

TD d'électromagnétisme n° 5

Solution

3 — Émission isotrope de charges

1. Les charges à l'instant $t = 0$ et à la vitesse v_0 ont parcouru la distance $v_0 t$ à l'instant t . Il n'y a donc pas de charges présentes en $r > v_0 t$.

Pour $r < v_0 t$, nous cherchons le nombre d'électrons dans la coquille sphérique $[r, r + dr]$. Il s'agit d'un nombre d'électrons émis pendant la durée $dt = \frac{dr}{v_0}$, soit

$$\delta N = \alpha, dt = \frac{\alpha}{v_0} dr.$$

La charge correspondante est donc

$$\delta Q = -e\delta N = -\alpha e \frac{dr}{v_0}.$$

On en déduit la densité volumique de charge avec

$$\delta Q = \rho(r) d\tau \quad \text{avec} \quad d\tau = 4\pi r^2 dr$$

d'où

$$\rho(r) = -\frac{\alpha e}{4\pi v_0 r^2}.$$

On a donc

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > v_0 t \\ -\frac{\alpha e}{4\pi v_0 r^2} & \text{pour } r < v_0 t \end{cases}$$

La vitesse des électrons étant $\vec{v} = v_0 \vec{e}_r$, le vecteur densité de courant est donné par

$$\vec{j} = \rho v_0 \vec{e}_r$$

soit

$$\vec{j} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r > v_0 t \\ -\frac{\alpha v_0 e}{4\pi v_0 r^2} \vec{e}_r & \text{pour } r < v_0 t \end{cases}$$

2. À l'instant t , la bille a émis $N = \alpha t$ électrons, soit une charge une charge $Q_e = -\alpha e t$.

La bille étant initialement neutre, elle a alors une charge $q(t) = -Q_e = \alpha e t$.

L'émission étant isotrope, les plans $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétries, donc $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$.

Les invariances par rotations d'angle θ et φ permettent de conclure que $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

Nous allons appliquer le théorème de Gauss en prenant comme surface fermée Σ une sphère de rayon r .

Nous avons d'une part

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = 4\pi r^2 E(r).$$

Pour $r > v_0 t$, toutes les charges émises ainsi que la charge de la bille sont à l'intérieur de Σ . La bille étant initialement neutre, on a donc $Q_{\text{int}} = 0$, d'où $E(r) = 0$.

Pour $r < v_0 t$, on a

$$Q_{\text{int}} = q(t) + \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' = \alpha e t - \frac{\alpha e}{v_0} \int_0^r dr'$$

soit

$$Q_{\text{int}} = \alpha e \left(t - \frac{r}{v_0} \right).$$

On en déduit par application du théorème de Gauss

$$\vec{E}(M, t) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r > v_0 t \\ \frac{\alpha e}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \vec{e}_r & \text{pour } r < v_0 t \end{cases}$$

On a d'une part pour un champ de la forme $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_r$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on en déduit

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}.$$

Le champ magnétique est donc constant.

On a

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\alpha e}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

d'où

$$\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère, on a donc $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$.

Ces résultats sont compatibles avec $\vec{B} = \vec{0}$.

➤ On peut déterminer directement par symétries que $\vec{B} = \vec{0}$ (fait en classe).

3. Le bilan local d'énergie électromagnétique s'écrit

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = -\text{div } \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

avec

$$u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad \text{avec} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Comme $\vec{B} = \vec{0}$, on a $\vec{\Pi} = \vec{0}$: aucune énergie n'est rayonnée.

Pour $r < \nu_0 t$ (ailleurs, tout est nul), on a

$$u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E(r, t)^2}{2}$$

d'où

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = \varepsilon_0 E(r, t) \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\alpha e}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \left(t - \frac{r}{\nu_0} \right) \frac{\alpha e}{4\pi \varepsilon_0 r^2}.$$

On vérifie que

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}.$$

4 — Décharge d'un condensateur

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques de rayon a , distants de h , d'axe Oz . On néglige les effets de bord et on suppose le régime lentement variable. On admet que le champ électrique dans tout le condensateur est uniforme mais non permanent : $\vec{E} = E(t) \vec{e}_z$.

On étudie la décharge du condensateur :

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau}.$$

1. Le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ étant plan de symétrie de la distribution de charges variables sources du champ électromagnétique, le champ $\vec{B}$ est normal à ce plan, donc selon $\vec{e}_\theta$. L'invariance par rotation autour de Oz permet de conclure que

$$\vec{B}(M, t) = B(r, z, t) \vec{e}_\theta.$$

La densité volume de courant étant nulle entre les armatures, la relation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

- Le condensateur est un système électrique; nous ne pouvons lui appliquer l'ARQS à dominante magnétique.

La forme intégrale de cette équation est

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{P \in \Sigma} \frac{\partial \vec{E}(P, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_P$$

On choisit comme contour Γ un cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté selon $\vec{e}_\theta$.

On a d'une part

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = 2\pi r B(r, z, t).$$

D'autre part, à l'intérieur du condensateur,

$$\iint_{P \in \Sigma} \frac{\partial \vec{E}(P, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_P = \pi r^2 \frac{dE(t)}{dt} = -\frac{\pi r^2}{\tau} E_0 e^{-t/\tau}.$$

On a donc

$$2\pi r B(r, z, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\pi r^2}{\tau} E_0 e^{-t/\tau}$$

d'où dans le condensateur, comme $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$,

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{E_0}{2c^2 \tau} r e^{-t/\tau} \vec{e}_\theta.$$

2. La densité volumique d'énergie électrique emmagasinée par le condensateur est

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} e^{-2t/\tau}.$$

L'énergie électrique totale vaut donc

$$W_e = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \pi a^2 h e^{-2t/\tau}.$$

La densité volumique d'énergie magnétique emmagasinée par le condensateur est

$$w_m = \frac{E_0^2}{8\mu_0 c^4 \tau^2} r^2 e^{-2t/\tau} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{8c^2 \tau^2} r^2 e^{-2t/\tau}.$$

L'énergie magnétique portée par un tube de rayon r , d'épaisseur dr et de hauteur h est

$$dW_m = 2\pi r h w_m dr = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4c^2 \tau^2} \pi h r^3 e^{-2t/\tau} dr.$$

L'énergie magnétique totale vaut alors

$$W_m = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4c^2 \tau^2} \pi h e^{-2t/\tau} \int_0^a r^3 dr$$

soit

$$W_m = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{16c^2 \tau^2} \pi a^4 h e^{-2t/\tau}.$$

Leur rapport vaut

$$\frac{W_e}{W_m} = \frac{8c^2 \tau^2}{a^2}$$

soit

$$\frac{W_e}{W_m} = 8 \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2.$$

Si $a \ll \lambda$ (cadre de l'ARQS : on néglige tout phénomène de propagation), on a $W_e \gg W_m$: l'énergie est essentiellement sous forme électrique.

Le condensateur peut donc être considéré comme un système purement électrique : cela explique que l'on ne peut l'étudier dans le cadre de l'ARQS à dominante magnétique, par exemple en appliquant la relation de Maxwell-Ampère sans le terme de courant de déplacement (qui nous a été indispensable pour calculer le champ magnétique!).

3. Le vecteur de Poynting dans le condensateur s'écrit

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2 \tau} r e^{-2t/\tau} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta$$

soit

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\tau} r e^{-2t/\tau} \vec{e}_r.$$

Le vecteur de Poynting est radial, dirigé par l'extérieur. La puissance rayonnée à travers la surface latérale $S = 2\pi a \ell$ du condensateur vaut

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\tau} \pi a^2 \ell e^{-2t/\tau}.$$

L'énergie totale rayonnée vaut alors

$$\mathcal{E}_{\text{ray}} = \int_0^\infty \mathcal{P}_{\text{ray}}(t) dt = -\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \pi a^2 \ell [e^{-2t/\tau}]_0^\infty$$

soit

$$\mathcal{E}_{\text{ray}} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \pi a^2 \ell.$$

L'énergie électrique emmagasinée par le condensateur vaut

$$\mathcal{E}_e = \frac{\varepsilon_0 E^2(t)}{2} \pi a^2 \ell = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \pi a^2 \ell e^{-2t/\tau}.$$

Pendant toute la durée du transitoire, elle varie de

$$\Delta \mathcal{E}_e = \mathcal{E}_e(\infty) - \mathcal{E}_e(0) = -\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \pi a^2 \ell.$$

Le bilan d'énergie s'écrit alors

$$\Delta \mathcal{E}_e = -\mathcal{E}_{\text{ray}}.$$

Lors de la décharge du condensateur, l'énergie électrique perdue l'est par rayonnement à travers sa surface latérale.