

Le sujet comporte trois parties indépendantes.

Les calculatrices sont interdites

Partie I — Acoustique d'une cloison

1 — Modélisation de l'onde

On néglige l'influence de la pesanteur et la viscosité de l'air. On note P_0 et ρ_0 la pression et la masse volumique de l'air au repos et χ_S le coefficient de compressibilité isentropique de l'air.

On se propose d'étudier la propagation unidirectionnelle des ondes sonores planes. On travaillera dans le repère cartésien, $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où $\vec{e}_z$ correspond au vecteur unitaire dirigé suivant la verticale ascendante.

Après une perturbation élémentaire les caractéristiques de l'air sont décrites par les grandeurs suivantes qui sont des fonctions de la position x et du temps t :

$v(x, t)$: la vitesse de l'air portée par le vecteur $\vec{e}_x$;

$P(x, t) = P_0 + p(x, t)$: la pression de l'air ;

$\rho(x, t) = \rho_0 + \mu(x, t)$: la masse volumique de l'air.

❑ 1 — Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique.

❑ 2 — Soit dV un volume élémentaire d'air que nous appellerons par la suite particule d'air. Écrire l'équation de la dynamique vérifiée pour cette particule d'air. Projeter cette équation suivant le vecteur $\vec{e}_x$, puis linéariser cette équation dans le cadre de l'approximation acoustique.

❑ 3 — Rappeler l'équation locale de conservation de la masse et la linéariser dans le cadre de l'approximation acoustique.

❑ 4 — On rappelle que, dans l'approximation acoustique, $\mu = \rho_0 \chi_S p$. Montrer que la surpression acoustique $p(x, t)$ vérifie une équation de d'Alembert. En déduire l'expression de la célérité c_0 de l'onde en fonction de ρ_0 et de χ_S .

2 — Transmission du son à travers une cloison

Une onde sonore plane progressive sinusoïdale se propage dans l'air. Cette onde de pulsation ω arrive sous incidence normale sur une cloison rigide absorbante d'épaisseur e_c , de surface S_c et de masse M_c (figure II-1). L'épaisseur de la cloison e_c est très inférieure à la longueur d'onde λ de l'onde sonore. En l'absence d'onde sonore, cette cloison est centrée sur la position $x = 0$.

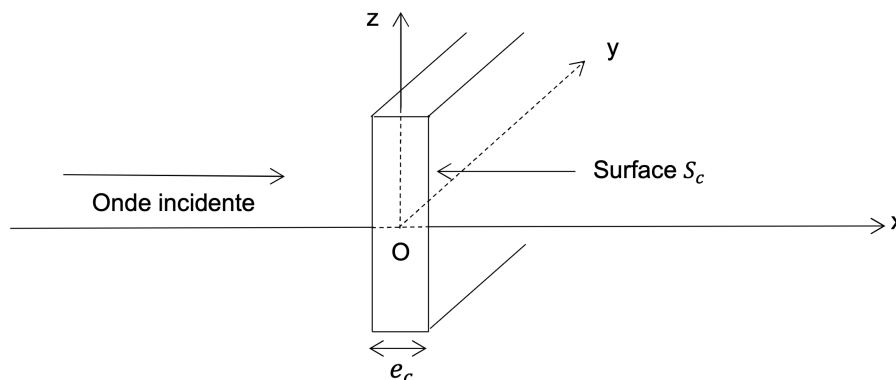


FIGURE I-1 – Onde sonore et cloison

1 Onde incidente

Pour l'onde incidente, on note $p_i(x, t)$ la surpression acoustique et $v_i(x, t)$ la vitesse particulière de l'air. On désigne par $\underline{p}_i(x, t)$ et $\underline{v}_i(x, t)$ les expressions complexes correspondantes. On note k le module du vecteur d'onde, p_{im} l'amplitude algébrique de la surpression de l'onde incidente et v_{im} l'amplitude algébrique de la vitesse de l'onde incidente. On définit l'impédance acoustique de l'onde incidente comme le quotient $Z = \frac{p_{im}}{v_{im}}$.

□ 5 — Exprimer les expressions des ondes complexes $\underline{p}_i(x, t)$ et $\underline{v}_i(x, t)$ en fonction de k , ω , Z et de p_{im} .

□ 6 — On rappelle que $k = \frac{\omega}{c_0}$. Déterminer l'expression de Z en fonction de ρ_0 et de c_0 .

On rappelle que les phénomènes de réflexion et de transmission n'introduisent aucun déphasage singulier.

2 Onde réfléchie

Pour l'onde réfléchie, on note $p_r(x, t)$ la surpression acoustique et $v_r(x, t)$ la vitesse particulière de l'air. On désigne par $\underline{p}_r(x, t)$ et $\underline{v}_r(x, t)$ les expressions complexes correspondantes. On note $\underline{p}_{rm}$ l'amplitude complexe de l'onde réfléchie.

□ 7 — Exprimer les expressions des ondes complexes $\underline{p}_r(x, t)$ et $\underline{v}_r(x, t)$ en fonction de k , ω , Z et de $\underline{p}_{rm}$.

3 Onde transmise

Pour l'onde transmise de l'autre côté de la cloison, on note $p_t(x, t)$ la surpression acoustique et $v_t(x, t)$ la vitesse particulière de l'air. On désigne par $\underline{p}_t(x, t)$ et $\underline{v}_t(x, t)$ les expressions complexes correspondantes. On note $\underline{p}_{tm}$ l'amplitude complexe de l'onde transmise.

□ 8 — Exprimer les expressions des ondes complexes $\underline{p}_t(x, t)$ et $\underline{v}_t(x, t)$ en fonction de k , ω , Z et de $\underline{p}_{tm}$.

4 Réponse fréquentielle de la cloison

Les surpressions sonores sont à l'origine d'une vibration de la cloison mince. Par le choix d'une bonne origine des temps, cette vibration peut être modélisée par son déplacement $X_c(t) = X_m \cos(\omega t)$ auquel on associe le déplacement complexe $\underline{X}_c(t)$.

□ 9 — Déterminer une relation liant la surface S_c , la masse M_c , les amplitudes p_{im} , $\underline{p}_{rm}$, $\underline{p}_{tm}$, X_m et la pulsation ω .

□ 10 — En écrivant une première équation de continuité, déterminer une équation liant les amplitudes p_{im} , $\underline{p}_{rm}$ et $\underline{p}_{tm}$.

□ 11 — En écrivant une seconde équation de continuité, déterminer une nouvelle relation liant les amplitudes p_{im} , $\underline{p}_{rm}$, X_m , Z et ω .

On définit les coefficients complexes de réflexion $\underline{r} = \underline{p}_{rm} / p_{im}$ et de transmission $\underline{t} = \underline{p}_{tm} / p_{im}$.

□ 12 — On pose $\omega_0 = \frac{2S_c Z}{M_c}$. À l'aide des relations précédentes, déterminer les expressions complexes des coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de ω et ω_0 .

□ 13 — Tracer les diagrammes asymptotiques représentant d'une part $\log|\underline{r}|$ et d'autre part $\log|\underline{t}|$ en fonction de $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

□ 14 — On considère que la pulsation ω_0 se trouve dans la bande passante de l'oreille humaine.

Préciser si la cloison transmet plus significativement les nuisances sonores graves ou aiguës.

Préciser si l'écho réfléchi est significativement plus intense pour les nuisances sonores grave ou aiguës.

Partie II – Télécommunications

Pour toutes les applications numériques, repérées par les initiales A.N., on se contentera d'un ou deux chiffres significatifs. À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont repérés par une notation avec barre : $\bar{z} \in \mathbb{C}$. Une grandeur sinusoïdale de pulsation ω sera associée à la représentation $e^{i\omega t}$.

1 Le fil du télégraphe

- Sire, une nouvelle dépêche.
- D'où vient-elle?
- De Tomsk.
- Le fil est coupé au-delà de cette ville?
- Il est coupé depuis hier.
- D'heure en heure, général, fais passer un télégramme à Tomsk, et que l'on me tienne au courant.

Dans le roman de JULES VERNE, *Michel Strogoff*, publié en 1876, l'année même de la fondation à Paris de l'École Supérieure de Télégraphie (actuellement Télécom Paris), les télécommunications électriques (le télégramme) jouent, dès la première page, un rôle essentiel.

❑ 1 — L'alphabet cyrillique utilisé par Michel Strogoff comporte 32 lettres, plus les chiffres et quelques symboles de ponctuation. Combien de symboles binaires (les bits ou les points et traits du code MORSE) faut-il prévoir pour coder chaque caractère d'un document écrit en cyrillique contenant du texte, des chiffres et de la ponctuation?

A.N. : sachant qu'un opérateur compose 3 symboles binaires par seconde, combien de temps faudra-t-il pour transmettre une page complète de texte comme celle-ci par exemple? On détaillera l'évaluation proposée.

Le premier télégraphe électrique terrestre a été mis en service en 1838 par WHEATSTONE en Angleterre et le premier câble sous-marin posé en 1851 entre la France et l'Angleterre. La suite de ce sujet explore quelques propriétés de la transmission d'informations le long d'un tel fil électrique.

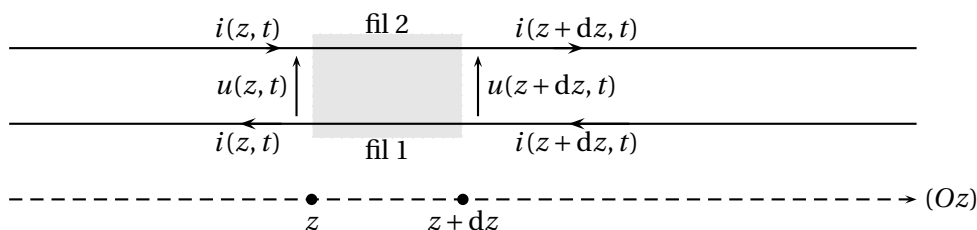


FIGURE II-1 – Modèle de la ligne bifilaire

2 Transmission par une ligne bifilaire

Le modèle électrique d'une ligne télégraphique est représenté figure II-1 : la transmission a lieu dans le sens de l'axe (Oz) et un élément de ligne de longueur dz transmet la tension aux bornes de la ligne $u(z, t)$ et le courant de ligne $i(z, t)$ selon les équations des télégraphistes, R_0 , ℓ_0 et χ_0 étant des constantes positives :

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{R_0}{\chi_0} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{R_0}{\ell_0} i(z, t) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{R_0 \chi_0} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

❑ 2 — Déterminer les unités usuelles des grandeurs R_0 , χ_0 et ℓ_0 .

❑ 3 — Dans le cas du télégraphe terrestre du XIX^e siècle, l'installation comportait en général un seul fil tendu sur des poteaux. Le modèle de transmission par ligne bifilaire reste-il applicable? Expliquer.

❑ 4 — Déterminer l'équation aux dérivées partielles (équation de propagation) vérifiée par la seule fonction $u(z, t)$, puis l'équation de dispersion associée reliant la pulsation ω au nombre d'onde $\bar{k}$.

Ici et dans toute la suite, on étudie une ligne bifilaire permettant le transport du signal sur une assez grande distance; les phénomènes limitant la propagation seront donc traités comme une perturbation et leur étude limitée au premier ordre du développement.

❑ 5 — Les phénomènes limitant la propagation sont-ils représentés par la partie réelle ou la partie imaginaire de $\bar{k}$? Justifier?

□ 6 — En déduire la vitesse de phase des ondes de courant et de tension. Y a-t-il dispersion à cet ordre du développement?

□ 7 — On considère une onde de tension progressant le long de l'axe (Oz) caractérisée par $u(z=0, t) = U_0 \cos(\omega t)$. Exprimer l'onde de tension $\bar{u}(z, t)$ et l'onde de courant $\bar{i}(z, t)$ associée.

Montrer que la puissance électrique moyenne¹ $\mathcal{P}_m(z)$ transportée par la ligne décroît lors de la propagation et déterminer la distance caractéristique de cette atténuation.

3 Câble coaxial

Depuis l'installation de lignes télégraphiques sousmarines, l'obligation d'isoler la ligne conduit à utiliser une forme géométrique particulière : le câble est coaxial, formé d'une armature centrale métallique formant un cylindre de rayon a , entouré d'une gaine isolante et d'un second câble métallique de rayon $b > a$. Les photographies de la figure II-2 représentent les extrémités dénudées de deux câbles de ce type qui relient la télévision à l'antenne; quelques éléments de la fiche technique du plus performant des deux sont repris dans la table 1.

Un tel câble est d'abord modélisé comme un milieu continu sans pertes caractérisé par une inductance linéique l_u et une capacité linéique c_u .

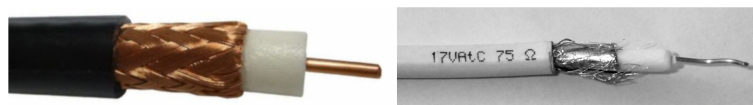


FIGURE II-2 – Câble coaxial professionnel (à gauche) et bas de gamme (à droite)

Conducteur interne :	cuivre, $\varnothing 1,6$ mm	Impédance :	75 Ω
Isolant :	polyéthylène, $\varnothing 7,2$ mm	Capacité nominale :	53 pF $\cdot$ m ⁻¹
Tresse externe :	cuivre, couverture > 95 %	Inductance nominale :	0,32 μ H $\cdot$ m ⁻¹
Gaine :	polyéthylène	Résistance nominale câble :	8,5 $\Omega \cdot$ km ⁻¹
Délai :	4,0 ns $\cdot$ m ⁻¹	Résistance nominale tresse :	3,6 $\Omega \cdot$ km ⁻¹

TABLE 1 – Extraits de la fiche technique du câble Velden 8213

□ 8 — Représenter le schéma équivalent à une longueur infinitésimale dz du câble. Établir les équations de propagation des ondes de courant et de tension.

□ 9 — Définir, exprimer, calculer et commenter la célérité de propagation des ondes électriques dans le câble Belden 8213. Comparer au « délai » de la fiche technique.

□ 10 — Définir et établir l'expression de l'impédance caractéristique Z_0 du câble. Les données de la fiche technique ci-dessus sont-elles compatibles avec ce modèle?

Lorsqu'un tel câble relie un générateur (par exemple l'antenne de réception du signal TV) à un récepteur (ici, l'étage d'entrée de l'amplificateur TV) modélisé par une impédance complexe $\bar{Z}_e$ en $z = 0$ sur la figure II-3, on observe en général la superposition d'ondes de tension et de courant incidente et réfléchie, donc la superposition d'une onde strictement progressive, d'amplitude $u_p = U_p \cos(\omega t - kz + \varphi_p)$ et d'une onde stationnaire, d'amplitude $u_s = U_s \cos(\omega t - \varphi_s) \sin(kz - \psi_s)$. L'importance de cette dernière est caractérisée par le rapport $\rho = U_s/U_p$, qui peut être mesuré pour indiquer le degré de désaccord entre le câble et sa charge.

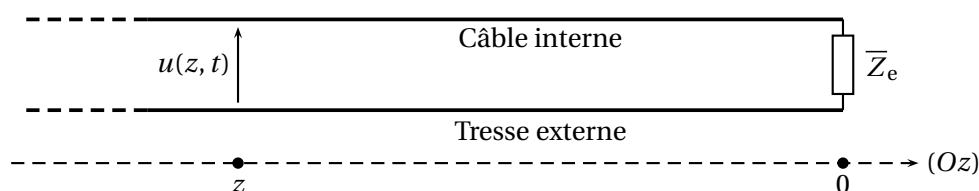


FIGURE II-3 – Câble TV alimentant un étage électronique

1. En régime harmonique, la puissance moyenne est définie par la moyenne temporelle $\langle \mathcal{P}(z, t) \rangle_t$. On peut l'écrire en fonction des grandeurs complexes $\mathcal{P}_m(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{u} \bar{i}^*)$ ou $\bar{i}^*$ est le conjugué de $\bar{i}$.

□ 11 — On impose d'abord dans la partie $z < 0$ du câble une onde de tension incidente $\bar{u}_+(z, t)$ d'amplitude complexe $\bar{U}_+$, de pulsation ω et de vecteur d'onde k .

Exprimer l'onde de courant $\bar{i}_+(z, t)$ associée en fonction de Z_0 , $\bar{U}_+$, k et ω .

Exprimer les ondes de tension $\bar{u}_-(z, t)$ et de courant $\bar{i}_-(z, t)$ réfléchies par le câble en fonction de $\bar{Z}_e$, Z_0 , k et ω .

□ 12 — Exprimer ρ en fonction de Z_0 et $\bar{Z}_e$. À quelle condition aura-t-on $\rho = 0$? On parle dans ce cas d'adaptation (ou accord) entre le câble et sa charge.

Dans tout ce qui suit, on choisit une valeur de $\bar{Z}_e$ qui assure cet accord. On souhaite évaluer l'importance des pertes en ligne dues aux résistances électriques par unité de longueur r_u et r'_u du câble et de la tresse.

□ 13 — Proposer un schéma modifié de l'élément de longueur dz de câble. Établir la nouvelle équation de propagation de l'onde de tension; définir et exprimer la longueur caractéristique d'atténuation de l'amplitude des ondes en fonction de Z_0 , r_u et r'_u .

□ 14 — A.N. : calculer et commenter la valeur de la distance caractéristique.

Question pour les 5/2 : En pratique, on évite d'utiliser de tels câbles à très haute fréquence (1 GHz et plus). Pourquoi?

Dans une installation de captage de télévision, un câble coaxial (C) relie l'antenne P au décodeur D. Un voisin indélicat, souhaitant bénéficier du signal sans payer, réalise le branchement en dérivation de la figure II-4 en dénudant partiellement le câble (C) pour y souder son propre câble (C') relié à son détecteur D'. Les soudures relient entre elles les câbles centraux d'une part et les tresses externes d'autre part. Les décodeurs D et D' sont tous deux adaptés aux câbles. Tous les câbles sont assez courts pour négliger l'atténuation du signal.

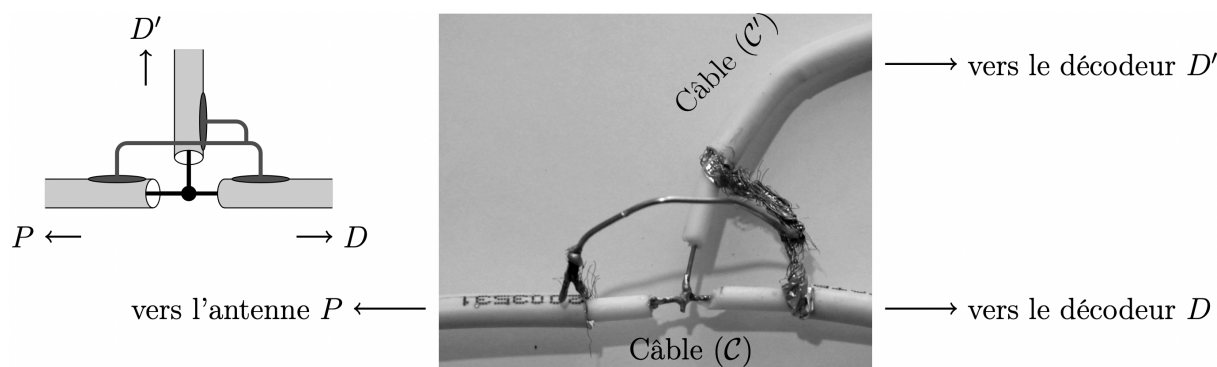


FIGURE II-4 – Branchement illégal d'un câble coaxial (C') sur une installation préexistante (C)

Un onde de tension $u_i = U_0 \cos(\omega t - kz)$ provient de l'antenne P dans la partie $z < 0$ du câble; elle atteint en $z = 0$ la soudure ainsi réalisée. Dans les deux câbles situés en parallèle dans le domaine $z > 0$ apparaît la même onde de tension $u_i = U'_0 \cos(\omega t - kz)$, avec $|U'_0| < |U_0|$.

□ 15 — Pourquoi n'y a-t-il pas d'onde réfléchiée dans les câbles situés en $z > 0$? Montrer qu'il en existe une dans le câble situé en $z < 0$ et déterminer son amplitude.

□ 16 — L'introduction de cette dérivation « pirate » est-elle détectable par une mesure de ρ ou bien par celle de l'atténuation du signal incident au niveau du détecteur D?

Partie III — La batterie au plomb

On appelle « batterie » un ensemble d'accumulateurs électriques. Le problème étudie quelques ordres de grandeurs liés aux batteries au plomb contenues dans les voitures.

Données	
Masse molaire moyenne du plomb	$M(\text{Pb}) = 207,2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse volumique de l'acide sulfurique pur liquide	$\rho(\text{H}_2\text{SO}_4) = 1,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Masse volumique de l'eau pure liquide	$\rho(\text{H}_2\text{O}) = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Masse molaire de l'acide sulfurique	$M(\text{H}_2\text{SO}_4) = 98 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'eau	$\rho(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de FARADAY	$\mathcal{F} = e\mathcal{N}_A = 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Potentiels standard à 25 °C	$E_1^\circ(\text{PbSO}_4(\text{s})/\text{Pb}(\text{s})) = -0,35 \text{ V}$ $E_2^\circ(\text{PbO}_2(\text{s})/\text{PbSO}_4(\text{s})) = 1,69 \text{ V}$
On assimile la quantité $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10$ à 0,06 V à $T = 298 \text{ K}$ avec R la constante molaire du gaz parfait. La notation $[X]$ représente la concentration molaire volumique de l'espèce X .	

Rappel : bien que ces données soient fournies avec plusieurs chiffres significatifs, les résultats numériques seront donnés avec UN SEUL chiffre significatif.

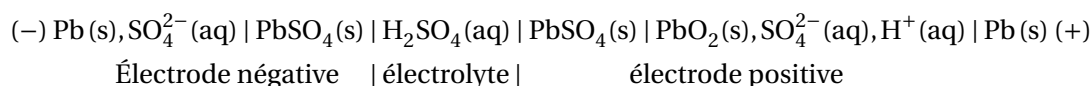
Historiquement, les batteries contenues dans les voitures sont au plomb (figure III-1).



FIGURE III-1 – Une batterie au plomb commerciale

- ❑ 1 — Préciser la composition d'un atome de plomb $^{207}_{82}\text{Pb}$.
- ❑ 2 — Les quatre isotopes stables du plomb ^{204}Pb , ^{206}Pb , ^{207}Pb et ^{208}Pb , sont présents dans la nature dans des proportions respectives de $x\%$, $y\%$, 22 % et 52 %. Définir le mot isotope. Donner les équations permettant de calculer les pourcentages x et y . On ne cherchera pas à déterminer x et y .
- ❑ 3 — Le plomb cristallise dans le système cubique à faces centrées (CFC), avec un paramètre de maille $a = 5,0 \times 10^2 \text{ pm}$. Faire un schéma de la maille conventionnelle et calculer la masse volumique moyenne du plomb.

Le schéma d'un élément d'une batterie de voiture au plomb est le suivant :



Un élément de batterie est constitué d'une électrode de plomb Pb et d'une électrode de dioxyde de plomb PbO_2 plongeant dans une solution aqueuse concentrée d'acide sulfurique H_2SO_4 avec présence d'un précipité de sulfate de plomb PbSO_4 . À l'électrode positive, le plomb Pb sert uniquement de support conducteur.

□ 4 — La solution aqueuse d'acide sulfurique utilisée est en général à 33 % en masse en H_2SO_4 . En déduire que sa concentration molaire est $C = 4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

□ 5 — En considérant le diacide H_2SO_4 comme fort pour ses deux acidités et en assimilant l'activité d'un soluté à la valeur numérique de sa concentration (exprimée en $\text{mol} \cdot \text{L}$), estimer le pH de la solution d'acide sulfurique à 33 %. Commenter. On donne $\log_{10}(2) = 0,3$.

□ 6 — Le produit de solubilité du sulfate de plomb est $K_s = 1,6 \times 10^{-8}$. Calculer la concentration en quantité de matière d'ions Pb^{2+} pour laquelle le solide apparaît dans la solution sulfurique à 33 %. Donner la forme prépondérante sous laquelle se trouve le plomb au degré d'oxydation II au-delà de cette valeur de concentration.

□ 7 — Écrire les demi-réactions anodique (1) et cathodique (2) relatives au plomb. En déduire l'équation-bilan de réaction de décharge, puis l'équation-bilan de réaction de recharge.

□ 8 — Calculer la fém e d'un élément de batterie, en considérant $[\text{H}^+]^2 [\text{SO}_4^{2-}] / (C^\circ)^3 = 100$ avec $C^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}$. Calculer le nombre d'éléments à associer pour réaliser une batterie 12 V et indiquer le mode d'association.

On donne en figure III-2 les courbes courant-potentiel relatives à la batterie au plomb.

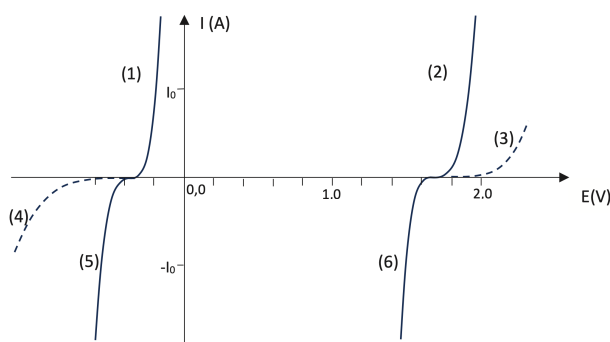


FIGURE III-2 – Courbes intensité-potentiel d'une batterie au plomb

□ 9 — Identifier les courbes (1) à (6), sachant que les courbes en pointillés sont relatives aux couples de l'eau.

□ 10 — Évaluer avec deux chiffres significatifs la tension réellement disponible à la décharge de la batterie pour l'intensité I_0 indiquée sur la figure III-2.

□ 11 — Calculer la tension du générateur permettant la recharge avec une intensité I_0 . Identifier le risque que l'on prend en augmentant cette tension, la batterie étant scellée.

Outre sa tension, l'une des principales caractéristiques d'une batterie est sa capacité, c'est-à-dire la charge Q pouvant être extraite de la batterie.

□ 12 — On considère une batterie de capacité $Q = 40 \text{ A} \cdot \text{h}$. Calculer la masse de plomb oxydée si l'on décharge la batterie à 50 %.

□ 13 — L'un des principaux défauts de cette batterie est sa faible énergie massique w . Calculer l'énergie massique de la batterie représentée **figure III-1**, dont la masse est $m = 9,8 \text{ kg}$. On donnera le résultat en $\text{Wh} \cdot \text{kg}^{-1}$.

La fin de vie des batteries au plomb est généralement due à la dégradation de la grille de plomb à la borne positive, qui peut s'oxyder en PbO_2 .

□ 14 — Écrire la demi-équation électronique correspondante. Cette dégradation aura-t-elle lieu à la charge ou à la décharge de la batterie ?