

DS n° 6

Sujet « difficile »

Le sujet comporte trois parties indépendantes.

Partie I — La lévitation acoustique (Mines-Ponts PSI 2020)

□ 1 — Certaines hypothèses de l'approximation acoustique sont données dans l'énoncé : $|\mu_1| \ll \mu_0$, $|p_1| \ll P_0$, évolution adiabatique et réversible du fluide.

Il faut ajouter que $|v_1| \ll c$, célérité des ondes sonores dans le fluide, que les dérivées spatiale et temporelle des termes perturbatifs sont aussi des infiniment petits du premier ordre, et que la pesanteur est négligée.

□ 2 — L'accélération de la particule de fluide est donnée par la dérivée particulaire du champ des vitesses :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}.$$

Le second terme — dérivée convective — est du deuxième ordre en $\vec{v}$, et est donc négligeable dans le cadre de l'approximation acoustique ; on a donc

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

□ 3 — La relation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule de fluide s'écrit

$$\mu_0 \vec{a} \, d\tau = -\text{grad} P \, d\tau$$

soit en projection sur $\hat{e}_z$

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z}.$$

Écrire, en projection sur $\hat{e}_z$, l'équation aux dérivées partielles obtenue en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide de volume $d\tau$ et de masse $\mu_0 d\tau$ et en déduire une équation aux dérivées partielles reliant les seules grandeurs μ_0 , v_1 et p_1 .

□ 4 — La conservation de la masse linérisée s'écrit

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

La relation linéarisée traduisant le caractère isentropique de l'évolution du fluide sous l'effet de l'onde acoustique s'écrit

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1.$$

□ 5 — Les deux dernières relations donnent

$$\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

D'après la question 3, on a

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial z}.$$

On a de plus

$$\chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t} = -\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}.$$

D'après le théorème de Schwarz on a

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t}.$$

On en déduit

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\mu_0 \chi_S}.$$

C'est l'équation de d'Alembert.

□ 6 — L'équation de diffusion thermique s'écrit

$$\mu_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Le temps caractéristique τ_{diff} pour que la diffusion thermique se produise sur la longueur d'onde λ vérifie donc

$$\mu_0 c_p \frac{T}{\tau_{\text{diff}}} \approx \kappa \frac{T}{\lambda^2}$$

soit

$$\tau_{\text{diff}} \approx \frac{\mu_0 c_p \lambda^2}{\kappa} = \frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa f^2}.$$

car $\lambda = c/f$.

Le temps caractéristique de l'onde acoustique est sa période

$$\tau_{\text{onde}} = \frac{1}{f}.$$

L'évolution peut être considérée comme adiabatique si $\tau_{\text{diff}} \gg \tau_{\text{onde}}$, soit si

$$\frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa f^2} \gg \frac{1}{f}$$

Il faut donc

$$f \ll \frac{\mu_0 c_p c^2}{\kappa}.$$

On peut prendre le critère

$$f \leq f_{\max} \quad \text{avec} \quad f_{\max} = \frac{\mu_0 c_p c^2}{100\kappa}.$$

On calcule

$$f_{\max} = \frac{1,2 \times 10^3 \times (3,4 \times 10^2)^2}{100 \times 3 \times 10^{-2}} \approx \frac{1,2 \times 12}{3} 10^7$$

soit $f_{\max} \approx 4 \times 10^7 \text{ Hz}$.

Cette condition est largement respectée dans le cadre de cette expérience pour $f = 20 \text{ kHz}$.

□ 7 — La vitesse de la membrane est $u_m(t) = U_m \sin(\omega t)$.

Comme $u_m(t) = \frac{dz}{dt}$, on a

$$z(t) = -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega t) = \frac{U_m}{2\pi f} \cos(\omega t + \pi).$$

L'amplitude de la vibration vaut donc

$$Z_m = \frac{U_m}{2\pi f}.$$

On calcule

$$Z_m = \frac{0,1}{2\pi \times 2 \times 10^4} = \frac{0,1}{4\pi 10^4}$$

soit $Z_m = 8,0 \times 10^{-7} \text{ m}$.

□ 8 — Il y a continuité de la vitesse à l'interface membrane-fluide située en $z = h + z_m(t)$:

$$u_m(t) = v_1(h + z_m(t), t).$$

La vitesse v_1 évolue sur la longueur caractéristique

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3,4 \times 10^2}{20 \times 10^3} = 1,7 \text{ cm}.$$

On a donc $Z_m \ll \lambda$, et on peut assimiler $v_1(h + z_m(t), t) \approx v_1(h, t)$.

On a donc $u_m(t) \approx v_1(h, t)$.

□ 9 — L'existence de la paroi en $z = 0$ entraîne un nœud de vitesse en ce point. On cherche donc l'onde de vitesse sous forme d'onde stationnaire :

$$v_1(z, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kz + \psi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

On a d'une part

$$v_1(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\psi) = 0 \quad \forall t$$

donc $\cos(\psi) = 0$. On peut choisir $\psi = -\pi/2$, d'où

$$v_1(z, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin(kz).$$

D'après la question précédente, on a de plus

$$v_1(h, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin(kh) = U_m \sin(\omega t) \quad \forall t.$$

On a donc $A = \frac{U_m}{\sin(kh)}$ et on peut prendre $\varphi = -\pi/2$, d'où

$$v_1(z, t) = \frac{U_m}{\sin(kh)} \sin(\omega t) \sin(kz).$$

L'amplitude maximale de l'onde de vitesse est, comme $k = \omega/c$

$$V_1 = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)}.$$

□ 10 — La vitesse est maximale quand $\sin(kz) = \pm 1$, soit pour

$$kz_n = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

où n est un entier. Comme $k = 2\pi/\lambda$, les positions correspondantes sont

$$z_n = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

On retrouve les positions des ventres d'une onde stationnaires, équidistants de $\lambda/2$. Comme on a un nœud de vitesse pour $z = 0$, le premier ventre est observé à la position $z_0 = \lambda/4$.

L'amplitude des maxima vaut $V_1 = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)}$.

Elle diverge quand $\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right) = 0$, donc pour $\frac{\omega h}{c} = n\pi$, soit pour les pulsations

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{h}.$$

Ce résultat a été obtenu à partir d'un modèle linéaire dans le cadre d'ondes de faible amplitude. Lorsque l'amplitude devient importantes, on ne peut plus travailler avec des expressions linéarisées. De plus, des phénomènes dissipatifs, négligés ici, peuvent limiter l'amplitude.

□ 11 — D'après la relation de la dynamique linéarisée, on a

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\mu_0 \omega \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin(kz),$$

d'où

$$p_1(z, t) = \frac{\mu_0 \omega}{k} \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \cos(kz)$$

soit comme $\omega = kc$

$$p_1(z, t) = \frac{\mu_0 c U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \cos(kz).$$

L'équivalent volumique des forces de pression vaut

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{vol,p}} &= -\vec{\text{grad}} P = -\vec{\text{grad}} p_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial z} \hat{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 \omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin(kz) \hat{e}_z.\end{aligned}$$

Comme la bille est de rayon $a \ll \lambda$, on peut considérer le champ de force volumique de pression uniforme sur son volume, et la résultante des forces de pression sur la bille s'écrit

$$\vec{F} = \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{F}_{\text{vol,p}}$$

soit

$$\vec{F} = \frac{4\pi a^3}{3} \frac{\mu_0 \omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega h}{c}\right)} \cos(\omega t) \sin(kz) \hat{e}_z.$$

En moyenne temporelle, comme $\langle \cos(\omega t) \rangle = 0$, on a

$$\langle \vec{F} \rangle = \vec{0}.$$

Le modèle étudié jusqu'à présent ne permet donc pas d'interpréter la lévitation de cette bille.

□ 12 — Avec $V_1 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, comme $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, **on ne peut plus considérer que $V_1 \ll c$** : on ne peut donc plus se placer dans l'approximation acoustique.

□ 13 — La relation de Bernoulli permet de dire que p_2 a la dimension de $\mu_0 V_1^2$, donc

$$\ell = 1 \quad \text{et} \quad q = 2.$$

Seul le terme associé à $p_2(z, t)$ donne une moyenne temporelle non nulle. La force volumique associée à $p_2(z, t)$ est

$$\begin{aligned}\vec{F}_{2,\text{vol}} &= -\vec{\text{grad}} p_2 = -\frac{\partial p_2}{\partial z} \hat{e}_z \\ &= \frac{2\omega}{4c} \mu_0 V_1^2 \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \hat{e}_z - 2\omega f(z) \sin(\omega t) \hat{e}_z.\end{aligned}$$

Le second terme est de valeur moyenne temporelle nulle car $\langle \sin(\omega t) \rangle = 0$; la moyenne temporelle de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la bille vaut donc

$$\langle F_z \rangle(z) = \frac{4\pi a^3}{3} \frac{2\omega}{4c} \mu_0 V_1^2 \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right)$$

soit

$$\langle F_z \rangle = \frac{2\pi a^3 \mu_0 \omega V_1^2}{3c} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right).$$

□ 14 — L'équilibre de la bille s'écrit

$$\langle F_z \rangle = \frac{4\pi a^3}{3} \mu_0 g$$

soit

$$\frac{2\pi a^3 \mu_0 \omega V_1^2}{3c} \sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) = \frac{4\pi a^3}{3} \mu_0 g.$$

Les positions d'équilibre vérifient alors

$$\sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) = \frac{2c\mu_b g}{\mu_0 \omega V_1^2}.$$

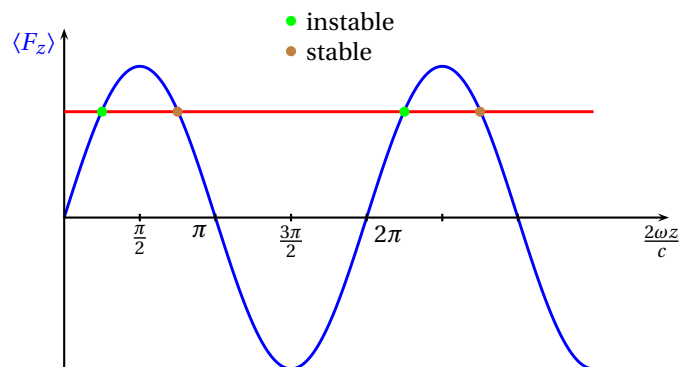
Comme $\sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right) \leq 1$, l'équilibre n'est possible que si

$$\frac{2c\mu_b g}{\mu_0 \omega V_1^2} \leq 1$$

soit si

$$\mu_b \leq \mu_{b,\text{max}} \quad \text{avec} \quad \mu_{b,\text{max}} = \frac{\mu_0 \omega V_1^2}{2cg}.$$

Représentons le graphe de $\langle F_z \rangle$ (en bleu) et reportons la valeur du poids de la bille $\frac{4\pi a^3}{3} \mu_b g$ (en rouge).



Il apparaît deux types de positions d'équilibre, repérées par des couleurs différentes sur le graphique.

Cas où le point d'intersection est sur une partie croissante de $\langle F_z \rangle$: si sous l'effet d'une perturbation z augmente, l'intensité de $\langle F_z \rangle$ augmente aussi, écartant encore plus la bille de sa position d'équilibre, qui est donc instable.

Cas où le point d'intersection est sur une partie décroissante de $\langle F_z \rangle$: si sous l'effet d'une perturbation z augmente, l'intensité de $\langle F_z \rangle$ diminue et devient plus faible que le poids de la bille ; elle « retombe » donc et z diminue, la ramenant à sa position d'équilibre, qui est donc stable.

□ 15 — On calcule

$$\begin{aligned}\mu_{b,\text{max}} &= \frac{1,2 \times 2\pi \times 2 \times 10^4 \times (50)^2}{2 \times 3,4 \times 10^2 \times 10} \\ &= \frac{1,2 \times 10^4 \times 25 \times 10^2}{2 \times 3,4 \times 10^3} \frac{1}{8 \times 10^{-2}}\end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad \mu_{b,\text{max}} = 5 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

► La masse volume obtenue est considérable : 50 fois celle de l'eau ! La poussée d'Archimède ne pourrait maintenir en suspension un tel objet dans l'air.

La taille de l'objet doit vérifier $a \ll \lambda$.

On a $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3,4 \times 10^8}{2 \times 10^4} = 1,7 \text{ cm}$. Prenons $a_{\max} \approx 1 \text{ mm}$.

On a alors

$$m_{b,\max} = \frac{4\pi a^3}{3} \mu_{b,\max} = \frac{10^{-9}}{8 \times 10^{-2} \times 3} \times 5 \times 10^4 \times \frac{5}{24} \times 10^{-9+4+2} = 0,2 \times 10^{-3}$$

soit $m_{b,\max} = 0,2 \text{ g}$.

La masse maximale que l'on peut transporter reste faible.

□ 16 — On a montré

$$\langle F_z \rangle = \frac{2\pi a^3 \mu_0 V_1^3}{3c} \sin\left(\frac{4\pi z}{\lambda}\right).$$

La fonction présente donc une période $\lambda/2$.

D'après le graphe de la question 14, les positions d'équilibre stables sont séparées de

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2} = 0,85 \text{ cm}.$$

Le nombre maximal d'objets en équilibre est donc

$$n = \frac{2h}{\lambda}.$$

► On prendra la partie entière de cette grandeur.

□ 17 — Du fait de son inertie, la bille ne va pas « réagir » aux variations à haute fréquence ($f = 20 \text{ kHz}$) de la force exercée. On va donc lui appliquer le principe fondamentale de la dynamique en considérant la moyenne temporelle de la force. En projection selon Oz , on obtient donc

$$m_b \ddot{z} = -m_b g + \langle F_z \rangle = -m_b g + \frac{F_{\max}}{\sin\left(\frac{2\omega z}{c}\right)}$$

en notant $F_{\max} = \frac{2\pi a^3 \mu_0 \omega V_1^2}{3c}$.

Notons z_{eq} une position d'équilibre :

$$0 = -m_b g + F_{\max} \sin\left(\frac{2\omega z_{\text{eq}}}{c}\right).$$

En se plaçant au voisinage de cette position d'équilibre, notons $z(t) = z_{\text{eq}} + \varepsilon(t)$, avec $|\varepsilon(t)| \ll z_{\text{eq}}$. L'équation du mouvement peut alors s'écrire

$$m_b \ddot{\varepsilon} = -m_b g + F_{\max} \sin\left(\frac{2\omega}{c}(z_{\text{eq}} + \varepsilon)\right)$$

Effectuons un développement limité au premier ordre :

$$\sin\left(\frac{2\omega}{c}(z_{\text{eq}} + \varepsilon)\right) = \sin\left(\frac{2\omega}{c} z_{\text{eq}}\right) + \varepsilon \frac{2\omega}{c} \cos\left(\frac{2\omega}{c} z_{\text{eq}}\right).$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement et en simplifiant à l'aide de l'équation d'équilibre, il reste

$$m_b \ddot{\varepsilon} = F_{\max} \frac{2\omega}{c} \cos\left(\frac{2\omega}{c} z_{\text{eq}}\right) \varepsilon,$$

soit

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{2\omega F_{\max}}{m_b} \cos\left(\frac{2\omega}{c} z_{\text{eq}}\right) \varepsilon(t) = 0.$$

D'après le graphe de la question 14, les positions d'équilibre sont (modulo 2π) l'intervalle tel que

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2\omega z_{\text{eq}}}{c} < \pi.$$

Le cosinus d'une telle expression est donc négatif, et l'équation différentielle obtenue correspond bien à celle d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{4\pi a^3 \mu_0 \omega^2 V_1^2}{3m_b c^2} \left| \cos\left(\frac{2\omega}{c} z_{\text{eq}}\right) \right|$$

soit avec l'expression de m_b :

$$\tilde{\omega} = \omega \frac{V_1}{c} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_b} \left| \cos\left(\frac{2\omega}{c} z_{\text{eq}}\right) \right|}.$$

Partie II – Motifs de vibration sur une plaque : figures de Chladni (X-ENS PSI 2024)

1 — Propagation d'ondes acoustiques dans les solides

□ 1 — En notant a la longueur d'un côté de la section dS du réseau cubique, on a a/r_0 atomes le long de ce côté.

Le nombre total d'atomes sur la section dS est donc $\frac{a}{r_0} \times \frac{a}{r_0}$. Comme $a^2 = dS$, on en déduit

$$\delta N = \frac{dS}{r_0^2}.$$

La force totale à exercer sur la surface dS pour l'allonger

de r à $r + \delta r$ est donc

$$\delta F = \delta k(r - r_0) = \frac{dS}{r_0^2} k(r - r_0).$$

L'allongement relatif est

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{r - r_0}{r_0}$$

et l'on peut écrire

$$\delta F = \frac{k}{r_0} \frac{\partial \xi}{\partial x} dS.$$

On en déduit

$$E = \frac{k}{r_0}.$$

□ 2 — Le **paramètre de maille** d'un métal est de l'ordre de 500 pm .

On en déduit $E \approx 1 \times 10^{10} \text{ Pa}$. C'est cohérent avec la valeur donnée pour l'aluminium.

□ 3 — En première approximation, on peut modéliser un solide par une phase condensée incompressible et indilatable, et donc considérer que son volume est invariable.

On peut donc considérer que la largeur de la tranche à l'instant t reste approximativement égale à dx .

La résultante des forces exercées sur cette tranche est

$$d\vec{F} = +E \frac{\partial \xi}{\partial x}(x dx, t) S \vec{e}_x - E \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) S \vec{e}_x$$

soit

$$d\vec{F} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} S dx \vec{e}_x.$$

□ 4 — On applique le principe fondamentale de la dynamique à la tranche de masse $\delta m = \rho S dx$:

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} S dx$$

soit

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

La perturbation obéit donc à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

E a la dimension d'une pression. D'après la relation de Bernoulli, on sait que P/ρ a la dimension de v^2 , donc E/ρ a bien la dimension d'une vitesse au carré (on peut détailler les équations aux dimensions de chaque grandeur...).

□ 5 — On calcule

$$c = \sqrt{\frac{6,9 \times 10^{10}}{2,7 \times 10^3}} = \sqrt{25 \times 10^6}$$

soit $c = 5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 — Vibration d'une plaque en flexion pure

□ 6 — Le volume initial du cube est $V = \ell^3$.

On l'étire dans une direction : sa nouvelle longueur vaut alors

$$\ell + \delta \ell = \ell(1 + \varepsilon).$$

Il est attendu d'avoir une contraction dans les deux autres directions : les longueurs des deux autres côtés du cube vont donc se rétrécir de $\delta \ell'$ et deviennent

$$\ell - \delta \ell'.$$

Le volume du matériau est alors

$$V' = \ell(1 + \varepsilon)(\ell - \delta \ell')^2.$$

Le coefficient de Poisson est défini par

$$\nu = \frac{\delta \ell' / \delta \ell}{\delta \ell / \ell} = \frac{\delta \ell'}{\delta \ell}.$$

On a donc $\delta \ell' = \nu \delta \ell = \nu \varepsilon \ell$, et

$$V' = \ell^3(1 + \varepsilon)(1 - \nu \varepsilon)^2.$$

Avec $\varepsilon \ll 1$, on linéarise

$$V' = \ell^3(1 + \varepsilon)(1 - 2\nu \varepsilon) = \ell^3(1 + \varepsilon - 2\nu \varepsilon).$$

La variation de volume est donc

$$\delta V = V' - V = \ell^3 \varepsilon (1 - 2\nu)$$

d'où

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu).$$

On a $\delta V = 0$ pour un matériau parfaitement incompressible, d'où

$$\nu_{\text{incomp}} = \frac{1}{2}.$$

□ 7 — Prenons une onde de flexion progressive de la forme

$$\underline{z}(x, t) = \underline{z}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}.$$

On a donc

$$\Delta \underline{z} = -K^2 \underline{z} \quad \text{et} \quad \Delta(\Delta \underline{z}) = K^4 \underline{z}.$$

Comme $\frac{\partial^2 \underline{z}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{z}$, l'équation d'onde donne

$$(DK^4 - \omega^2 \rho h) \underline{z} = 0.$$

On en déduit la relation de dispersion

$$\omega = K^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

La vitesse de phase est définie par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{K}.$$

Avec $K = \left(\frac{\rho h}{D}\right)^{1/4} \sqrt{\omega}$, on obtient

$$v_\varphi = \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/4} \sqrt{\omega}.$$

La vitesse de phase dépend de ω : **les ondes se propagent avec dispersion.**

Différencions la relation de dispersion :

$$d\omega = 2K dK \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

La vitesse de groupe vaut donc

$$v_g = \frac{d\omega}{dK} = 2K \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 2v_\varphi,$$

soit

$$v_g = 2 \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/4} \sqrt{\omega}.$$

Comme K est réel, **les ondes se propagent sans atténuation.**

□ 8 — Les conditions aux limites sont d'une part

$$z(0, y, t) = 0 \quad \forall y, t \implies A \sin \varphi_x = 0$$

et

$$z(x, 0, t) = 0 \quad \forall x, t \implies A \sin \varphi_y = 0.$$

Comme $A \neq 0$, on peut choisir $\varphi_x = \varphi_y = 0$.

Les autres conditions s'écrivent alors

$$z(a, y, t) = 0 \quad \forall y, t \implies A \sin(K_x a) = 0$$

et

$$z(x, a, t) = 0 \quad \forall x, t \implies A \sin(K_y a) = 0.$$

On a donc

$$K_x a = m\pi \quad \text{et} \quad K_y a = n\pi$$

où m et n sont deux entiers naturels, d'où la double quantification

$$K_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{avec} \quad K_y = \frac{n\pi}{a}.$$

Pour l'onde stationnaire proposée, on a

$$\Delta z = -K_x^2 z - K_y^2 z = -(K_x^2 + K_y^2) z$$

et

$$\Delta(\Delta z) = (K_x^2 + K_y^2)^2 z.$$

L'équation d'onde donne alors

$$D(K_x^2 + K_y^2)^2 - \omega^2 \rho h = 0$$

d'où

$$\omega = (K_x^2 + K_y^2) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

La quantification donne

$$\omega_{mn} = \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = (m^2 + n^2) \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

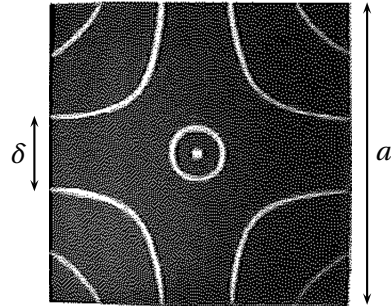
Avec l'expression de D donnée, on obtient

$$\omega_{mn} = (m^2 + n^2) \sqrt{\frac{E h^2}{12 \rho (1 - \nu^2)}} \frac{\pi^2}{a^2}.$$

3 — Comparaison avec les résultats expérimentaux

□ 9 — Pour une onde stationnaire harmonique solution de l'équation de d'ALEMBERT, la distance entre deux nœuds de vibration consécutifs est $\frac{\lambda}{2}$.

Prenons la figure correspondant à la fréquence $f = 629,8 \text{ Hz}$:



Les billes s'accumulent aux points où la plaque ne vibre pas : les lignes blanches visualisent donc les nœuds de vibration.

On évalue la distance entre deux nœuds successifs :

$$\delta = \frac{a}{4} = 6 \text{ cm}.$$

On a alors $\lambda = 2\delta = 12 \text{ cm}$ ce qui donne une célérité $c = \lambda f = 76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Cette valeur n'est pas cohérente avec la célérité obtenue avec le modèle décrit dans la première partie, qui est donc à exclure.

► Compte tenu de l'expérience décrite, il était prévisible que les ondes dans la plaque ne sont pas des ondes de longitudinales acoustiques.

□ 10 — Pour une même figure de Chaldni, c'est-à-dire pour un mode (m, n) donné, la pulsation ω_{mn} est proportionnelle à h d'après la relation obtenue à la question 8.

On a bien en première approximation $f_1(h_2) = 2f_1(h_1)$ et $f_1(h_3) = 5f_1(h_1)$. Le modèle est cohérent.

Les écarts peuvent s'expliquer par le choix de la géométrie cubique pour le modèle, alors que le système est ici une plaque relativement fine. De plus les conditions aux limites ne sont pas les mêmes (bords libres et non fixés).

□ 11 — La relation de dispersion obtenue à la question 7 donne

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} K^2 = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{12 \rho (1 - \nu^2)}} K^2.$$

On calcule $f \approx 0,25 K^2$.

La loi est correcte pour l'exposant de K . La valeur du coefficient multiplicateur est cohérente, mais présente toutefois un écart significatif, de l'ordre de 10 %. Le modèle est perfectible.

□ 12 — L'énergie cinétique d'une bille de volume V ayant une vitesse v est

$$E_c = \frac{1}{2} \rho V v^2.$$

L'énergie cinétique d'une molécule d'air à la température T est

$$e_c = \frac{3}{2} k_B T.$$

Le nombre de mole d'air occupant le volume V se déduit de $nM_a = \rho_a V$ où M_a est la masse molaire de l'air. Le nombre de molécules vaut alors

$$N = \frac{\rho_a V N_A}{M_a}.$$

L'énergie cinétique de l'air occupant le volume V est donc

$$E_{c,a} = \frac{3}{2} k_B N_A T \frac{\rho_a V}{M_a} = \frac{3}{2} RT \frac{\rho_a V}{M_a}.$$

En considérant une perturbation maximale de la part de l'air, l'énergie cinétique des molécules d'air est intégralement transmise à la bille qui acquiert alors une vitesse v telle que

$$\frac{1}{2} \rho V v^2 = \frac{3}{2} RT \frac{\rho_a V}{M_a}$$

soit

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M_a} \frac{\rho_a}{\rho}}.$$

La bille ayant un mouvement de pulsation ω sous l'effet de l'onde, son déplacement sous l'effet du choc de

l'air sur une période doit être faible devant la longueur d'onde pour qu'il puisse être négligeable, soit

$$\frac{v}{f} \ll \lambda.$$

Il faut donc

$$\sqrt{\frac{3RT}{M_a} \frac{\rho_a}{\rho}} \ll \lambda f.$$

□ 13 — En supposant les transferts thermiques purement conductifs, on peut considérer l'évolution des particules d'air comme adiabatique (cf. question 6), et la célérité du son dans l'air est alors donnée par

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_a}} \approx \sqrt{\frac{RT}{M_a}}$$

car $\gamma = 1,40$.

La vitesse de la bille sous l'effet des chocs avec l'air est en ordre de grandeur

$$v \approx \sqrt{\frac{RT}{M_a}} \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho}} = c_s \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho}}.$$

On a $\rho = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\rho_a = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, donc $\rho_a \ll \rho$. On a donc

$$v \ll c_s.$$

Comme $\lambda f = c_s$, la condition établie à la question précédente est bien vérifiée.

Partie III — Les bouées houlographes Waverider : prévention de la corrosion (Centrale MP 2022)

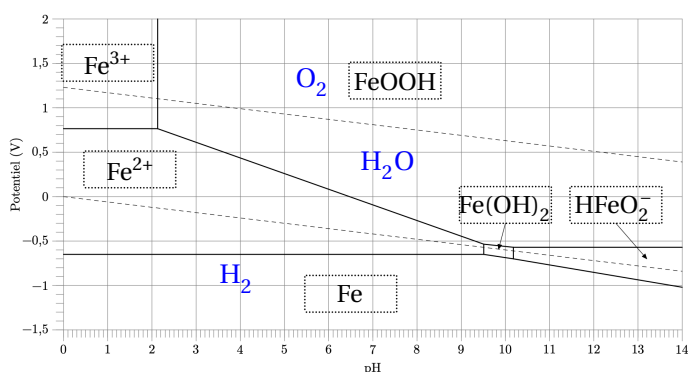
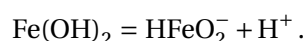
1 Thermodynamique de la corrosion du fer

□ 1 — Calculons le degré d'oxydation du fer dans les différentes espèces considérées :

Fe	FeOOH	Fe(OH) ₂	Fe ²⁺	Fe ³⁺	HFeO ₂ ⁻
0	III	II	II	III	II

On complète le diagramme E -pH avec les conditions :

- le degré d'oxydation croît en allant vers les potentiels croissants;
- les cations métalliques sont en milieux acide;
- HFeO₂⁻ est la base associée à Fe(OH)₂ :



□ 2 — À la frontière entre Fe²⁺ et Fe, on est à la limite d'apparition de Fe(s) ; les deux espèces sont donc à l'équilibre et on peut écrire la relation de Nernst :

$$E_{\text{fr}} = E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{Fe}^{2+}]_{\text{fr}}}{c^\circ},$$

avec $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Par convention, on a $[\text{Fe}^{2+}]_{\text{fr}} = C_{\text{tra}}$ et

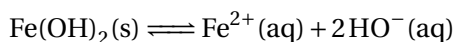
$$E_{\text{fr}} = E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + 0,03 \log \frac{C_{\text{tra}}}{c^\circ}.$$

On lit $E_{fr} = -0,65 \text{ V}$, d'où

$$E^\circ = -0,65 - 0,03 \log 10^{-6} = -0,65 + 0,18$$

soit $E^\circ = -0,47 \text{ V}$.

La frontière entre Fe^{2+} et $\text{Fe}(\text{OH})_2$ correspond à la limite d'apparition de $\text{Fe}(\text{OH})_2$. L'équilibre de précipitation



est donc réalisé et on peut écrire

$$K_s = [\text{Fe}^{2+}]_{fr} [\text{HO}^-]_{fr}^2.$$

Par convention, on a $[\text{Fe}^{2+}]_{fr} = C_{tra}$.

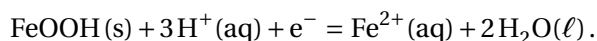
On lit $\text{pH}_{fr} = 9,5$, donc $[\text{HO}^-]_{fr} = 10^{9,5-14} = 10^{-4,5}$.

On a donc

$$K_s = 10^{-6} \times 10^{-9} = 10^{-15}$$

d'où $\text{p}K_s = 15$.

□ 3 — La réaction électrochimique associée au couple $\text{FeOOH}(\text{s})/\text{Fe}^{2+}$ est



La relation de Nernst s'écrit alors

$$E = E^\circ(\text{FeOOH}(\text{s})/\text{Fe}^{2+}) + 0,06 \log \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}](c^\circ)^2}$$

L'équation de la frontière est donc

$$\begin{aligned} E_{fr} &= E^\circ(\text{FeOOH}(\text{s})/\text{Fe}^{2+}) - 0,06 \log \frac{C_{tra}}{c^\circ} + 0,18 \log \frac{[\text{H}^+]}{c^\circ} \\ &= E^\circ(\text{FeOOH}(\text{s})/\text{Fe}^{2+}) - 0,06 \log \frac{C_{tra}}{c^\circ} - 0,18 \text{pH}. \end{aligned}$$

La pente de la frontière est donc de $-0,18 \text{ V}$.

□ 4 — Dans une solution saturée en dioxygène, l'oxydant le plus fort est O_2 dissout.

Ajoutons les domaines de H_2 , H_2O et O_2 en bleu sur le diagramme E -pH.

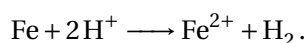
Le domaine du fer est disjoint de celui de O_2 , le dioxygène dissout oxyde donc le fer.

Les domaines du fer au degré II n'ont pas de partie commune avec celui de O_2 , donc le fer est oxydé jusqu'au degré III. À $\text{pH} = 7$, le fer III est sous la forme $\text{FeOOH}(\text{s})$.

La réaction d'oxydation se produisant est donc



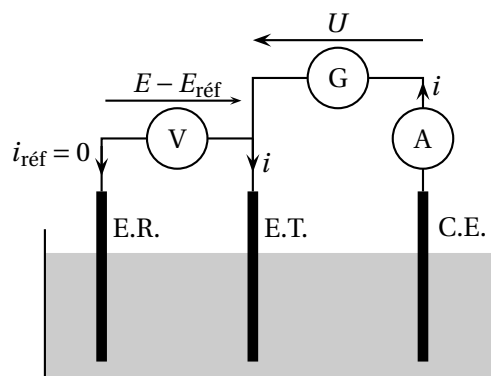
► On peut aussi envisager l'oxydation de Fe par l'eau, leurs domaines étant disjoints, soit



C'est cependant l'oxydation par le dioxygène qui est favorisée.

2 Cinétique de la corrosion de l'acier

□ 5 — La courbe courant-potentiel est enregistrée à l'aide du dispositif à trois électrodes :



Dans ce montage :

E.T. est l'électrode de travail (acier) ;

E.R. est l'électrode de référence (calomel) ;

C.E. est la contre-électrode (Pt) ;

G est un générateur de tension continue réglable ;

V est un voltmètre

A est un ampèremètre.

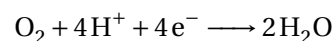
On lit la tension $E - E_{ref}$ pour un courant i traversant l'électrode de travail.

□ 6 — **Partie (a) :** oxydation ($i > 0$) du fer selon

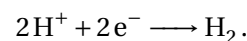


À $\text{pH} = 0$, le fer II est en effet sous la forme Fe^{2+} .

Partie (b) : réduction ($i < 0$) du dioxygène dissout selon



Partie (c) : réduction ($i < 0$) de l'eau en dihydrogène selon



► La courbe (b) présente rapidement un palier de diffusion dû à la concentration limitée en dioxygène dissout.

► La courbe (c) ne présente pas de palier de diffusion ; on observe le « mur » du solvant.

□ 7 — La loi de Nernst pour le couple H^+/H_2 s'écrit

$$E_{\text{éq}} = E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{H}^+]^2}{(c^\circ)^2} = -0,06 \text{pH}.$$

À $\text{pH} = 8,2$, on a donc

$$E_{\text{éq}} = -0,06 \times 8,2 = -0,49 \text{ V}.$$

On lit sur le graphique que la réduction de l'eau comment pour une tension $U = -0,95 \text{ V}$.

Comme on mesure $U = E - E_{ref}$, on a

$$E = U + E_{ref} = -0,95 + 0,25 = -0,70 \text{ V}.$$

On a $E \neq E_{\text{éq}}$, donc le système H^+/H_2 sur acier est lent. On a alors

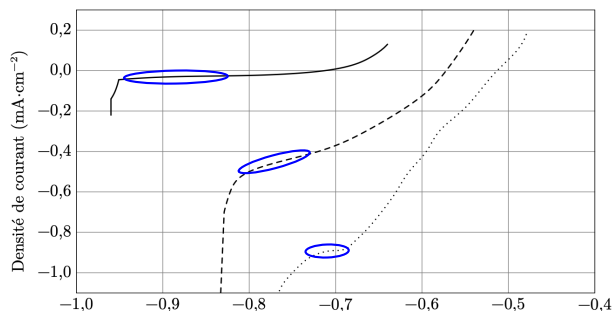
$$E = E_{\text{éq}} + \eta_c^\circ$$

d'où

$$\eta_c^\circ = E - E_{\text{éq}} = -0,70 + 0,49$$

soit $\eta_c^\circ = -0,21 \text{ V}$.

□ 8 — Entourons les zones correspondant à un phénomène de limitation du courant lié à la cinétique du transport du dioxygène dissout dans l'eau.



Lorsque la vitesse de l'eau est nulle, la limitation du courant due au transport du dioxygène dissout donne un palier de diffusion horizontal.

Pour les autres courbes, le palier n'est pas tout à fait horizontal, mais le courant de l'eau ajoute un phénomène de convection.

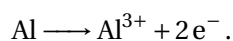
□ 9 — Lorsque l'eau est immobile, l'oxygène se déplace principalement par diffusion.

Lorsque l'eau est en mouvement, il s'ajoute un phénomène de convection pour transporter O_2 , ce qui augmente sa vitesse de renouvellement et donc la vitesse de la réaction. La densité de courant augmente donc (en valeur absolue) lorsque la vitesse de d'écoulement du fluide autour de l'électrode augmente.

Près de l'électrode, il existe une couche limite dans laquelle seule la diffusion intervient. Son épaisseur est d'autant plus mince que l'eau s'écoule plus vite. Le courant de diffusion étant inversement proportionnel à l'épaisseur de la couche limite, c'est cohérent avec les courbes mesurées.

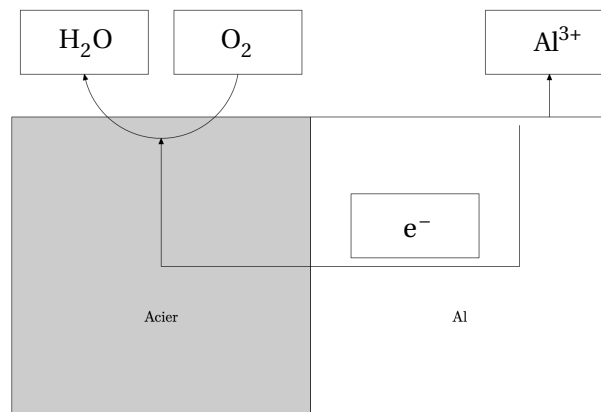
3 Protection par anode sacrificielle

□ 10 — L'aluminium s'oxyde selon

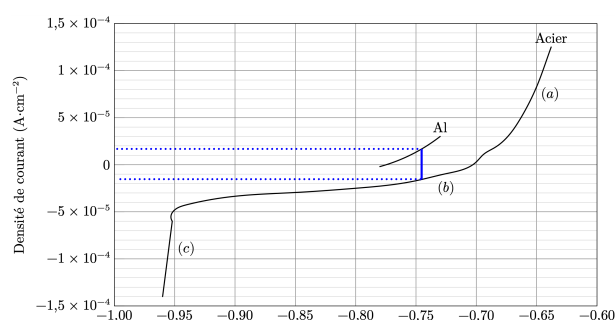


On ajoute donc Al^{3+} et e^- sur le schéma.

L'oxydant est le dioxygène qui se fait réduire en H_2O , ce qui permet de compléter le schéma.



□ 11 — En considérant la courbe courant-potential associée à l'oxydation de Al et celle associée à la réduction de O_2 , on cherche la valeur du potentiel tel que $j_{\text{corr}} = j_{\text{ox}} = -j_{\text{red}}$ (potentiel mixte).



On lit

$$j_{\text{corr}} = 1,6 \times 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$$

□ 12 — Considérons une même aire S sur les deux électrodes. Pendant la durée Δt , la charge électrique échangée est

$$Q = j_{\text{corr}} S \Delta t$$

La quantité d'électrons échangés est donc (en moles)

$$n(\text{e}^-) = \frac{j_{\text{corr}} S \Delta t}{\mathcal{F}}$$

Compte tenu de $\text{Al} \longrightarrow \text{Al}^{3+} + 3\text{e}^-$, la quantité d'aluminium consommée (en moles) est

$$n(\text{Al}) = \frac{j_{\text{corr}} S \Delta t}{3\mathcal{F}}$$

La masse d'aluminium consommée est donc

$$m(\text{Al}) = M_{\text{Al}} n(\text{Al}) = \frac{j_{\text{corr}} M_{\text{Al}} S \Delta t}{3\mathcal{F}}$$

Si l'épaisseur consommée est Δe , le volume correspondant est $V = S \Delta e$. On a donc

$$m(\text{Al}) = \rho_{\text{Al}} S \Delta e$$

soit

$$\rho_{\text{Al}} S \Delta e = \frac{j_{\text{corr}} M_{\text{Al}} S \Delta t}{3\mathcal{F}}$$

On en déduit

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{j_{\text{corr}} M_{\text{Al}}}{3\rho_{\text{Al}} F}.$$

Pour une année, on a $\Delta = 365 \times 24 \times 3600$ s.

On calcule $\Delta e = 0,17$ mm .

□ 13 — Pour une durée de 3 ans, l'épaisseur consommée est de l'ordre de 0,5 mm.

D'après le constructeur, l'épaisseur consommée sur 3 ans se rapproche de 3 cm, ce qui est bien supérieur.

D'une part, on a considéré que les deux électrodes sont de même surface. La surface de cathode sphérique est

$S_{\text{cathode}} = 4\pi(70/2)^2 = 15 \times 10^3 \text{ cm}^2$, tandis que $S_{\text{anode}} = 30 \text{ cm}^2$. On n'a donc pas les mêmes densités de courant sur les deux électrodes; il faut écrire

$$j_{\text{anode}} S_{\text{anode}} = -j_{\text{cathode}} S_{\text{cathode}}.$$

Comme $S_{\text{cathode}} \gg S_{\text{anode}}$, on a $j_{\text{anode}} \gg |j_{\text{cathode}}|$, et j_{anode} aurait une valeur bien plus élevée que celle calculée précédemment.

De plus, on a utilisé une valeur de j_{corr} correspondant à l'eau immobile. En milieu marin, l'eau est agitée, ce qui accélère la corrosion (cf. question 8 et 9).