

## DS modélisation

## Solution

## Régulation d'un système de climatisation à débit d'air variable (CCINP PSI 2021)

## Partie I — Contexte et système étudié

□ 1 — On peut améliorer la consommation énergétique d'un bâtiment :

- en isolant les murs et sous la toiture;
- en posant des doubles vitrages;
- en utilisant une pompe à chaleur pour le chauffage;
- en jouant sur l'orientation des ouvertures par rapport à l'exposition au soleil.

□ 2 — L'air intérieur devient rapidement viciés s'il y a des occupants (dégagement de  $\text{CO}_2$  par la respiration). Le renouveler permet de plus de limiter l'humidité de l'air, et de limiter la prolifération des germes.

□ 3 — Dans le cas d'un fonctionnement en climatisation, l'air évacué de l'intérieur est plus froid que l'air extérieur prélevé. L'échangeur permet de refroidir l'air extérieur aspiré en permettant un échange thermique (spontané) avec l'air intérieur plus froid.

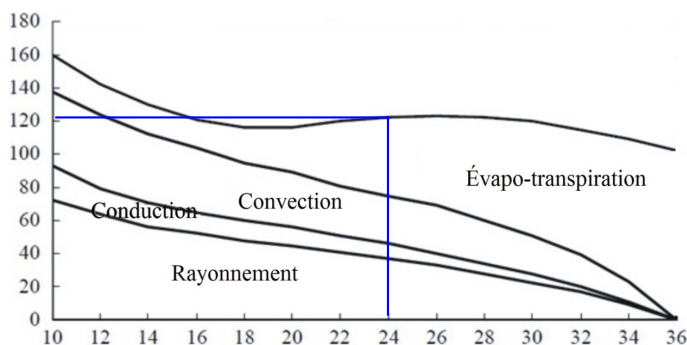
□ 4 — Contrôler le débit dans d'air conditionné dans chaque pièce permet :

- d'ajuster le fonctionnement à l'occupation des pièces (inutile de climatiser une pièce inoccupée);
- de n'utiliser qu'un seul climatiseur pour toute l'habitation, plutôt qu'un climatiseur par pièce.

## Partie II — Étude des principaux échanges thermiques

## II.1 — Puissance thermique dégagée par les personnes présentes dans la pièce

□ 5 — On repère la température de  $24^\circ\text{C}$  sur le graphique :



Le pourcentage de chaque mode de transfert se lit par proportion sur le segment représentant la puissance totale :

| mode       | ray. | cond. | conv. | évapo-transp. |
|------------|------|-------|-------|---------------|
| proportion | 30 % | 8 %   | 24 %  | 38 %          |

□ 6 — On lit la puissance dégagée par une personne sur le graphe : 123 W.

Quatre personnes dégagent une puissance de  $4 \times 123$  soit  $492 \text{ W}$ .

## II.2 — Puissance thermique extraite par le climatiseur

□ 7 — On calcule  $P_{\text{clim,max}} = \frac{25 \times 10^3}{3600} \times 1,0 \times 10^3 \times (24 - 20)$  soit  $P_{\text{clim,max}} = 28 \text{ kW}$ .

□ 8 — L'efficacité maximale vaut  $e_{\text{max}} = \frac{293}{28 - 20} = 36,6$ . L'efficacité étant définie par

$$e_{\text{max}} = \frac{P_{\text{clim,max}}}{P_{\text{élec,max}}},$$

on en déduit  $P_{\text{élec,max}} = \frac{P_{\text{clim,max}}}{e_{\text{max}}} = \frac{27,8}{36,6}$ , soit

$$P_{\text{élec,max}} = 760 \text{ W}.$$

□ 9 — L'efficacité donnée correspond au cas idéal d'une pompe à chaleur suivant un cycle réversible de Carnot. L'efficacité d'une machine réelle est plus faible, d'où son efficacité  $e_{\text{réel}} < e_{\text{max}}$ . On a donc

$$P_{\text{élec,réel}} = \frac{P_{\text{clim,max}}}{e_{\text{réel}}} > P_{\text{élec,max}}.$$

## II.3 — Puissance thermique apportée par le renouvellement de l'air

□ 10 — Prenons comme système ouvert la pièce.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit, pour un système en écoulement en régime stationnaire :

$$\dot{m} [\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz)] = P_{\text{th}} + P_u.$$

On néglige ici la variation d'énergie cinétique massique et d'énergie potentielle massique, soit  $\Delta e_c = 0$  et  $\Delta(gz) = 0$ .

Il n'y a pas de pièce mobile dans l'échangeur, soit  $P_u = 0$ .

La variation d'enthalpie massique s'écrit  $\Delta h = c_p(T_{e/p} - T)$ .

En notant  $P_{\text{th}} = P_{\text{ren}}$  la puissance thermique reçue par l'air dans l'échangeur, on obtient bien

$$P_{\text{ren}} = \dot{m} c_p (T_{e/p} - T).$$

□ 11 — Le premier principe de la thermodynamique s'écrit, pour un système en écoulement en régime stationnaire :

$$\dot{m} [\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz)] = P_{\text{th}} + P_u.$$

On néglige ici la variation d'énergie cinétique massique et d'énergie potentielle massique, soit  $\Delta e_c = 0$  et  $\Delta(gz) = 0$ .

Il n'y a pas de pièce mobile dans l'échangeur, soit  $P_u = 0$ .

Écrivons le premier principe sous forme de bilan au système ouvert constitué par la tranche d'air sortant comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , avec le débit massique  $\dot{m}$  réparti sur  $N$  tranches :

$$\dot{m} c_p [T_{\text{FS}}(x) - T_{\text{FS}}(x + dx)] = \delta P_{\text{th}}.$$

Chaque tranche d'air sortant reçoit un flux thermique à travers deux parois. Le débit total sortant reçoit donc un flux à

travers  $2N$  parois, considérées comme associées en parallèle. La conductance totale des parois vaut donc  $2NK_{th}$ , et le premier principe s'écrit

$$\delta P_{th} = \delta \Phi_{reçu} = 2NK_{th} dx (T_{FE}(x) - T_{FS})$$

On a donc

$$-d_m c_P \frac{dT_{FS}}{dx} dx = 2NK_{th} dx (T_{FE}(x) - T_{FS})$$

soit

$$\frac{dT_{FS}}{dx}(x) = -\frac{T_{FE}(x) - T_{FS}(x)}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{d_m c_P}{2NK_{th}}.$$

□ 12 — On obtient l'équation (5) en appliquant le premier principe à la tranche d'air entrant comprise entre  $x$  et  $x + dx$ .

□ 13 — En soustrayant l'équation (4) de l'équation (5), on obtient

$$\frac{d[T_{FE}(x) - T_{FS}(x)]}{dx} = 0.$$

On a donc  $T_{FE}(x) - T_{FS}(x) = \text{cte}$ .

En se plaçant en  $x = 0$ , où  $T_{FS}(0) = T$  et  $T_{FE}(0) = T_{e/p}$ , on obtient

$$T_{FE}(x) - T_{FS}(x) = T_{e/p} - T.$$

□ 14 — D'après le résultat précédent, l'équation (5) s'écrit

$$\frac{dT_{FE}(x)}{dx} = \frac{T - T_{e/p}}{\lambda}.$$

On a donc  $T_{FE}(x) = \frac{T - T_{e/p}}{\lambda} x + T_{FE}(0)$  soit

$$T_{FE}(x) = \frac{T - T_{e/p}}{\lambda} x + T_e.$$

□ 15 — En sortie d'arrivée d'air entrant, on a

$$T_{FE}(L) = T_{e/p} = \frac{T - T_{e/p}}{\lambda} L;$$

d'où

$$T_{e/p} = \frac{T \frac{L}{\lambda} + T_e}{1 + \frac{L}{\lambda}}.$$

On a donc

$$T_{e/p} - T = \frac{T \frac{L}{\lambda} + T_e}{1 + \frac{L}{\lambda}} - T = \frac{T_e - T}{1 + \frac{L}{\lambda}}$$

et la puissance apportée  $P_{ren} = d_m c_P (T_{e/p} - T)$  s'écrit alors

$$P_{ren} = \frac{d_m c_P}{1 + \frac{2NK_{th}L}{d_m c_P}} (T_e - T).$$

On peut écrire

$$T_e - T = R_{th} P_{ren}$$

où l'échangeur est équivalent à la résistance thermique

$$R_{th,ech} = \frac{1 + \frac{2NK_{th}L}{d_m c_P}}{d_m c_P}.$$

□ 16 — Plus  $N$  est grand, plus la résistance thermique équivalente à l'échangeur est grande, ce qui limite la puissance thermique apportée donc le réchauffement non souhaité des pièces.

Il est donc intéressant de disposer d'un échangeur pour lequel  $N$  est grand.

Pour un volume donné de l'échangeur, augmenter  $N$  diminue l'épaisseur entre les plaques, ce qui augmente la résistance hydraulique, donc les pertes de charge pour la circulation de l'air.

## Partie III — Influence du débit d'air conditionné sur la température

### III.1 — Schéma électrique équivalent de la pièce

□ 17 — L'échangeur et la fenêtre sont soumis aux mêmes températures sur leurs faces; ils sont donc en parallèle et leurs conductances thermiques s'ajoutent.

On a donc

$$R_4 = \frac{R_{th,ech} R_{fenetre}}{R_{th,ech} + R_{fenetre}}.$$

□ 18 — La source de courant  $\eta$  représente un apport de puissance dans la pièce, **elle représente donc la puissance thermique apportée par les 4 personnes présentes dans la pièce.**

□ 19 — L'équation (2)  $P_{clim} = D_m c_P (T - T_c)$  permet de définir la résistance thermique

$$R_3 = \frac{1}{D_m c_P}.$$

Cette résistance est variable, car sa valeur dépend du débit  $D_m$  du climatiseur.

□ 20 — La loi des nœuds en 1 s'écrit

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \frac{T_e - T_1}{R_1} + \frac{T - T_1}{R_1}.$$

La loi des nœuds en 2 s'écrit

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{T - T_2}{R_2}.$$

La loi des nœuds en 3 s'écrit

$$C_3 \frac{dT}{dt} = \eta + \frac{T_1 - T}{R_1} + \frac{T_e - T}{R_4} + \frac{T_c - T}{R_3} + \frac{T_2 - T}{R_2}.$$

□ 21 — On écrit le système précédent sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} T_e \\ T_c \\ \eta \end{pmatrix}$$

En identifiant, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} & \frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{C_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_4 C_3} & \frac{1}{R_3 C_3} & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix}$$