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}.$$

1.2 Impédance et admittance complexes

On considère un dipôle linéaire $\mathcal{D}$, orienté en convention récepteur :



On se place en régime sinusoïdal : $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, où φ est le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$.

Si le dipôle est linéaire, on peut utiliser la notation complexe, définissant la valeur complexe et l'amplitude complexe pour chaque grandeur sinusoïdale.

valeur instantanée	signal complexe	amplitude complexe
$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$	$\underline{X} = X_m e^{j\varphi}$

- Le signal complexe dépend du temps; on a $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$.
 - L'amplitude complexe ne dépend pas du temps.
- On en déduit l'amplitude et la phase du signal réel par $X_m = |\underline{X}|$ et $\varphi = \arg(\underline{X})$.

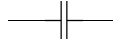
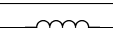
On définit l'**impédance complexe** $\underline{Z}$ du dipôle par $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$.

On définit l'**admittance complexe** $\underline{Y}$ du dipôle par $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$.

- L'impédance dépend *a priori* de la pulsation des signaux : $\underline{Z}(j\omega)$.
- Le module de l'impédance s'exprime en ohm (Ω), celui de l'admittance en siemens (S).

On peut noter l'impédance d'un dipôle de deux façons : $\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = R + jX$:

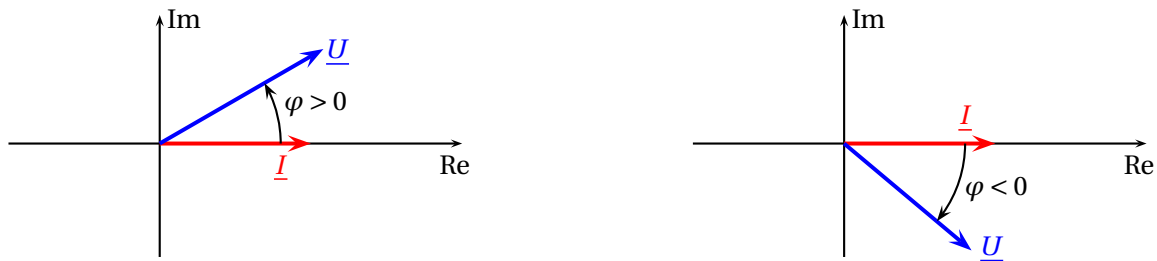
- la partie réelle R est la **résistance** du dipôle;
- la partie imaginaire X est la **réactance** du dipôle.

dipôle	impédance	admittance	commentaire
résistance 	$\underline{Z} = R$	$\underline{Y} = 1/R$	$X = 0$: dipôle purement résistif
condensateur 	$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$	$\underline{Y} = jC\omega$	$R = 0$: dipôle purement réactif
bobine idéale 	$\underline{Z} = jL\omega$	$\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega}$	$R = 0$: dipôle purement réactif

- Pour le condensateur, on a $X = -\frac{1}{C\omega} < 0$; un dipôle tel que $X < 0$ est dit capacitif.
- Pour la bobine, on a $X = L\omega > 0$; un dipôle tel que $X > 0$ est dit inductif.

Construction de Fresnel

On représente les amplitudes complexes dans le plan complexe à un instant donné. On se place en $t = 0$, et on prend l'intensité comme origine des phases.



1.3 Puissance instantanée — Puissance moyenne

La puissance instantanée reçue par un dipôle orienté en convention récepteur est donnée par $p(t) = u(t)i(t)$.

La puissance moyenne est donnée par $P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$.

Cas de la résistance

La puissance instantanée reçue vaut $p(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}$.

La puissance moyenne vaut $P = R\langle i^2 \rangle$ soit $P = RI_{\text{eff}}^2$, ou $P = \frac{\langle u^2 \rangle}{R}$ soit $P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$.

- La valeur efficace du courant (resp. de la tension) correspond au courant (resp. à la tension) continu qui donnerait la même puissance moyenne absorbée.

Cas de la bobine idéale

Comme $u(t) = L \frac{di}{dt}$, la puissance instantanée reçue vaut $p(t) = L \frac{di}{dt} i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2(t) \right)$.

La puissance moyenne vaut donc $P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} Li^2(t) \right]_{t_0}^{t_0+T} = 0$ car $i(t_0 + T) = i_0(t_0)$, le courant étant périodique de période T .

Cas du condensateur idéal

Comme $i(t) = C \frac{du}{dt}$, la puissance instantanée reçue vaut $p(t) = u(t)C \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Cu^2(t)}{2} \right)$.

La puissance moyenne vaut donc $P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{Cu^2(t)}{2} \right]_{t_0}^{t_0+T} = 0$ car $u(t_0 + T) = u_0(t_0)$, la tension étant périodique de période T .

Un résultat utile :

Si f est une fonction périodique, alors $\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = 0$.

- On a en effet $\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df}{dt} dt = \frac{1}{T} [f(t)]_{t_0}^{t_0+T} = \frac{f(t_0 + T) - f(t_0)}{T} = 0$ car $f(t_0 + T) = f(t_0)$.

2 — Puissance en régime sinusoïdal

2.1 Puissance moyenne – Facteur de puissance

On considère un dipôle orienté en convention récepteur, avec

$$\begin{aligned}i(t) &= I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ u(t) &= U_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

La puissance moyenne reçue par le dipôle est donnée par

$$\begin{aligned}P = \langle u(t)i(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t) dt = \frac{2U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{2U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\frac{\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi}{2} \right] dt = \frac{U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos \varphi dt = \frac{U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}}{T} T \cos \varphi = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}} \cos \varphi.\end{aligned}$$

La **puissance moyenne**, appelée aussi **puissance active**, reçue par un dipôle en régime sinusoïdal est donnée par $P = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}} \cos \varphi$, où φ est le déphasage de la tension par rapport au courant. Le terme $\cos \varphi$ est appelé **facteur de puissance**.

2.2 Puissance moyenne absorbée par une impédance

On considère un dipôle d'impédance $\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi) = R + jX$.

Les amplitudes complexes de la tension et de l'intensité sont données par $\underline{U} = I_{\text{eff}}\sqrt{2} e^{j\varphi}$ et $\underline{I} = I_{\text{eff}}\sqrt{2}$.

De la relation $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$, on déduit en prenant le module la relation entre les valeurs efficaces : $U_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}}$.

La puissance moyenne s'écrit alors

$$P = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}} \cos \varphi = Z I_{\text{eff}}^2 \cos \varphi = R I_{\text{eff}}^2$$

car $R = \text{Re}(\underline{Z}) = Z \cos \varphi$.

L'admittance complexe du dipôle s'écrit $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = \frac{\cos \varphi - j \sin \varphi}{Z}$.

La puissance moyenne peut alors s'écrire aussi

$$P = U_{\text{eff}} \frac{U_{\text{eff}}}{Z} \cos \varphi = U_{\text{eff}}^2 \text{Re}(\underline{Y})$$

comme $\text{Re}(\underline{Y}) = \frac{\cos \varphi}{Z}$.

La puissance moyenne reçue par un dipôle linéaire en régime sinusoïdal est donnée par

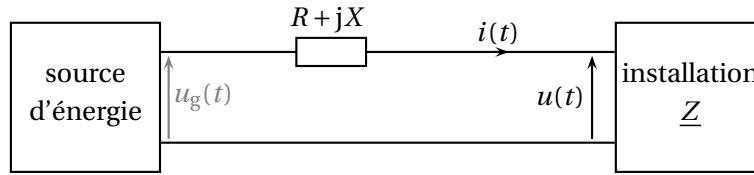
$$P = \text{Re}(\underline{Z}) I_{\text{eff}}^2 = \text{Re}(\underline{Y}) U_{\text{eff}}^2.$$

- Dans le cas d'un dipôle purement réactif, donc l'impédance est de la forme $\underline{Z} = jX$, on a $\text{Re}(\underline{Z}) = 0$ et $\text{Re}(\underline{Y}) = 0$, d'où $P = 0$: **un dipôle purement réactif ne consomme pas de puissance en moyenne en régime sinusoïdal.**

On retrouve le résultat établi dans le cas du condensateur idéal et de la bobine idéale.

3 — Application : relèvement du facteur de puissance

On considère un transport de puissance électrique entre une source et une installation d'impédance $\underline{Z}$, par une ligne électrique d'impédance $R + jX$. On est en régime sinusoïdal.



- La source fournit la puissance moyenne P_g .
- L'installation consomme la puissance moyenne $P_u = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$ où $\underline{Z} = Z \cos \varphi$.
- La ligne consomme la puissance moyenne $P_\ell = R I_{\text{eff}}^2$ (pertes en ligne).

Le rendement de cette configuration est donnée par le rapport de la puissance utile P_u (effectivement reçue par l'installation) sur la puissance P_g délivrée par le générateur, soit

$$\eta = \frac{P_u}{P_g}.$$

En moyenne, la puissance délivrée par la source est consommée par la ligne et l'installation, soit $P_g = P_\ell + P_u$.

La puissance instantanée délivrée par le générateur est $p_g(t) = u_g(t)i(t)$ (il est orienté en convention générateur).

La puissance instantanée reçue par l'installation est $p_u(t) = u(t)i(t)$ (orientation en convention récepteur).

La tension aux bornes de la résistance de la ligne, en convention récepteur, est $u_\ell(t) = u_g(t) - u(t)$. La puissance reçue par la ligne est donc $p_\ell(t) = u_\ell(t)i(t) = u_g(t)i(t) - u(t)i(t)$, soit $p_\ell(t) = p_g(t) - p_u(t)$. On a donc $p_g(t) = p_\ell(t) + p_u(t)$ et, en prenant les valeurs moyennes, $P_g = P_\ell + P_u$.

Le rendement peut alors s'écrire

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_\ell} = \frac{1}{1 + \frac{P_\ell}{P_u}} = \frac{1}{1 + \frac{R I_{\text{eff}}^2}{P_u}}.$$

Dans la pratique, c'est la tension efficace délivrée par la source qui est fixée (230 V en France en monophasé), l'intensité étant déterminée par l'impédance de l'installation. On va donc exprimer η en fonction de U_{eff} en éliminant I_{eff} à partir de $P_u = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$, soit

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R P_u}{U_{\text{eff}}^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Pour une puissance consommée par l'utilisateur P_u donnée, l'intensité efficace dans la ligne vaut $I_{\text{eff}} = \frac{P_u}{U_{\text{eff}} \cos \varphi}$.

Si le facteur $\cos \varphi$ diminue, le rendement η diminue : l'intensité dans la ligne I_{eff} augmente, ce qui augmente les pertes en ligne par effet Joule¹.

Le distributeur impose une valeur minimale du facteur de puissance : $\cos \varphi \geq 0,93$. L'utilisateur doit donc **relever le facteur de puissance** de son installation s'il est trop faible.

- Dans la pratique, les installations industrielles ont une impédance inductive ($X > 0$) du fait de la présence de moteurs électriques. On relève le facteur de puissance en plaçant un condensateur en parallèle avec $\underline{Z}$ pour réduire le déphasage de la tension sur le courant (et ainsi augmenter $\cos \varphi$).

1. Et c'est le distributeur qui « paye la différence » entre la puissance fournie et la puissance consommée, les pertes en ligne étant à sa charge...