

DS n° 6

Sujet « facile »

Partie I — Acoustique d'une cloison (CCINP PSI 2025)

1 — Modélisation de l'onde

□ 1 — Approximation acoustique :

- $|p| \ll P_0$, $|\mu| \ll \rho_0$, $|v_1| \ll c$: les grandeurs caractéristiques de l'onde ainsi que leurs dérivées spatiale et temporelle sont des infiniment petits du même ordre;
- l'évolution de l'air est isentropique (on néglige les phénomènes irréversibles : viscosité et diffusion thermique).
- on néglige la pesanteur

□ 2 — Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule d'air s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \right) dV = -\text{grad} P dV.$$

La projection selon $\vec{e}_x$ s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV = -\frac{\partial P}{\partial x} dV.$$

On a donc

$$[\rho_0 + \mu(x, t)] \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$$

soit en ne gardant que les termes d'ordre 1

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1)$$

□ 3 — L'équation locale de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho_0 + \mu(x, t))v]}{\partial x} = 0.$$

En ne gardant que les termes d'ordre 1 on obtient

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

□ 4 — L'équation (6) donne

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}.$$

L'équation (7) donne

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = -\rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Avec $\mu = \rho_0 \chi_s p$, l'équation (7) s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

En utilisant le théorème de Schwarz, on obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

La surpression acoustique vérifie donc l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}.$$

2 — Transmission du son à travers une cloison

1 Onde incidente

□ 5 — L'onde incidente étant une onde progressive harmonique dans le sens des x croissants, son expression complexe est

$$\underline{p}_i(x, t) = p_{\text{im}} e^{i(\omega t - kx)}.$$

L'onde de vitesse s'écrit de même

$$\underline{v}_i(x, t) = v_{\text{im}} e^{i(\omega t - kx)}$$

soit avec $Z = p_{\text{im}} / v_{\text{im}}$

$$\underline{v}_i(x, t) = \frac{p_{\text{im}}}{Z} e^{i(\omega t - kx)}.$$

□ 6 — L'équation (6) s'écrit en complexe

$$i\omega \rho_0 \underline{v}_i = ik \underline{p}_i,$$

d'où

$$\underline{v}_i = \frac{k}{\omega \rho_0} \underline{p}_i = \frac{1}{\rho_0 c_0} \underline{p}_i.$$

On a donc pour les amplitudes $p_{\text{im}} = \rho_0 c_0 v_{\text{im}} = Z v_{\text{im}}$, d'où

$$Z = \rho_0 c_0.$$

2 Onde réfléchie

Pour l'onde réfléchie, on note $p_r(x, t)$ la surpression acoustique et $v_r(x, t)$ la vitesse particulière de l'air. On désigne par $\underline{p}_r(x, t)$ et $\underline{v}_r(x, t)$ les expressions complexes correspondantes. On note $\underline{p}_{\text{rm}}$ l'amplitude complexe de l'onde réfléchie.

□ 7 — L'onde réfléchie étant une onde progressive harmonique dans le sens des x décroissants, son expression complexe est

$$\underline{p}_i(x, t) = p_{rm} e^{i(\omega t + kx)}.$$

L'équation (6) s'écrit en complexe

$$i\omega \rho_0 \underline{v}_i = -ik \underline{p}_i,$$

d'où

$$\underline{v}_i(x, t) = -\frac{p_{rm}}{Z} e^{i(\omega t + kx)}.$$

3 Onde transmise

□ 8 — L'onde transmise étant une onde progressive harmonique dans le sens des x croissants, son expression complexe est

$$\underline{p}_t(x, t) = p_{tm} e^{i(\omega t - kx)}.$$

Avec le même raisonnement qu'à la question 5, l'onde de vitesse transmise est

$$\underline{v}_t(x, t) = \frac{p_{tm}}{Z} e^{i(\omega t - kx)}.$$

4 Réponse fréquentielle de la cloison

□ 9 — La pression dans l'air est

$$\underline{p}(x, t) = \begin{cases} \underline{p}_i(x, t) + \underline{p}_r(x, t) & \text{pour } x < 0 \\ \underline{p}_t(x, t) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

La cloison, située en $x = 0$ est soumise à la force

$$\vec{F} = +(p_i(0, t) + p_r(0, t))S_c - p_t(0, t)S_c.$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au piston situé au premier ordre en $x = 0$ (son déplacement, dû au déplacement des particules d'air sous l'effet d'une onde acoustique, est un infiniment petit du premier ordre) :

$$M_c \frac{d^2 X_c}{dt^2} = (p_i(0, t) + p_r(0, t) - p_t(0, t)) S_c$$

soit en notation complexe

$$-\omega^2 M_c X_m e^{i\omega t} = (p_{im} + \underline{p}_{rm} - \underline{p}_{tm}) S_c e^{i\omega t}.$$

On a donc

$$-\omega^2 M_c X_m = (p_{im} + \underline{p}_{rm} - \underline{p}_{tm}) S_c. \quad (3)$$

□ 10 — La vitesse des particules d'air est

$$\underline{v}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{Z} (\underline{p}_i(x, t) - \underline{p}_r(x, t)) & \text{pour } x < 0 \\ \frac{1}{Z} \underline{p}_t(x, t) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

La continuité de la vitesse au niveau de la cloison s'écrit

$$\frac{1}{Z} (\underline{p}_i(0, t) - \underline{p}_r(0, t)) = \frac{1}{Z} \underline{p}_t(0, t)$$

soit

$$p_{im} e^{i\omega t} - \underline{p}_{rm} e^{i\omega t} = \underline{p}_{tm} e^{i\omega t}$$

d'où

$$p_i - \underline{p}_{rm} = \underline{p}_{tm}. \quad (4)$$

□ 11 — Au niveau de la cloison, la vitesse de l'air est égale à celle de la cloison par continuité, soit

$$\frac{dX_c}{dt} = \underline{v}(0^-, t) = \frac{1}{Z} (p_i e^{i\omega t} - \underline{p}_{rm} e^{i\omega t})$$

d'où en simplifiant par $e^{i\omega t}$

$$i\omega X_m = \frac{p_i - \underline{p}_{rm}}{Z}. \quad (5)$$

□ 12 — Avec $\underline{p}_{rm} = \underline{r} p_{im}$ et $\underline{p}_{tm} = \underline{t} p_{im}$, les équations (4), (4) et (5) s'écrivent

$$-\omega^2 M_c X_m = (1 + \underline{r} - \underline{t}) p_{im} S_c,$$

$$1 - \underline{r} = \underline{t}$$

et

$$Z i\omega X_m = (1 - \underline{r}) p_{im}.$$

On a donc

$$-\omega^2 M_c X_m = (1 + \underline{r} - \underline{t}) \frac{i\omega X_m Z}{1 - \underline{r}} S_c$$

soit

$$i(1 - \underline{r}) M_c = (1 + \underline{r} - \underline{t}) Z S_c = 2\underline{r} Z S_c$$

d'où

$$i M_c \omega = [2 Z S_c + i M_c \omega] \underline{r}.$$

On a donc

$$\underline{r} = \frac{i M_c \omega}{2 Z S_c + i M_c \omega} = \frac{i\omega}{\frac{2 Z S_c}{M_c} + i\omega} = \frac{i\omega}{\omega_0 + i\omega},$$

soit

$$\underline{r} = \frac{i \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Le coefficient de transmission est donné alors par

$$\underline{t} = 1 - \underline{r} = 1 - \frac{i \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}$$

soit

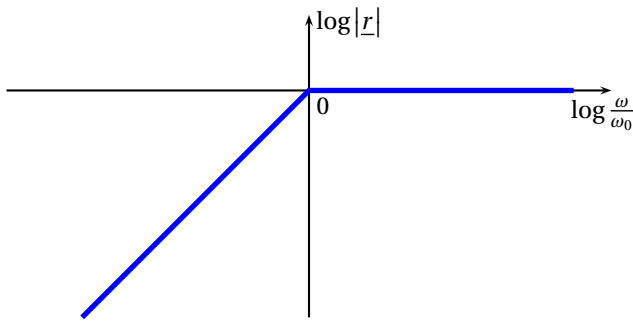
$$\underline{t} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

□ 13 — Expressions asymptotiques pour le coefficient de réflexion :

$$\omega \ll \omega_0 : \text{ on a } \underline{r} \approx i \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \log |\underline{r}| = \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\omega \gg \omega_0 : \text{ on a } \underline{r} \approx 1 \text{ et } \log |\underline{r}| = 0.$$

On en déduit le diagramme asymptotique

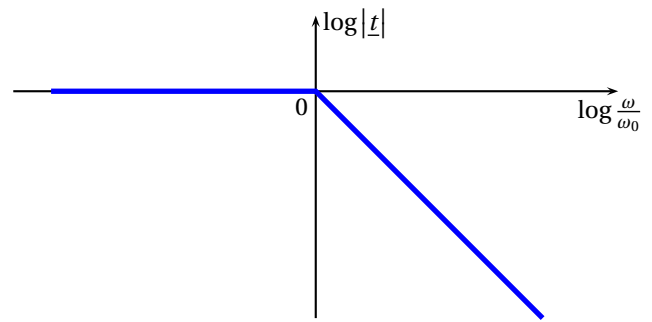


Expressions asymptotiques pour le coefficient de transmission :

$\omega \ll \omega_0$: on a $\underline{t} \approx 1$ et $\log|\underline{t}| = 0$

$\omega \gg \omega_0$: on a $\underline{t} \approx \frac{1}{i\frac{\omega}{\omega_0}}$ et $\log|\underline{t}| = -\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

On en déduit le diagramme asymptotique



Tracer les diagrammes asymptotiques représentant d'une part $\log|\underline{r}|$ et d'autre part $\log|\underline{t}|$ en fonction de $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

□ 14 — Pour la **transmission**, la cloison se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre. Elle laisse donc passer les nuisances sonores de basse fréquence, c'est-à-dire **graves**.

Pour la réflexion, la cloison se comporte comme un filtre passe-haut du premier ordre. L'échos **réfléchi** est donc plus intense pour les nuisances sonores **aiguës**.

Partie II – Télécommunications (Mines-Ponts PSI 2021)

1 Le fil du télégraphe

□ 1 — Les 32 lettres et les 10 chiffres (0 à 9) représentent 42 caractères.

On a $2^5 = 32$ et $2^6 = 64$; cette dernière valeurs suffit à couvrir l'alphabet, les chiffres et la ponctuation. Il faut donc **coder sur 6 bits**.

On peut estimer qu'une page contient environ 30 lignes, chacune comprenant environ 100 caractères. Cela fait donc 3000 caractères par page. À raison de 2 secondes par caractère (3 bits par seconde, et 6 bits par caractère), il faut **6000 s**, soit **1 h 40 min** pour transmettre une page.

2 Transmission par une ligne bifilaire

□ 2 — On écrit les équations aux dimensions à partir des équations couplées :

$$\frac{[U]}{L} = \frac{[R_0]}{[\chi_0]} \frac{I}{T} \quad \text{et} \quad \frac{I}{L} = \frac{1}{[R_0][\chi_0]} \frac{[U]}{T}$$

On en déduit

$$\frac{[U]}{L} \frac{L}{I} = [R_0]^2 \frac{I}{T} \frac{T}{[U]}$$

d'où

$$[U] = [R_0] I.$$

La constante R_0 a donc la dimension d'une résistance.

R_0 s'exprime en ohm (Ω).

On a donc

$$[\chi_0] = \frac{[R_0] I}{[U]} \frac{L}{T} = \frac{L}{T}.$$

La constante χ_0 a donc la dimension d'une vitesse.

χ_0 s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On a

$$\frac{[U]}{L} = \frac{[R_0]}{[\ell_0]} I$$

d'où

$$[\ell_0] = \frac{[R_0] I}{[U]} L = L.$$

La constante ℓ_0 a donc la dimension d'une longueur.

ℓ_0 s'exprime en mètre (m).

□ 3 — Dans le cas d'une ligne à un seul fil, c'est la Terre qui referme le circuit (le courant revient par le sol). Le modèle de la ligne bifilaire reste donc valable.

□ 4 — En dérivant la 1^{re} équation par rapport à z , on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{R_0}{\chi_0} \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} - \frac{R_0}{\ell_0} \frac{\partial i}{\partial z}.$$

La seconde équation donne par dérivation selon t

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = \frac{1}{R_0 \chi_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\ell_0 \chi_0} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On cherche une solution en onde pseudo-progressive harmonique

$$\bar{u}(z, t) = \underline{U}_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)}.$$

On obtient après simplification

$$-\bar{k}^2 = -\frac{\omega^2}{\chi_0^2} + \frac{i\omega}{\ell_0 \chi_0}$$

soit

$$\bar{k}^2 = \frac{\omega^2}{\chi_0^2} \left(1 - i \frac{\chi_0}{\ell_0 \omega} \right).$$

□ 5 — Notons $\bar{k} = k' + ik''$. L'onde s'écrit

$$\bar{u}(z, t) = \bar{U}_0 e^{i(\omega t - k'z - ik''z)} = \bar{U}_0 e^{k''z} e^{i(\omega t - k'z)}.$$

Le terme limitant la propagation est la partie imaginaire de $\bar{k}$, qui traduit une absorption.

□ 6 — D'après la relation de dispersion, on a

$$\bar{k} = \frac{\omega}{\chi_0} \left(1 - i \frac{\chi_0}{\ell_0 \omega} \right)^{1/2}.$$

Le terme d'absorption étant traité comme un infiniment petit d'ordre un, on peut linéariser

$$\bar{k} = \frac{\omega}{\chi_0} \left(1 - i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega} \right) = \frac{\omega}{\chi_0} - \frac{i}{2\ell_0}.$$

La vitesse de phase est donnée par $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\omega_0/\chi_0}$, soit

$$v_\varphi = \chi_0.$$

La vitesse de phase ne dépend pas de ω .

Il n'y a pas de dispersion à cet ordre du développement.

□ 7 — L'onde de tension, pseudo-progressive selon les z croissants, est donnée par l'expression générale $\bar{u}(z, t) = U_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)}$, soit ici

$$\bar{u}(z, t) = U_0 \exp\left(-\frac{z}{2\ell_0}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{\chi_0}z\right)\right].$$

On a

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{R_0 \chi_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{R_0 \chi_0} U_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)}.$$

En intégrant par rapport à z :

$$\bar{u}(z, t) = \frac{\omega}{R_0 \chi_0 \bar{k}} U_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)} = \frac{1}{R_0} \frac{U_0}{\left(1 - i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega}\right)} e^{i(\omega t - \bar{k}z)}.$$

Comme $\frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega} \ll 1$ (absorption traitée comme une perturbation), on peut linéariser

$$\frac{1}{\left(1 - i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega}\right)} \approx 1 + i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega}.$$

En séparant les parties réelle et imaginaire de $\bar{k}$ dans l'exponentielle, on obtient

$$\bar{u}(z, t) = \frac{U_0}{R_0} \left(1 + i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega} \right) \exp\left(-\frac{z}{2\ell_0}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{\chi_0}z\right)\right].$$

La puissance moyenne est donnée par

$$\mathcal{P}_m(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{u} \bar{u}^*) = \frac{U_0^2}{2R_0} \exp\left(-\frac{z}{\ell_0}\right) \operatorname{Re}\left(1 + i \frac{\chi_0}{2\ell_0 \omega}\right)$$

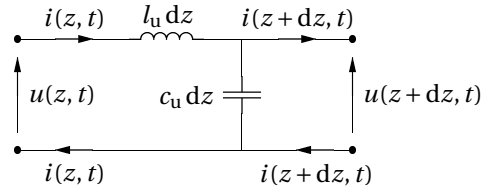
soit

$$\mathcal{P}_m(z) = \frac{U_0^2}{2R_0} \exp\left(-\frac{z}{\ell_0}\right).$$

La puissance moyenne transportée décroît exponentiellement lors de la propagation avec la distance caractéristique ℓ_0 .

3 Câble coaxial

□ 8 — Une longueur dz du câble est modélisée par



On a

$$l_u dz \frac{\partial i}{\partial t} = u(z, t) - u(z + dz, t) = -\frac{\partial u}{\partial z} dz$$

soit

$$l_u \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial z}.$$

On a

$$c_u dz \frac{\partial u}{\partial t} = i(z, t) - i(z + dz, t) = -\frac{\partial i}{\partial z} dz$$

soit

$$c_u \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial z}.$$

On a donc d'une part

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_u} \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{c_u} \times \left(-\frac{1}{l_u} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{l_u c_u} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

d'où l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{l_u c_u} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

D'autre part

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = -\frac{1}{l_u} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{l_u} \times \left(-\frac{1}{c_u} \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{l_u c_u} \frac{\partial^2 i}{\partial z^2},$$

d'où l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{l_u c_u} \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = 0.$$

□ 9 — Les ondes de tension et de courant vérifient la même équation de d'Alembert avec la célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{l_u c_u}}.$$

On calcule

$$c = \frac{1}{\sqrt{0,32 \times 10^{-6} \times 53 \times 10^{-12}}} = \frac{10^{10}}{\sqrt{1696}} \approx \frac{10^9}{\sqrt{17}}.$$

On a $4,1 \times 4,1 = 16,8 \approx 17$, donc

$$c = \frac{10^9}{4,1} \approx \frac{10^9}{4} = 0,25 \times 10^9$$

soit $c = 2,5 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

► La calcul exact donne $c = 2,43 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La fiche technique donne la durée Δt pour parcourir un mètre, soit $\Delta t = 4,0 \times 10^{-9} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}$. La célérité correspondante est donc $\frac{1}{4,0 \times 10^{-9}} = 2,5 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La valeur calculée à partir du modèle électrique est en accord avec la valeur de la fiche technique.

□ 10 — Étant donnée une onde de tension $u_+(z, t)$ progressive dans le sens des z croissants, si $i_+(z, t)$ est l'onde de courant associée, l'impédance caractéristique du câble est définie par

$$u_+(z, t) = Z_0 i_+(z, t).$$

Considérons une onde harmonique

$$\bar{u}_+(z, t) = U_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

On a

$$l_u \frac{\partial \bar{i}}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{u}_+(z, t)}{\partial z} = ik U_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

d'où

$$l_u \bar{i}(z, t) = \frac{-ik}{i\omega} U_0 e^{i(\omega t - kz)} = \frac{k}{\omega} \bar{u}_+(z, t).$$

L'équation de d'Alembert entraînant la relation de dispersion $\omega = kc$, on obtient

$$\bar{u}_+(z, t) = l_u c \bar{i}(z, t) = \sqrt{\frac{l_u}{c_u}} \bar{u}_+(z, t).$$

On en déduit l'impédance caractéristique

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l_u}{c_u}}.$$

On calcule

$$Z_0 = \sqrt{\frac{32 \times 10^{-8}}{53 \times 10^{-12}}} = \sqrt{\frac{32}{53}} 10^2.$$

On a $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$, d'où

$$\sqrt{\frac{32}{53}} = 4\sqrt{\frac{2}{53}} = \frac{4}{\sqrt{26,5}} \approx \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

On a donc $Z_0 \approx 8 \times 10^1 \Omega$, valeur cohérente avec la fiche technique.

► La valeur exacte est $Z_0 = 77,7 \Omega$.

□ 11 — L'onde de tension est

$$\bar{u}_+(z, t) = \bar{U}_+ e^{i(\omega t - kz)}.$$

On a $\bar{u}_+(z, t) = Z_0 \bar{i}_+(z, t)$, d'où

$$\bar{i}_+(z, t) = \frac{\bar{U}_+}{Z_0} e^{i(\omega t - kz)}.$$

L'onde de tension réfléchie, progressive dans le sens des z décroissants, est de la forme

$$\bar{u}_-(z, t) = \bar{U}_- e^{i(\omega t + kz)}.$$

Pour une onde se propageant dans le sens des z décroissants, on a $\bar{u}_-(z, t) = -Z_0 \bar{i}_-(z, t)$, d'où

$$\bar{i}_-(z, t) = -\frac{\bar{U}_-}{Z_0} e^{i(\omega t + kz)}.$$

L'onde de tension dans le câble est $\bar{u}(z, t) = \bar{u}_+(z, t) + \bar{u}_-(z, t)$, soit

$$\bar{u}(z, t) = \bar{U}_+ e^{i(\omega t - kz)} + \bar{U}_- e^{i(\omega t + kz)}.$$

L'onde de courant dans le câble est $\bar{i}(z, t) = \bar{i}_+(z, t) + \bar{i}_-(z, t)$, soit

$$\bar{i}(z, t) = \frac{1}{Z_0} \left[\bar{U}_+ e^{i(\omega t - kz)} - \bar{U}_- e^{i(\omega t + kz)} \right].$$

L'impédance en $z = 0$ impose la relation

$$\bar{u}(0, t) = \bar{Z}_e \bar{i}(0, t),$$

soit

$$\bar{U}_+ + \bar{U}_- = \frac{\bar{Z}_e}{Z_0} [\bar{U}_+ - \bar{U}_-].$$

On en déduit

$$\bar{U}_- = \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \bar{U}_+.$$

L'onde de tension réfléchie s'écrit donc

$$\bar{u}_-(z, t) = \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \bar{U}_+ e^{i(\omega t + kz)}.$$

L'onde de courant réfléchie est alors donnée par

$$\bar{i}_-(z, t) = -\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \frac{\bar{U}_+}{Z_0} e^{i(\omega t + kz)}.$$

□ 12 — Compte tenu du résultat précédent, l'onde résultante de tension dans le câble s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{u}(z, t) &= \bar{U}_+ e^{i(\omega t - kz)} + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \bar{U}_+ e^{i(\omega t + kz)} \\ &= \bar{U}_+ e^{i\omega t} \left[e^{-ikz} + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} e^{ikz} \right] \end{aligned}$$

Pour faire apparaître $\sin(kz) = \frac{e^{ikz} - e^{-ikz}}{2i}$, on écrit $e^{ikz} = e^{ikz} - e^{-ikz} + e^{-ikz}$, d'où

$$\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} e^{ikz} = \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} (e^{ikz} - e^{-ikz}) + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} e^{-ikz}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \bar{u}(z, t) &= \bar{U}_+ e^{i\omega t} \left[e^{-ikz} + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} (e^{ikz} - e^{-ikz}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} e^{-ikz} \right] \end{aligned}$$

soit

$$\bar{u}(z, t) = \bar{U}_+ e^{i\omega t} \left[\frac{2\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} e^{-ikz} + \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} (e^{ikz} - e^{-ikz}) \right]$$

soit

$$\bar{u}(z, t) = 2\bar{U}_+ \frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} e^{i(\omega t - kz)} + 2i\bar{U}_+ \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} e^{i\omega t} \sin(kz)$$

En notant $\alpha = \arg\left(\frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0}\right)$ et en supposant $\bar{U}_+ = U_0$ réel pour simplifier, le premier terme s'écrit

$$\bar{u}_p(z, t) = 2U_0 \left| \frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| e^{i(\omega t - kz + \alpha)}.$$

En notant $\beta = \arg\left(\frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0}\right)$, le second terme s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(z, t) &= 2iU_0 \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \sin(kz) e^{i(\omega t + \beta)} \\ &= 2U_0 \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right| \sin(kz) e^{i(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Le premier terme décrit donc une onde progressive d'amplitude

$$U_p = 2U_0 \left| \frac{\bar{Z}_e}{\bar{Z}_e + Z_0} \right|$$

tandis que le second terme décrit une onde stationnaire d'amplitude

$$U_s = 2U_0 \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e + Z_0} \right|.$$

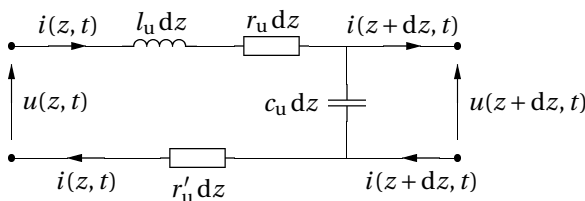
Le rapport $\rho = U_s/U_p$ s'écrit alors

$$\rho = \left| \frac{\bar{Z}_e - Z_0}{\bar{Z}_e} \right|.$$

► Ce rapport est usuellement appelé *taux d'onde stationnaire* (TOS).

On a $\rho_0 = 0$ pour $\bar{Z}_e = Z_0$.

□ 13 — On ajoute les résistances linéiques de chaque ligne :



La loi des nœuds permettant de relier de courant traversant le condensateur à la tension à ses bornes est inchangée, soit

$$c_u \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial z}.$$

La loi des mailles s'écrit

$$(r'_u + r_u) dz i(z, t) + l_u dz \frac{\partial i}{\partial t} = u(z, t) - u(z + dz, t) = -\frac{\partial u}{\partial z} dz$$

d'où

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = (r'_u + r_u) i + l_u \frac{\partial i}{\partial t}.$$

On a donc

$$c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z}$$

d'où

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= (r'_u + r_u) \frac{\partial i}{\partial z} + l_u \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} \\ &= -c_u (r'_u + r_u) \frac{\partial u}{\partial t} - l_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = l_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_u (r'_u + r_u) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

► Cette équation d'onde a la même forme que celle établie à la question 4.

La célérité correspondante est $c = \frac{1}{\sqrt{l_u c_u}}$, et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_u (r'_u + r_u) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

En cherchant une onde pseudo-progressive harmonique de la forme $\bar{u}(z, t) = U_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)}$, on obtient

$$-\bar{k}^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + i\omega c_u (r'_u + r_u)$$

soit

$$\bar{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{(r_u + r'_u) c_u}{\omega} c^2 \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{(r_u + r'_u)}{\omega} \frac{c_u}{l_u c_u} \right)$$

d'où la relation de dispersion

$$\bar{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 - i \frac{r_u + r'_u}{l_u \omega} \right)^{1/2}.$$

En considérant les pertes comme une perturbation, on peut linéariser l'expression

$$\bar{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 - i \frac{r_u + r'_u}{2 l_u \omega} \right)$$

L'onde de tension s'écrit donc

$$\bar{u}(z, t) = U_0 \exp\left(-\frac{r_u + r'_u}{2 l_u c} z\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z\right)\right]$$

On observe un terme d'atténuation $\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$ faisant apparaître une distance caractéristique

$$\delta = \frac{2 l_u c}{r_u + r'_u}.$$

► On remarque que $l_u c = \frac{l_u}{\sqrt{l_u c_u}} = \sqrt{\frac{l_u}{c_u}} = Z_0$, d'où

$$\delta = \frac{2Z_0}{r_u + r'_u}.$$

□ 14 — On calcule avec la dernière expression

$$\delta = \frac{2 \times 75}{12,1} \approx \frac{75}{6} = 12,5 \text{ km}.$$

La distance caractéristique est $\delta = 12,5 \text{ km}$.

Cette valeur est très élevée devant la longueur d'un câble en utilisation domestique (à l'échelle d'un immeuble). On pourra négliger l'atténuation dans ce contexte.

En revanche, un tel câble ne peut être utilisé pour des transmissions à l'échelle d'un pays, ou intercontinentales.

À très haute fréquence, l'effet de peau réduit la section du câble effectivement traversée par les courants, ce qui revient à augmenter les résistances r_u et r'_u . La distance δ diminue donc : les pertes peuvent devenir importantes.

□ 15 — Les décodeurs D et D' sont tous les deux adaptés aux câbles. Cela signifie que leur impédance vaut Z_0 , et qu'il n'y a pas d'onde réfléchie au niveau des décodeurs.

On n'observe donc pas d'onde réfléchie dans les câbles situés en $z > 0$.

Le câble situé en $z < 0$ est branché sur deux câbles en parallèle d'impédances identiques Z_0 . Leur impédance vu du câble situé en $z < 0$ est donc $Z_0/2$ (association en parallèle), et n'est plus adaptée au câble : il y a donc une onde réfléchie.

Notons :

U_0 l'amplitude de l'onde incidente en $z = 0$ dans le premier câble;

$\bar{U}_r$ l'amplitude de l'onde réfléchie en $z = 0$;

U'_0 les amplitudes (identiques) des ondes de tension partant dans les câbles situés en $z > 0$.

La continuité de la tension en $z = 0$ s'écrit

$$U_0 + \bar{U}_r = U'_0. \quad (6)$$

L'amplitude du courant incident dans le premier câble est $I_0 = \frac{U_0}{Z_0}$; celle du courant réfléchi est $\bar{I}_r = -\frac{\bar{U}_r}{Z_0}$. L'amplitude du courant dans chacun des deux autres câbles est $\frac{U'_0}{Z_0}$.

La loi des nœuds en $z = 0$ s'écrit donc

$$\frac{U_0}{Z_0} - \frac{\bar{U}_r}{Z_0} = \frac{2U'_0}{Z_0}.$$

soit

$$U_0 - \bar{U}_r = 2U'_0. \quad (7)$$

En éliminant U'_0 des équations (6) et (7) on obtient

$$\bar{U}_r = -\frac{1}{3}U_0.$$

L'amplitude de l'onde réfléchie vaut donc $\frac{U_0}{3}$.

□ 16 — À partir des équations (6) et (7), on obtient l'amplitude des ondes transmises

$$U'_0 = \frac{2U_0}{3}.$$

Cette amplitude est plus faible que l'amplitude U_0 attendue en l'absence de réflexion en $z = 0$. On peut détecter la présence de la dérivation pirate en mesurant l'affaiblissement du signal reçu par le décodeur D .

Partie III — La batterie au plomb (CCINP MP 2025)

□ 1 — Un atome de plomb est constitué de **82 protons**, **125 neutrons** ($207 - 82$) et **82 électrons**.

□ 3 — Maille du système cubique face centrée :

□ 2 — Par définition des proportions, on a

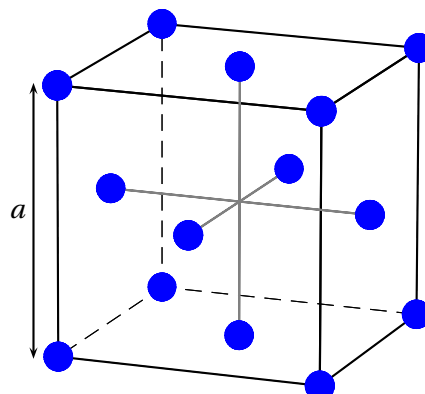
$$x + y + 22 + 52 = 100.$$

La masse molaire est la masse d'un échantillon prenant en compte tous les isotopes, pondérés par leurs proportions relatives, soit

$$\frac{x}{100} \times 204 + \frac{y}{100} \times 206 + \frac{22}{100} \times 207 + \frac{52}{100} \times 208 = 207,2$$

soit

$$2,04x + 2,06y + 2,07 \times 22 + 2,08 \times 52 = 207,2.$$



Le nombre d'atomes par maille est

$$N = \frac{1}{8} \times 8 + \frac{1}{2} \times 6 = 4$$

La masse volume vaut donc

$$\rho_{\text{Pb}} = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4M_{\text{Pb}}}{a^3 N_A}.$$

On calcule

$$\rho_{\text{Pb}} = \frac{4 \times 207,2 \times 10^{-3}}{(5 \times 10^{-10})^3 \times 6 \times 10^{23}} = \frac{8}{750} \times 10^6 = 1,1 \times 10^4$$

soit $\rho_{\text{Pb}} = 11 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

□ 4 — Avec $m_{\text{solution}} = m_{\text{H}_2\text{SO}_4} + m_{\text{H}_2\text{O}}$, on a

$$\frac{m_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{m_{\text{solution}}} = \frac{m_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{m_{\text{H}_2\text{SO}_4} + m_{\text{H}_2\text{O}}} = 0,33,$$

d'où $0,77m_{\text{H}_2\text{SO}_4} = 0,33m_{\text{H}_2\text{O}}$.

On a donc $m_{\text{H}_2\text{O}} = 2m_{\text{H}_2\text{SO}_4}$.

En notant V le volume de la solution, la concentration molaire en acide sulfurique est

$$C = \frac{n_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{V} = \frac{m_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4} V}$$

Le volume total est

$$\begin{aligned} V = V_{\text{H}_2\text{O}} + V_{\text{H}_2\text{SO}_4} &= \frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} + \frac{m_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{\rho_{\text{H}_2\text{SO}_4}} \\ &= m_{\text{H}_2\text{SO}_4} \left(\frac{2}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} + \frac{1}{\rho_{\text{H}_2\text{SO}_4}} \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4} \left(\frac{2}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} + \frac{1}{\rho_{\text{H}_2\text{SO}_4}} \right)} = \frac{1}{98 \times 10^{-3} \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{1,8} \right)} \\ &= \frac{10^3}{98 \times 2,56} \approx \frac{10^3}{250} \end{aligned}$$

soit $C = 4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

□ 5 — L'acide sulfurique étant un diacide fort, on a

$$[\text{H}^+] = 2C = 8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

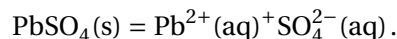
On a alors

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+] = -\log 8 = -\log 2^3 = -3 \log 2 = -3 \times 0,3$$

soit $\text{pH} = -0,9$.

Le pH est négatif : la solution est très acide, mais il est incorrect d'assimiler l'activité à la valeur numérique de la concentration exprimée en $\text{mol} \cdot \text{L}$ à ces concentrations élevées.

□ 6 — La dissolution du sulfate de plomb est



On a donc

$$K_s = [\text{Pb}^{2+}][\text{SO}_4^{2-}] = [\text{Pb}^{2+}]C,$$

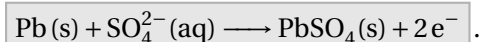
d'où

$$[\text{Pb}^{2+}] = \frac{K_s}{C} = \frac{1,6 \times 10^{-8}}{4} = \frac{16 \times 10^{-9}}{4}$$

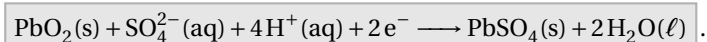
soit $[\text{Pb}^{2+}] = 4 \times 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

La valeur de la concentration pour laquelle le sulfate de plomb précipite étant très faible, on peut considérer que la forme prépondérante du plomb au degré II est $\text{PbSO}_4(\text{s})$.

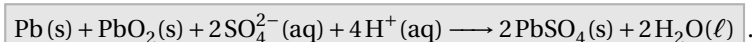
□ 7 — Pour une pile (ou batterie), la borne (–) est l'anode. Il s'y produit l'oxydation de Pb en PbSO_4 . La réaction à l'anode est donc



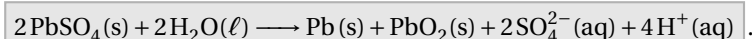
La borne (+) est la cathode, où se produit la réduction de $\text{PbO}_2(\text{s})$ en $\text{PbSO}_4(\text{s})$, selon la réaction



L'équation-bilan de la décharge est donc



La recharge correspond à la réaction de sens inverse :



□ 8 — Écrivons le potentiel de la cathode donné par la loi de Nernst :

$$E_c = E^\circ(\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4) + 0,03 \log \frac{[\text{H}^+]^4 [\text{SO}_4^{2-}]}{(C^\circ)^5}.$$

De même pour l'anode :

$$E_a = E^\circ(\text{PbSO}_4/\text{Pb}) + 0,03 \log \frac{C^\circ}{[\text{SO}_4^{2-}]}.$$

La fém est donnée par $e = E_c - E_a$, soit

$$\begin{aligned} e &= E^\circ(\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4) - E^\circ(\text{PbSO}_4/\text{Pb}) + 0,03 \log \frac{[\text{H}^+]^4 [\text{SO}_4^{2-}]^2}{(C^\circ)^6} \\ &= E^\circ(\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4) - E^\circ(\text{PbSO}_4/\text{Pb}) + 0,06 \log \frac{[\text{H}^+]^2 [\text{SO}_4^{2-}]}{(C^\circ)^3}. \end{aligned}$$

On calcule

$$e = 1,69 + 0,35 + 0,06 \log 100 = 2,04 + 0,12$$

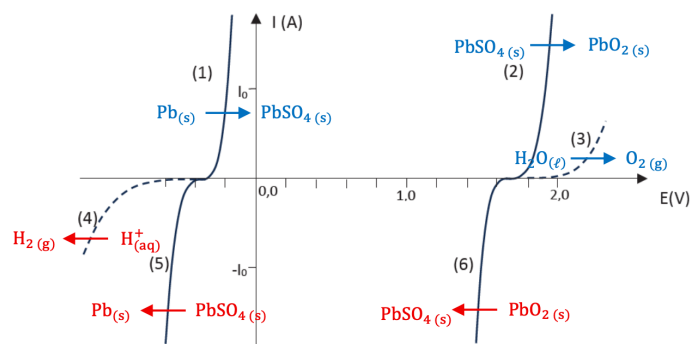
soit avec un chiffre significatif $e = 2 \text{ V}$.

Pour réaliser une batterie de 12 V, il faut donc associer **6 éléments en série**.

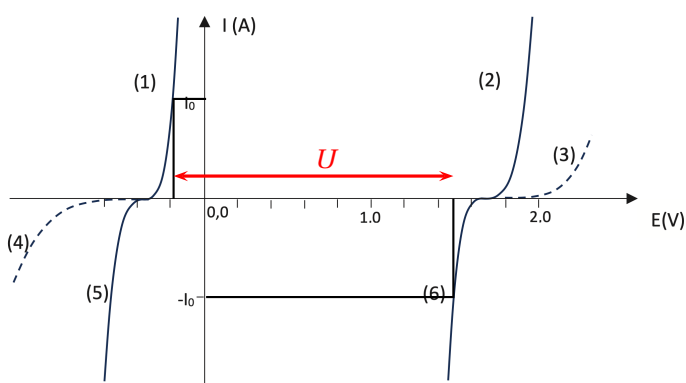
□ 9 — Compte tenu des potentiels standard, les courbes (2) et (6) correspondent au couple $\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4$ (la courbe (2) décrit l'oxydation de PbSO_4 , la courbe (6) la réduction de PbO_2).

Les courbes (1) et (5) correspondent au couple PbSO_4/Pb (la courbe (1) décrit l'oxydation de Pb , la courbe (5) la réduction de PbSO_4).

La courbe (3) correspond à l'oxydation de l'eau, tandis que la courbe (4) correspond à sa réduction.

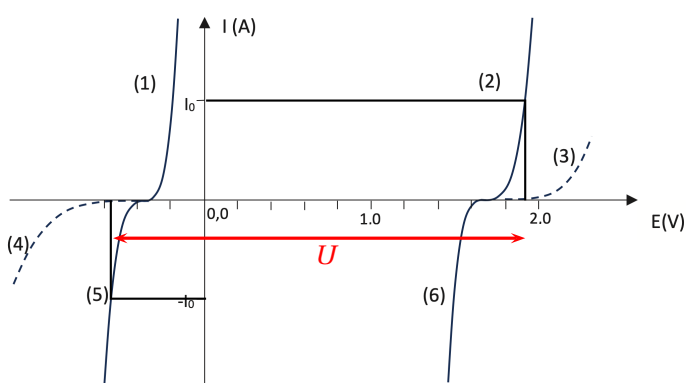


□ 10 — On reporte le potentiel anodique correspondant au courant I_0 de la courbe (1) et le potentiel cathodique correspondant au courant $-I_0$ de la courbe (6) :



La tension disponible est $U = 1,5 - (-0,2)$ soit $U = 1,7 \text{ V}$.

□ 11 — Pour la recharge, on reporte le potentiel anodique correspondant au courant I_0 de la courbe (2) et le potentiel cathodique correspondant au courant $-I_0$ de la courbe (5) :

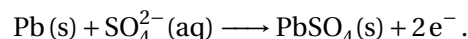


La tension nécessaire est $U = 1,9 - (-0,6)$ soit $U = 2,5 \text{ V}$

Si on augmente la tension, on peut de plus provoquer l'électrolyse de l'eau avec formation de dioxygène à l'anode et surtout de dihydrogène (explosif) à la cathode. On est d'ailleurs à la limite de l'électrolyse de l'eau lors de la recharge avec le courant I_0 (on atteint les courbes en pointillés). Dans une enceinte scellée, la formation de gaz augmente la pression à l'intérieur, pouvant provoquer son explosion.

□ 12 — Si on décharge la batterie à 50 %, la charge échangée est $Q = 20 \text{ A} \cdot \text{h}$ (soit $20 \times 3600 \text{ C}$).

L'oxydation du plomb correspond à la réaction



Si $n(\text{e}^-)$ est le nombre d'électrons échangés (en moles), la quantité de plomb oxydée est $n(\text{Pb}) = \frac{n(\text{e}^-)}{2}$.

La charge échangée étant $Q = n(\text{e}^-)\mathcal{F}$, on a donc

$$n(\text{Pb}) = \frac{Q}{2\mathcal{F}}.$$

La masse de plomb oxydée vaut donc

$$m(\text{Pb}) = \frac{Q}{2\mathcal{F}} M(\text{Pb}).$$

On calcule

$$m(\text{Pb}) = \frac{20 \times 3600}{2 \times 96500} \times 207,2 \approx \frac{10 \times 35}{100} \times 2e2$$

soit $m(\text{Pb}) \approx 7 \times 10^1 \text{ g}$.

□ 13 — La puissance délivrée par cette batterie est $P = UI$. L'énergie délivrée pendant Δt vaut donc

$$\mathcal{E} = P\Delta t = UI\Delta t = UQ.$$

L'énergie massique vaut donc

$$w = \frac{UQ}{m}.$$

On calcule

$$w = \frac{12 \times 40}{9,8} \approx \frac{12 \times 40}{10}$$

soit avec un chiffre significatif $w = 5 \times 10^1 \text{ Wh} \cdot \text{g}^{-1}$.

□ 14 — L'oxydation du plomb en oxyde de plomb correspond à la réaction électrochimique



Cette réaction se produit à l'anode.

Il faut donc que l'anode corresponde à la borne positive : c'est le cas lors de la **charge de la batterie**.