

Mécanique PCSI

I — Cinématique

Référentiel d'observation

Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par la donnée de 3 axes rattachés à un **solide de référence**.

- Un solide idéal est un système dont les distances entre ses différents points restent constantes au cours du temps.
- Un tel repère est caractérisé par un point O choisi comme origine, et une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ généralement orthonormée.

Repère de temps

Un repère de temps est défini par la donnée d'un instant t_0 de référence et d'une échelle de temps permettant de mesurer des durées.

- Dans le cadre de la relativité galiléenne, le temps est absolu : il s'écoule de la même manière dans tous les référentiels.

Référentiel

Un référentiel est défini par la donnée d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Exemples :

- le *référentiel terrestre* (ou *référentiel du laboratoire*) dont le solide de référence est la Terre ;
- le *référentiel géocentrique* attaché à des axes issus de centre de la Terre et dirigés vers des étoiles fixes ;
- le *référentiel héliocentrique* attaché à des axes issus de centre du Soleil et dirigés vers des étoiles fixes ;

Vecteur position

Soit un référentiel $(\mathcal{R})$ et O un point origine fixe dans $(\mathcal{R})$. La position à l'instant d'un point M dans l'espace est repérée par son **vecteur position**

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t).$$

La **trajectoire** d'un point M dans le référentiel $(\mathcal{R})$ est l'ensemble de points qu'il occupe au cours du temps.

- La trajectoire d'un point dépend du référentiel d'étude.

Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** d'un point M dans un référentiel $(\mathcal{R})$ est défini par

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}.$$

- Le vecteur vitesse dépend du référentiel d'étude.
- En chaque point de la trajectoire, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.
- Les composantes du vecteur vitesse s'expriment en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- La dérivation du vecteur position s'effectue dans le référentiel $(\mathcal{R})$.

Vecteur accélération

Le **vecteur accélération** d'un point M dans un référentiel $(\mathcal{R})$ est défini par

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}.$$

- Le vecteur accélération dépend du référentiel d'étude.
- Les composantes du vecteur accélération s'expriment en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Bases de projection

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ peuvent être décrits par leurs composantes sur une base de projection. On utilise une base orthonormée directe, constituée de trois vecteurs $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ unitaires ($\|\vec{e}_i\| = 1$) et orthogonaux. L'espace est conventionnellement orienté dans le sens direct.

Coordonnées cartésiennes

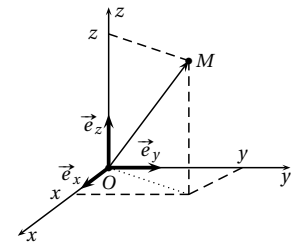
Un point est repéré par ses trois coordonnées x, y et z :

$$M(x, y, z).$$

Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.

Le vecteur accélération s'écrit $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.



- La base cartésienne est une **base fixe** : les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont indépendants de M et fixes dans $\mathcal{R}$.

Coordonnées cylindriques

Un point est repéré par ses trois coordonnées r, θ et z :

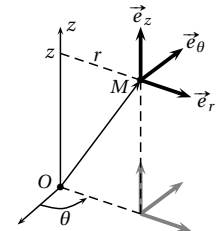
$$M(r, \theta, z).$$

Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.

Le vecteur accélération s'écrit

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$



- La base cartésienne est une **base mobile** : les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de M et ne sont pas fixes dans $\mathcal{R}$ si M est mobile.
- Les expressions de la vitesse et de l'accélération se retrouvent facilement à l'aide des relations :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

- Ces relations sont issues de $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$.

Choix de la base de projection

La base de projection est indépendante du référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel est étudié le mouvement.

Un choix judicieux de système de coordonnées peut considérablement simplifier l'étude d'une trajectoire : la base cylindrique sera choisie pour l'étude d'un mouvement circulaire.

Mouvement uniformément accéléré

Un tel mouvement est caractérisé par un vecteur accélération constant $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_0$.

► On en déduit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$ et $\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0$ en notant $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ et M_0 la position de M en $t=0$.

Si $\vec{v}_0$ et $\vec{a}_0$ sont colinéaires, le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**.

► La base cartésienne est adaptée à l'étude d'un mouvement rectiligne. En prenant $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$, on en déduit $\vec{v}(t) = v(t) \vec{e}_x$ avec $v(t) = a_0 t + v_0$, et $\vec{OM} = x(t) \vec{e}_x$ avec $x(t) = \frac{1}{2} t^2 + v_0 t + x_0$.

Si $\vec{a}_0 = \vec{0}$, le mouvement est **rectiligne uniforme**. Avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, on obtient en projection selon $\vec{e}_x$: $v(t) = v_0$ et $x(t) = v_0 t + x_0$.

Mouvement circulaire

Un mouvement circulaire de centre O est défini, en coordonnées polaires de centre O , par $r = R$ constant.

On en déduit $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.

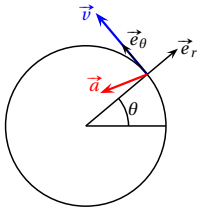
En notant $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v(t) \vec{e}_\theta$, soit $v(t) = R\dot{\theta}$ on peut écrire

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta.$$

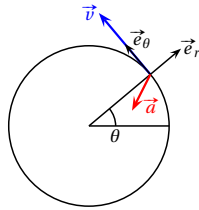
Mouvement circulaire accéléré (1) : v augmente au cours du temps. Mouvement **circulaire uniforme** : $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ (vitesse angulaire constante).

Mouvement circulaire décéléré (2) : v diminue au cours du temps.

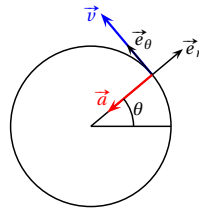
$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = -R\omega^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r.$$



(1)



(2)



Mécanique PCSI

II — Dynamique

La dynamique relie le mouvement observé à ses causes.

Loi de l'inertie (première loi de Newton)

Dans un référentiel galiléen, un point matériel ne subissant aucune interaction est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

- L'accélération d'un tel point est donc nulle : $\vec{a}_{I\mathcal{R}}(M) = \vec{0}$.
- Nous postulons l'existence de tels référentiels galiléens. Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen dans la plupart des expériences usuelles.

Principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton)

Énoncé

Un point matériel M soumis à des actions extérieures dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ acquiert une accélération donnée par

$$m \vec{a}_{I\mathcal{R}}(M) = \vec{F}$$

- la constante $m > 0$ est la masse du système;
- le vecteur $\vec{F}$ représente les actions subies par le point M .

- Le principe de la dynamique relie le mouvement (accélération) à ses causes, qui admettent une représentation vectorielle sous le nom de **forces** $\vec{F}$.
- La masse m , appelée **masse inerte**, représente l'inertie du corps, c'est-à-dire son aptitude à s'opposer à l'effet des forces appliquées : l'accélération acquise $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ pour une force donnée est d'autant plus faible que m est élevé.
- La masse est indépendante du référentiel galiléen choisi. Elle s'exprime en kilogramme (kg).
- La force $\vec{F}$ est indépendant du référentiel galiléen choisi. Son module s'exprime en newtons (N).

Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m est définie par

$$\vec{p}_{I\mathcal{R}}(M) = m \vec{v}_{I\mathcal{R}}(M).$$

- La quantité de mouvement dépend du référentiel galiléen choisi.
- Le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire

$$\left(\frac{d\vec{p}_{I\mathcal{R}}(M)}{dt} \right)_{I\mathcal{R}} = \vec{F}.$$

Loi des actions réciproques (troisième loi de Newton)

Lorsque deux points matériels M_1 et M_2 sont en interaction, les forces d'interaction correspondantes sont opposées :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}.$$

- Cette loi est aussi appelée « loi de l'action et de la réaction ».
- La troisième loi de Newton ne peut s'écrire que pour des systèmes ponctuels (points matériels).

Méthode d'étude d'un problème de mécanique

- ① Choisir le référentiel d'étude galiléen $\mathcal{R}$.
- ② Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point matériel M .
- ③ Écrire le principe fondamentale de la dynamique (P.F.D.) dans le référentiel $\mathcal{R}$.
- ④ Choisir une base de projection adaptée au problème. Projeter la relation vectorielle constituée du P.F.D. : on obtient un système d'équations différentielles.
- ⑤ Résoudre les équations différentielles précédentes, compte tenu des conditions initiales.

Forces usuelles

Pesanteur

Un point matériel de masse est soumis à son *poids*, ou *force de pesanteur* de la forme

$$\vec{P} = m \vec{g}.$$

La grandeur $\vec{g}$, dont la direction définit la verticale au point considéré, est le *champ de pesanteur terrestre*. Elle a la dimension d'une accélération.

Retenir : $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

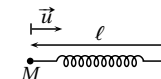
- La force de pesanteur est principalement — mais pas uniquement — due à l'attraction gravitationnelle terrestre.

Force de rappel élastique (loi de Hooke)

Un ressort idéal de longueur $\ell = MP$ exerce sur son extrémité P une *force de rappel élastique* donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow P} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{MP}}{MP}$$

- La constante k est la *raideur* du ressort; elle s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.
- C'est une *force de rappel* : elle s'oppose à la déformation du ressort.



Tension d'un fil inextensible

Un fil inextensible sans masse exerce sur son extrémité, quand il est tendu, une force de rappel $\vec{T}$ colinéaire au fil, appelée *tension*.

Frottement visqueux

Un corps en mouvement dans un fluide est soumis à une force de frottement visqueux, colinéaire et opposée à sa vitesse par rapport au fluide.

- Aux faibles vitesses, on peut modéliser cette résistance à l'avancement sous la forme d'une loi linéaire

$$\vec{F} = -h \vec{v}.$$

avec $h > 0$. On parle de *frottements fluides*.

- Aux vitesses plus élevées, on peut adopter une loi quadratique $\vec{F} = -k\nu^2 \vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{v}$.

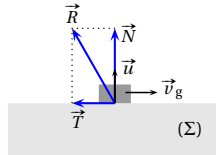
Contact entre deux solides : lois de Coulomb

On considère un solide S en mouvement à la surface d'un autre solide (Σ) .

La vitesse $\vec{v}_g$ du solide S par rapport à (Σ) est appelée **vitesse de glissement**.

On note $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ la réaction exercée par (Σ) sur S :

- $\vec{N} = N\vec{u}$ est la composante normale à la surface de contact, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire ;
- $\vec{T}$ est la composante tangentielle à la surface de contact.



Condition de contact

contact	décollement
$N > 0$	$N = 0$

Condition de glissement

glissement	adhérence
$\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$	$\vec{v}_g = \vec{0}$
$\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$	
$\ \vec{T}\ = f_d \ \vec{N}\ $	$\ \vec{T}\ \leq f_s \ \vec{N}\ $

- En cas de glissement, $\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{v}_g$, de sens opposé.
- f_d est le coefficient de frottement dynamique, f_s le coefficient de frottement statique.
- En général $f_d \leq f_s$; le plus souvent on a $f_d \approx f_s$.

Mécanique PCSI

III — Étude énergétique du mouvement

Travail d'une force

Le travail fourni par une force $\vec{F}$ s'appliquant en point M subissant un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ est le scalaire défini par

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

Le travail a la dimension d'une énergie et s'exprime en joule (J).

Le travail dépend du référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

- Le travail élémentaire δW est la quantité d'énergie reçue (algébriquement) par le point M par l'intermédiaire de la force $\vec{F}$ lors du déplacement $d\vec{\ell}$.
- Si $\delta W > 0$, la force est dite *motrice* : le point reçoit effectivement de l'énergie par l'intermédiaire de la force.
Si $\delta W < 0$, la force est dite *résistante* : le point cède de l'énergie.
- Si la force est normale à la trajectoire du point M , elle ne travaille pas.

Le travail de la force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace de M_1 à M_2 le long d'une trajectoire Γ est donné par

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1(\Gamma)}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

- Mathématiquement, le travail est donné par la *circulation* de la force le long du chemin Γ .
- Dans le cas d'un champ de force constant et uniforme $\vec{F}_0$, on a $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_0) = \vec{F}_0 \cdot \vec{M_1 M_2}$.

Puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point matériel M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le scalaire défini par

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}.$$

La puissance s'exprime en watt (W).

- La puissance dépend du référentiel (*via* $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$).

Théorème de l'énergie cinétique

Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est le scalaire positif défini par

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_{/\mathcal{R}}^2(M).$$

- L'énergie cinétique d'un point matériel dépend du référentiel $\mathcal{R}$.

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_1 et t_2 est égal au travail de la force appliquée le long de la trajectoire suivie :

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F})$$

Le travail de la force $\vec{F}$ représente l'énergie cédée (algébriquement) au point matériel M par l'intermédiaire de cette force, augmentant (ou diminuant) ainsi l'énergie cinétique de ce point.

- Si $W > 0$ (force motrice), le point a acquis de l'énergie (cinétique) par l'intermédiaire de la force $\vec{F}$.
Le travail de $\vec{F}$ représente l'énergie transférée au point M par l'intermédiaire de la force $\vec{F}$.

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance de la force qu'il subit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M).$$

- Le théorème de la puissance cinétique est souvent plus simple à utiliser que le théorème de l'énergie cinétique : la puissance d'une force est un simple produit scalaire, tandis que le travail s'exprime *a priori* sous la forme d'une intégrale le long de la trajectoire suivie...

Énergie potentielle, énergie mécanique

Force conservative

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si son travail entre deux points est indépendant de la trajectoire suivie entre ces points.

Dans le cas d'une trajectoire fermée Γ , le travail de la force est nul :

$$W = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \forall \Gamma$$

- Une force conservative ne peut globalement pas apporter de l'énergie à un point matériel s'il suit une trajectoire fermée.
- Dans le cas où le travail de la force dépend du chemin suivi entre les deux points considérés, la force est dite *non conservative*.

Énergie potentielle d'un point matériel

Soit un point matériel soumis à une force conservative $\vec{F}$. Le travail élémentaire de $\vec{F}$ peut s'écrire comme l'opposé de la variation d'une grandeur $E_p(M)$ appelée **énergie potentielle** du point M :

$$\delta W = -dE_p(M).$$

L'énergie potentielle ne dépend que de la position de M .

Le travail de la force $\vec{F}$ est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle associée : on peut considérer que la force $\vec{F}$ a transformé une partie de l'énergie potentielle du point M en énergie cinétique.

La différentielle de l'énergie potentielle s'écrit, par définition du gradient

$$dE_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{\ell} = -\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

d'où en identifiant $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$.

- Si $W > 0$, on a $-\Delta E_p < 0$: l'énergie apportée au point M par la force $\vec{F}$ est égale à la diminution de l'énergie potentielle de ce point.
Si $W < 0$, on a $-\Delta E_p > 0$: l'énergie prélevée au point M par la force $\vec{F}$ est égale à l'augmentation de l'énergie potentielle de ce point.
- Lorsque le point M se déplace de M_1 à M_2 , le travail de la force conservative s'écrit

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}) = -\Delta E_p(M) = E_p(M_1) - E_p(M_2).$$

- L'énergie potentielle est ainsi définie à une constante additive près. On doit choisir une position de référence M_0 telle que $E_p(M_0) = 0$.
- L'énergie potentielle de pesanteur ne dépend que de l'altitude du point : $E_p(z) = mgz + E_{p0}$, où $\vec{e}_z$ est la vertical ascendante et $E_{p0} = E_p(z=0)$ une origine (choisie arbitrairement).
- L'énergie potentielle élastique dont dérive la force élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 s'écrit $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$. On choisit conventionnellement $E_p = 0$ quand le ressort est au repos ($l = l_0$).

Énergie mécanique d'un point matériel

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p.$$

Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel se déplaçant de M_1 à M_2 est égal au travail des forces non conservatives le long du trajet correspondant :

$$\Delta E_m = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{n.c.})$$

Système conservatif

L'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas est conservée au cours de son mouvement :

$$E_m = E_c + E_p = \text{cte} \quad (1)$$

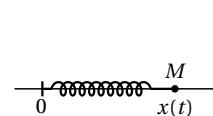
Un tel système est dit conservatif.

La relation (1) est appelée **intégrale première du mouvement**.

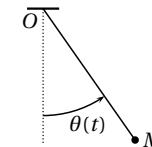
Équilibre d'un système conservatif à un degré de liberté

Un problème est dit à un degré de liberté si la position du point matériel étudié est entièrement déterminée par la donnée d'une seule variable $q(t)$.

Exemples :



Position repérée par la variable $q(t) = x(t)$



Position repérée par la variable $q(t) = \theta(t)$

- Dans le cas d'un système conservatif, les forces dérivent d'une énergie potentielle qui ne dépend que de la position du point : $E_p(q)$.
- L'énergie cinétique est de la forme $E_c(\dot{q})$: elle dépend de la « vitesse » $\dot{q}$.

Un point matériel est dans une position d'équilibre à la position q_e si la courbe $E_p(q)$ possède une tangente horizontale en ce point :

$$\left(\frac{dE_p}{dq} \right)_{q_e} = 0.$$

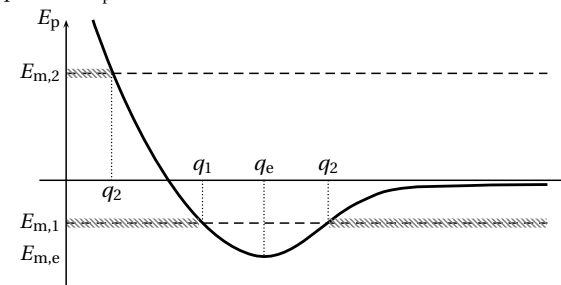
- En un point d'équilibre, l'énergie potentiel présente un maximum, un minimum, ou passe par un point d'inflexion.

La position d'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimum en ce point.

Étude graphique du mouvement d'un problème à un degré de liberté

L'énergie mécanique est une constante du mouvement : $E_m = E_c + E_p$.
Comme $E_c \geq 0$, seules sont accessibles les positions q telles que $E_m \geq E_p(q)$.

- Aux points où que $E_m = E_p$, la vitesse est nulle.



1^{er} cas : énergie mécanique $E_{m,1}$. Les régions $q(t) < q_1$ et $q(t) > q_2$ sont interdites. La vitesse est nulle aux positions q_1 et q_2 . Le système a un mouvement périodique : il effectue des oscillations entre q_1 et q_2 . On dit qu'il est dans un **état lié**.

2^e cas : énergie mécanique $E_{m,2}$. La région $q(t) < q_0$ est interdite. La vitesse est nulle à la position q_0 . Si le système atteint cette position, il s'en éloigne ensuite dans jamais y revenir ($q(t) \rightarrow +\infty$). On dit qu'il est dans un **état de diffusion**.

3^e cas : la position $q(t) = q_e$ est une position d'équilibre stable (minimum de l'énergie potentielle). L'énergie mécanique du système vaut $E_{m,e} = E_{p,\min}$.

Mécanique PCSI

IV — Forces centrales

Champ de force centrale

Une force est dite centrale si son support passe toujours par un point fixe O appelé centre de force :

$$\vec{F}(M) = F(M) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}.$$

Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}(M)$ est une constante du mouvement.

Le théorème du moment cinétique s'écrit $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) = \vec{0}$ pour une force centrale.

► Conséquence : $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}(M)$ sont toujours perpendiculaire au vecteur constant $\vec{L}_O$.

Le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est plan, contenu dans le plan passant par le centre de force O , normal au moment cinétique $\vec{L}_O$.

► On se place en coordonnées polaires dans ce plan.

Loi des aires :

$$r^2 \dot{\theta} = C$$

où C est une constante appelée **constante des aires**.

► On a $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}(M) = r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = mC \vec{e}_z$.

► Pendant dt , le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye une aire $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{C}{2} dt$.

► La vitesse du point matériel augmente quand il se rapproche du centre de force.

► **Le caractère plan du mouvement et la loi des aires sont valables pour tout champ de force centrale, conservatif ou non.**

Champ de force conservatif

Un champ de force conservatif est de la forme $\vec{F}(M) = F(r) \vec{e}_r$. L'énergie potentielle associée est définie par

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr}.$$

Exemples

Nature de la force	Force	Énergie potentielle
Interaction gravitationnelle	$\vec{F} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$	$E_p(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$
Interaction coulombienne	$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$
Force de rappel d'un ressort fixé en O	$\vec{F} = -k(r - \ell_0) \vec{e}_r$	$E_p = \frac{1}{2} k(r - \ell_0)^2$

► Interaction gravitationnelle : masses m_1 en O et m_2 en M .

► Interaction coulombienne : charges q_1 en O et q_2 en M .

L'énergie mécanique est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2(r, \theta) + E_p(r).$$

► Le mouvement de la particule est repéré par les coordonnées (r, θ) .

L'énergie mécanique peut s'écrire en fonction de r et $\dot{r}$:

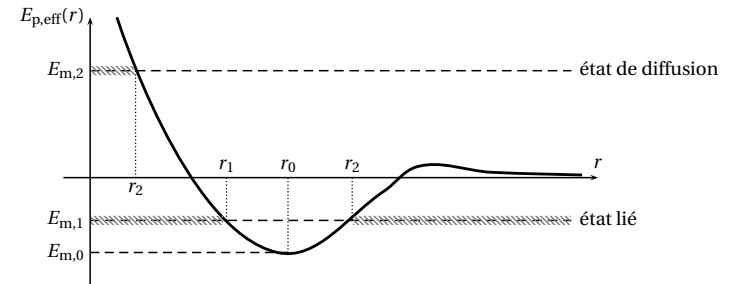
$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad E_{p,\text{eff}}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{r^2},$$

où $E_{p,\text{eff}}(r)$ est l'énergie potentielle effective.

► On a $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$.

État lié, état de diffusion

La nature du mouvement dépend de la valeur de l'énergie mécanique : comme $\vec{r}^2 \geq 0$, seules sont accessibles les valeurs de r telles que $E_{p,\text{eff}}(r) \leq E_m$.



État de diffusion : pour $E_{m,2}$, on a $r \geq r_2$. Le mouvement n'est pas borné : $r \rightarrow \infty$.

État lié : pour $E_{m,1}$, on a $r_1 \leq r \leq r_2$. Le mouvement est borné.

► Le graphe précédent ne décrit que la composante **radiale** du mouvement : la particule tourne autour du centre de force avec la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$.

► Le cas $E_{m,0}$ fixe $r = r_0$: le mouvement est circulaire uniforme, de rayon r_0 .

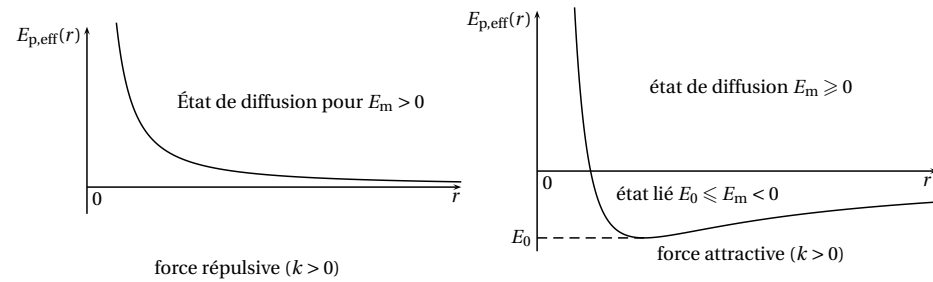
Cas particulier du champ newtonien

L'expression général d'un champ de force newtonien et de l'énergie potentielle dont il dérive est

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r, \quad \text{et} \quad E_p(r) = \frac{k}{r}.$$

► La force est attractive si $k < 0$ et répulsive si $k > 0$.

► L'interaction gravitationnelle et l'interaction coulombienne sont des forces newtoniennes.



Lois de Kepler pour les planètes

1re loi : les planètes décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil est l'un des foyers.

2e loi (loi des aires) : les aires balayées par le segment Soleil-planète pendant des durées égales sont égales. Elles ne dépendent pas de la planète considérée.

3e loi : la période de révolution T de la planète est reliée au demi-grand axe a de son orbite elliptique selon

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

où K est une constante indépendante de la planète considérée.

► Les lois de Kepler s'appliquent à tout satellite autour d'une planète.

Démonstration de la 3e loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire

Soient M la masse du Soleil et m celle de la planète. En notant a le rayon de la trajectoire circulaire, le PFD projeté selon $\vec{e}_r$ donne $-m \frac{v^2}{a} = -\frac{GMm}{a^2}$. La vitesse est reliée à la période selon $v = \frac{2\pi a}{T}$. On en déduit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

Énergie mécanique

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r_0 , l'énergie mécanique du point matériel de masse m est

$$E_m = -\frac{GMm}{2r_0}.$$

Dans une cas d'une trajectoire elliptique de demi grand-axe a , elle s'écrit

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}.$$

► On a $E_m < 0$: il s'agit bien d'un état lié.

Satellites terrestres

Satellite géostationnaire : satellite au repos dans le référentiel terrestre (fixe dans le ciel). Orbite circulaire, dans le plan de l'équateur terrestre, à une altitude de **36 000 km**. Météorologie, télévision par satellite.

Satellite en orbite basse : entre 500 km et 1000 km d'altitude. Télécommunication, imagerie terrestre, météorologie.

Satellite en orbite moyenne : entre 2000 km et 36 000 km d'altitude. Localisation terrestre (GPS).

Vitesses cosmiques

Première vitesse cosmique : vitesse permettant de mettre un satellite en orbite basse (altitude $h \ll R_p$) autour d'une planète de rayon R_p et de masse M_p :

$$v_1 = \sqrt{GM_p R_p}$$

Vitesse de libération : vitesse minimale à communiquer au satellite pour qu'il s'échappe de l'attraction gravitationnelle de la planète :

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}.$$

Pour la Terre : $v_{\text{lib}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

► La vitesse de libération est aussi appelée seconde vitesse cosmique.

► On a $v_{\text{lib}} = \sqrt{2} v_1$.