

Électromagnétisme

Sujet d'entraînement - solution

Contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault

1 — Expression approchée du champ magnétique créé par la bobine excitatrice dans la plaque

1. La distribution étant invariante par rotation autour de Oz , les composantes de $\vec{B}$ ne dépendent pas de θ .

Le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ étant un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, le champ $\vec{B}$ est contenu dans ce plan : sa composante selon $\vec{e}_\theta$ est donc nulle.

Le champ magnétique est donc de la forme

$$\vec{B}(M, t) = B_r(r, z, t) \vec{e}_r + B_z(r, z, t) \vec{e}_z.$$

2. En l'absence de plaque, le plan médiateur de la bobine est un plan de symétrie du système; les lignes de champ magnétique sont alors symétriques par rapport à ce plan, ce qui est le cas de la figure 1.

La première simulation (fig 1) correspond à la carte 1.

En présence de la plaque, le champ $\vec{B}$ crée des courants induits dans la plaque, eux-même source d'un champ magnétique dont l'effet est de s'opposer au champ magnétique de la bobine (loi de Lenz), les courants induits et leurs effets étant d'autant plus importants que la fréquence est élevée.

On voit que le champ dans la bobine est plus faible pour la deuxième simulation que pour la troisième; cette dernière correspond donc à la fréquence la plus élevée, soit $f = 200$ Hz.

La deuxième simulation (fig 2) correspond à la carte 3.

La troisième simulation (fig 3) correspond à la carte 2.

3.a) La carte 2 correspondant à la figure 3, on lit la valeur du champ magnétique au niveau de l'axe de la bobine ($x = R_b/2 = 1,25$ mm ou $z = l_b/2 = 6$ cm), soit $B_0 \approx 3$ mT. Cette valeur est confirmée par la carte de champ où l'intensité de B est donnée en couleur.

3.b) Le champ créé par un solénoïde infini possédant $n = \frac{N}{l_b}$ spires par unité de longueur, parcouru par le courant i_0 , est donnée par

$$\vec{B}(0) = \mu_0 \frac{N}{l_b} i_0 \vec{e}_z.$$

On voit sur la figure 3 que les lignes de champ s'évasent entre le centre de la bobine et la plaque : la distance entre la ligne de champ sur l'axe et la suivante est approximativement multipliée par 4; la section du tube

de champ, qui admet Oz comme axe de symétrie, est donc multipliée par $4^2 = 16$.

Le flux du champ magnétique étant conservée le long d'un tube de champ, on en déduit

$$B(0) \approx 16 B_0,$$

d'où

$$B_0 \approx 0,06 \mu_0 \frac{N}{l_b} i_0.$$

Il est bien de la forme proposée avec $\alpha \approx 0,06$.

2 — Courants de Foucault

4. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, sous forme intégrale

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = - \iint_{P \in \Sigma} \frac{\partial \vec{B}(P, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_P.$$

Le champ dans la plaque est orthoradial, soit comme la distribution est invariante par rotation autour de l'axe Oz

$$\vec{E}(M, t) = E(r, z, t) \vec{e}_\theta.$$

Choisissons comme contour Γ un cercle de rayon r , orienté selon $\vec{e}_\theta$. On a d'une part

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = 2\pi r E(r, z, t).$$

En considérant le champ magnétique informe dans la zone (A), on a

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\omega B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

et

$$- \iint_{P \in \Sigma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \omega B_0 \sin(\omega t) \pi r^2.$$

On a donc

$$2\pi r E = \pi r^2 \omega B_0 \sin(\omega t),$$

d'où

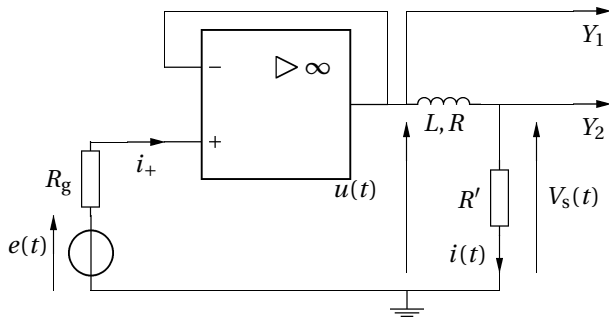
$$\vec{E}(M, t) = \frac{\omega B_0 r}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

5. La loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ donne alors

$$\vec{j} = \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

3 — Modification de l'impédance de la bobine excitatrice

6. Reprenons le montage :



D'après les propriétés de l'ALI, on a $i_+ = 0$; la tension aux bornes de R_g est donc nulle, et $V_+ = e(t)$.

L'ALI fonctionnant en régime linéaire, on a $V_+ = V_-$, d'où

$$u(t) = e(t).$$

► L'ALI est utilisé ici en suiveur.

La bobine et la résistance étant traversée par la même intensité $i(t)$, on a

$$V_s(t) = R' i(t) \quad \text{et} \quad u(t) = L \frac{di}{dt} + (R + R') i(t)$$

soit

$$e(t) = \frac{L}{R} \frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{R + R'}{R} V_s(t).$$

On a donc

$$\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{V_s(t)}{\tau} = \frac{R'}{L} e(t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R + R'}.$$

L'acquisition est déclenchée sur la voie Y_1 , c'est-à-dire sur la tension $e(t)$; elle débute donc au sur un échelon $e(t) = E$:

$$\frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{V_s(t)}{\tau} = \frac{R'}{L} E.$$

La solution s'écrit

$$V_{s(t)} = \frac{\tau R'}{L} E (1 - e^{-t/\tau})$$

soit

$$V_s(t) = \frac{R'}{R + R'} E (1 - e^{-t/\tau}).$$

Cette tension tend donc vers

$$V_{s,\infty} = \frac{R'}{R + R'} E.$$

Avec $E = 5,0 \text{ V}$, on lit sur l'oscillogramme $V_{s,\infty} = 4,90 \text{ V}$.

On a donc

$$R = R' \frac{E - V_{s,\infty}}{V_{s,\infty}}.$$

On calcule $R = 10,2 \Omega$.

D'après l'oscillogramme, la constante de temps du circuit vaut

$$\tau = \frac{L}{R + R'} = 78,4 \mu\text{s}.$$

On en déduit

$$L = 40,0 \text{ mH}.$$

7. En l'absence de la plaque, la bobine dissipe une puissance moyenne $R \langle i^2 \rangle$ par effet Joule en raison de la résistance du fil la constituant.

En présence de la plaque, à cette puissance dissipée il faut **ajouter** la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la plaque du fait des courants induits. La puissance volumique dissipée dans la plaque est proportionnelle à $\vec{j}^2$, donc à $\vec{B}^2$ d'après les questions précédentes, donc à $\langle i^2 \rangle$ où $i(t)$ est le courant circulant dans la bobine, créant le champ $\vec{B}$. Cette puissance dissipée peut donc s'écrire

$$\langle P \rangle = \delta R \langle i^2 \rangle \quad \text{avec} \quad \delta R > 0,$$

ce qui revient à modéliser la bobine par un dipôle dont la partie réelle de l'impédance est

$$R + \delta R > R.$$

La présence de la plaque se traduit donc par une **augmentation de la partie réelle de l'impédance de la bobine**.

8. D'après les documents fournis, la présence de la plaque entraîne une diminution du champ magnétique dans la bobine pour un courant $i(t)$ la traversant.

1^{re} méthode

En l'absence de plaque, le flux propre est donné par

$$\Phi_p = Li.$$

En présence de la plaque, la diminution de B se traduit par une diminution de son flux à travers la bobine; on a donc

$$\Phi'_p < \Phi_p.$$

Le courant $i(t)$ étant donné, cela revient à $L' < L$.

2^e méthode

En l'absence de plaque, l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine vaut

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2.$$

En présence de la plaque, la diminution de B se traduit par une diminution de l'énergie stockée dans la bobine (l'énergie volumique est $\frac{B^2}{2\mu_0}$); on a donc

$$\mathcal{E}' < \mathcal{E}.$$

Le courant $i(t)$ étant donné, cela revient à $L' < L$.

La présence de la plaque se traduit par une **diminution de la partie imaginaire de l'impédance de la bobine**.

9. La puissance volumique dissipée par effet Joule dans la plaque est donnée par

$$p_J(r, t) = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{j}^2}{\gamma_0} = \gamma_0 \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) r^2.$$

D'après les cartes 2 et 3, le champ magnétique dans la plaque n'a de valeur significative que sur un rayon R_b autour de l'axe (rayon de la bobine).

Considérant $p(r, t)$ uniforme sur un tube de rayon r , d'épaisseur dr et de hauteur d , la puissance totale dissipée par effet Joule dans la plaque vaut

$$\begin{aligned} P_J(t) &= \int_0^{R_b} 2\pi dr p_J(r, t) dr \\ &= \frac{\pi d \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b} r^3 dr \\ &= \frac{\pi d \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{4} \sin^2(\omega t) \frac{R_b^4}{4}. \end{aligned}$$

On a donc

$$P_J = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{8} \sin^2(\omega t).$$

La puissance moyenne dissipée par effet Joule vaut alors

$$\langle P_J \rangle = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 B_0^2}{16}.$$

Comme $B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b}$, on a

$$\langle P_J \rangle = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2}{16} \alpha^2 \frac{\mu_0^2 N^2 i_0^2}{l_b^2}$$

Le courant étant d'amplitude i_0 , il vaut

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t),$$

et

$$\langle P_J \rangle = \delta R \langle i^2 \rangle = \delta R \frac{i_0^2}{2}.$$

En identifiant avec l'expression de $\langle P_J \rangle$ établie, on en déduit

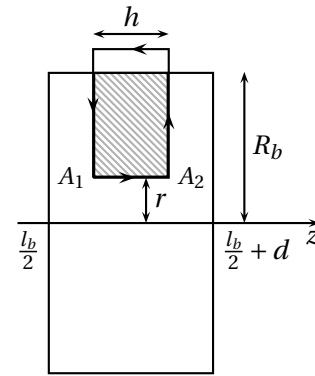
$$\delta R = \frac{\pi d R_b^4 \gamma_0 \omega^2 \alpha^2 \mu_0^2 N^2}{8 l_b^2}.$$

10.a) Le théorème de Maxwell-Ampère s'écrit, dans le cadre de l'ARQS magnétique

$$\text{rot } \vec{B}' = \mu_0 \vec{j},$$

soit sous forme intégrale

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}_M = \mu_0 \iint_{P \in \Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_P = \mu_0 I_{\text{enlacé}}.$$



Choisissons comme contour Γ un rectangle de largeur h , dont les côtés parallèles à l'axe Oz sont l'un à la distance $r \leq R_b$ de l'axe, l'autre à une distance supérieure à R_b , où le champ est nul, orienté comme indiqué sur la figure.

La circulation de $\vec{B}$ n'est non nulle que sur $A_1 A_2$, soit

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}_M = h B'(r, z, t).$$

Le courant enlacé vaut

$$\begin{aligned} I_{\text{enlacé}} &= \int_r^{R_b} j(r', t) h dr' = \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} h \sin(\omega t) \int_r^{R_b} r' dr' \\ &= \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} h \sin(\omega t) \frac{R_b^2 - r^2}{2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega B_0}{4} (R_b^2 - r^2) \sin(\omega t) \vec{e}_z.$$

10.b) La densité volumique d'énergie magnétique est donnée par

$$w_m = \frac{B'^2}{2\mu_0}$$

soit

$$w_m(r, t) = \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2}{32} (R_b^2 - r^2)^2 \sin^2(\omega t).$$

L'énergie magnétique totale est donnée par

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^{R_b} w_m(r) 2\pi dr dr \\ &= 2\pi d \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2}{32} \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b} (R_b^2 - r^2)^2 r dr \\ &= 2\pi d \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2}{32} \sin^2(\omega t) \int_0^{R_b} (R_b^4 r - 2R_b^2 r^3 + r^5) dr \\ &= 2\pi d \frac{\mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2}{32} \sin^2(\omega t) \left[\frac{R_b^6}{2} - 2\frac{R_b^6}{4} + \frac{R_b^6}{6} \right] \end{aligned}$$

soit

$$E_m = \frac{\pi d \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2 R_b^6}{96} \sin^2(\omega t).$$

10.c) On a

$$\langle E_m \rangle = \frac{\pi d \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 B_0^2 R_b^6}{192} = \frac{1}{2} \delta L \langle i^2 \rangle = \frac{1}{2} \delta L \frac{i_0^2}{2}$$

avec

$$B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N}{l_b} i_0,$$

d'où

$$\frac{\pi d \mu_0 \gamma_0^2 \omega^2 R_b^6}{192} \alpha^2 \frac{\mu_0^2 N^2}{l_b^2} i_0^2 = \frac{1}{2} \delta L \frac{i_0^2}{2}.$$

On en déduit

$$\delta L = \frac{\pi d \mu_0^3 \gamma_0^2 \omega^2 R_b^6 \alpha^2 N^2}{48 l_b^2}.$$

10.d) Avec les données numériques, on calcule

$$\delta R = 1,9 \times 10^{-6} \alpha^2 \omega^2.$$

En prenant $\alpha = 0,06$, on obtient

$$\delta R = 2,7 \times 10^{-7} f^2.$$

Pour $f = 50$ Hz, on calcule $\delta R \approx 0,7$ mΩ.

Pour $f = 200$ Hz, on calcule $\delta R \approx 10$ mΩ.

On obtient de même

$$\delta L = 1,4 \times 10^{-9} f^2.$$

Pour $f = 50$ Hz, on calcule $\delta L \approx 3$ μH.

Pour $f = 200$ Hz, on calcule $\delta L \approx 50$ μH.

À 200 Hz, la présence de la plaque se traduit par une variation de la partie réelle et de la partie imaginaire de la bobine d'environ 0,1 %. C'est faible, mais mesurable.

S'il existe une crevasse à l'intérieur de la plaque, elle va empêcher la formation des courants induits, et on ne mesurera pas de variation de l'impédance de la bobine.

10.e) Augmenter la fréquence permet d'augmenter δL et δR , ce qui rend la mesure plus facile.

Cependant, on a supposé les courants répartis dans le volume de la plaque. À fréquence très élevée, il ne pénétreront quand dans une faible épaisseur δ de la plaque (effet de peau¹), ce qui revient à considérer une profondeur d plus faible, diminuant les valeurs de δR et δL .

1. Pour les 5/2...