

Le canon, fournisseur d'impulsion

□ 1 — On applique le PFD à une goutte de masse m dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m \vec{a} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z.$$

Selon Oy , on a

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad y(t) = 0.$$

La trajectoire est plane, dans le plan xOz .

Selon Ox , on a $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$, d'où

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \quad \text{et} \quad x(t) = (v_0 \cos \alpha)t.$$

Selon Oz , on a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha,$$

d'où

$$z(t) = -g \frac{t^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t.$$

En éliminant le temps, on obtient l'équation de la trajectoire

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

Il s'agit d'une **parabole**.

La portée est la solution $L \neq 0$ de $z(L) = 0$, soit

$$L \left(\tan \alpha - \frac{gL}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0.$$

On obtient

$$L = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$$

soit

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha).$$

La portée est maximale quand $\sin(2\alpha) = 1$, soit $2\alpha = 90^\circ$, donc pour $\alpha = 45^\circ$.

Elle vaut alors $L = \frac{v_0^2}{g}$. On a donc

$$v_0 = \sqrt{gL}.$$

On calcule $v_0 = 38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$D_v = \pi \frac{d^2}{4} v_0$$

d'où

$$d = \sqrt{\frac{4D_v}{\pi v_0}} = \sqrt{\frac{4 \times 6}{\pi \times 38 \times 60}}.$$

soit $d = 5,8 \text{ cm}$.

□ 2 — Dans le jet, les gouttes sont en mouvement sous la seule action du champ de pesanteur. La résultante des forces de pression sur une goutte est donc nulle. On en déduit que **la pression dans uniforme dans le jet**. La continuité de la pression à la frontière du jet permet de conclure qu'elle est égale à la pression atmosphérique P_0 .

L'écoulement dans le jet peut être considéré comme stationnaire, parfait et incompressible : **le théorème de Bernoulli s'y applique**, soit $\frac{v^2}{2} + gz = \text{cte}$.

La vitesse est minimale au point de plus haut de la trajectoire (quand z est maximum), en $x = L/2$, soit

$$z_{\max} = z(L/2) = -\frac{g}{2} \frac{L^2/4}{Lg/2} + \frac{L}{2} = -\frac{L}{4} + \frac{L}{2} = \frac{L}{4}.$$

On a alors

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{v_{\min}^2}{2} + \frac{gL}{4}$$

d'où

$$v_{\min}^2 = v_0^2 - \frac{gL}{2} = gL - \frac{gL}{2} = \frac{gL}{2}$$

soit

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL}{2}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

On calcule $v_{\min} = 27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

□ 3 — Le nombre de Reynolds s'écrit $\mathcal{R} = \frac{\rho_0 d v_0}{\eta}$.

On calcule $\mathcal{R} = \frac{10^3 \times 5,8 \times 10^{-2} \times 38}{10^{-3}}$ soit $\mathcal{R} = 2,2 \times 10^6$.

On a $\mathcal{R} > 2 \times 10^3$: l'écoulement dans le canon à eau est **turbulent**.

□ 4 — Pour $\varepsilon = 0,1 \text{ mm}$, la rugosité relative est $\frac{\varepsilon}{d} = 1,7 \times 10^{-3}$. On lit sur le diagramme de Moody

$$\xi_{\min} = 0,024.$$

Pour $\varepsilon = 1,0 \text{ mm}$, la rugosité relative est $\frac{\varepsilon}{d} = 1,7 \times 10^{-2}$.

On lit sur le diagramme de Moody $\xi_{\max} = 0,045$.

Les pertes de charge correspondantes sont

$$\Delta P_{\min} = 3,1 \times 10^5 \text{ Pa} = 3,1 \text{ bar}$$

et

$$\Delta P_{\max} = 5,7 \times 10^5 \text{ Pa} = 5,7 \text{ bar} .$$

La perte de charge est très importante dans le tuyau.

□ 5 — Le bilan d'énergie mécanique pour l'eau entre le réservoir et l'entrée du canon s'écrit

$$\rho_0 D_v \left[\left(\frac{P_e}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2} \right) - \frac{P_0}{\rho_0} \right] = \mathcal{P}$$

soit

$$\mathcal{P} = D_v \left[(P_e - P_0) + \frac{\rho_0 v_0^2}{2} \right] .$$

Le rendement propulsif est donné par

$$k = \frac{\frac{\rho_0 v_0^2}{2}}{P_e - P_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{2}} .$$

□ 6 — On calcule $\mathcal{P} = \frac{6}{60} \left[(6-1)10^5 + \frac{10^3 \times 38^2}{2} \right]$ soit

$\mathcal{P} = 1,2 \times 10^5 \text{ W}$. Cette valeur de puissance est tout à fait accessible avec une pompe usuelle, mais reste assez conséquente.

On calcule $k = 0,59$. Ce n'est pas très élevé : 40 % de la puissance est utilisée pour compenser la perte de charge dans le tuyau du canon à eau.

I Cannon à propulsion chimique

I.A — Le modèle des gaz de Joule

□ 7 — L'entropie molaire est donnée par

$$S_m(T, V_m) = S_0 + \frac{R}{\gamma-1} \ln T + R \ln(V_m - b) .$$

Formons sa différentielle

$$dS_m = \frac{R}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + R \frac{dV_m}{V_m - b} .$$

L'identité thermodynamique pour l'énergie interne molaire s'écrit alors

$$dU_m = \frac{R}{\gamma-1} dT + \left(\frac{RT}{V_m - b} - P \right) dV_m .$$

L'énergie interne molaire ne dépendant que de la température, on doit avoir

$$\frac{RT}{V_m - b} - P = 0$$

soit

$$P(V_m - b) = RT .$$

Avec $V_m = V/n$, on en déduit l'équation d'état

$$P(V - nb) = nRT .$$

L'identité thermodynamique s'écrit alors

$$dU_m = \frac{R}{\gamma-1} dT$$

d'où

$$U_m(T) = \frac{R}{\gamma-1} T + U_0 ,$$

où U_0 est une constante.

Ce modèle décrit un **gaz parfait** si $b = 0$, et **monoatomique** si $\gamma = 5/3$.

Commentaire : le cas $b \neq 0$ correspond au modèle des sphères dures, où les molécules sont assimilées à des petites sphères sans interactions en dehors des collisions. Le paramètre b , appelé covolume molaire, correspond au volume d'une mole de « sphères ». Le volume accessible aux molécules est donc inférieur au volume V de l'enceinte : il faut y soustraire le volume nb occupé par les n moles de gaz. Le gaz parfait correspond au modèle de particules ponctuelles, de volume nul.

□ 8 — Définitions :

$$C_{vm} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V \quad \text{et} \quad C_{pm} = \left(\frac{\partial H_m}{\partial T} \right)_P .$$

On a immédiatement

$$C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1} .$$

L'enthalpie molaire s'écrit

$$H_m = U_m + PV_m .$$

D'après l'équation d'état, on a

$$V_m = \frac{RT}{P} + b$$

d'où

$$H_m = U_m + RT + Pb = \frac{R}{\gamma-1} T + U_0 + RT + Pb .$$

On a donc

$$C_{pm} = \frac{\partial H_{pm}}{\partial T} P = \frac{R}{\gamma-1} + R$$

soit

$$C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} .$$

On retrouve les mêmes expressions que pour le gaz parfait.

□ 9 — Une transformation adiabatique et réversible est isentropique. D'après l'expression de l'entropie molaire, une telle transformation vérifie

$$T^{\frac{1}{\gamma-1}} (V_m - b) = \text{cte.}$$

Comme $P(V_m - b) = RT$, on a

$$P^{\frac{1}{\gamma-1}} (V_m - b)^{\frac{1}{\gamma-1} + 1} = P^{\frac{1}{\gamma-1}} (V_m - b)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{cte}$$

soit

$$P(V_m - b)^\gamma = \text{cte}.$$

Dans le cas du gaz parfait, où $b = 0$, on retrouve la loi de Laplace.

□ 10 — Le gaz atteint sa température maximale juste après l'explosion.

Dans la suite de son évolution, il se refroidit ($Q < 0$) en subissant une détente ($W < 0$). On s'attend donc à $\kappa > 0$.

Le premier principe s'écrit, pour une évolution réversible, en grandeurs molaires

$$dU_m = \delta Q_m + \delta W_m$$

avec $\delta Q_m = \kappa \delta W_m = -\kappa P dV_m$, d'où en utilisant l'identité thermodynamique

$$dU_m = -(\kappa + 1)P dV_m = \frac{R}{\gamma - 1} dT.$$

Avec $P(V_m - b) = RT$, on a

$$R dT = (V_m - b) dP + P dV_m$$

d'où

$$-(\kappa + 1)P dV_m = \frac{V_m - b}{\gamma - 1} dP + \frac{P}{\gamma - 1} dV_m$$

soit

$$(V_m - b) dP + P dV_m = -(\kappa + 1)(\gamma - 1)P dV_m.$$

On a donc

$$\frac{dP}{P} + [1 + (\kappa + 1)(\gamma - 1)] \frac{dV_m}{V_m - b} = 0.$$

On voit apparaître la différentielle logarithmique de l'expression

$$P(V_m - b)^q = \text{cte} \quad \text{avec} \quad q = 1 + (\kappa + 1)(\gamma - 1).$$

Dans le cas de l'évolution adiabatique, où $\kappa = 0$, on retrouve la relation $P(V_m - b)^\gamma = \text{cte}$.

□ 11 — Écrivons la relation précédente entre $t = 0$ et l'instant t :

$$P_i(V_c - nb)^q = P(t)(V_c + \pi a^2 X(t) - nb)^q$$

d'où

$$P(t) = \left(\frac{V_c - nb}{V_c + \pi a^2 X(t) - nb} \right)^q P_c.$$

La force de poussée est $F_p(t) = \pi a^2 P(t)$, soit

$$F_p(t) = \pi a^2 \left(\frac{V_c - nb}{V_c + \pi a^2 X(t) - nb} \right)^q P_c.$$

□ 12 — La force ne dépend que de la position X , soit $F_p = f(X)$. Le travail élémentaire de cette force est

$$\delta W = F_p dX = f(X) dX.$$

On peut écrire $\delta W = -dE_p$, avec

$$\frac{dE_p}{dX} = -f(X) = -\pi a^2 \left(\frac{V_c - nb}{V_c - nb + X} \right)^q P_c.$$

L'énergie potentielle est donnée par une primitive de $f(X)$, qui existe. **La force de poussée est donc conservative.**

I.B — Balistique intérieure

□ 13 — Le projectile est soumis à la force de poussée, et à la réaction du canon, normale au mouvement du projectile car les frottements sont négligés. Le PFD appliqué au projectile s'écrit alors, en projection selon Ox

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = F_p(X)$$

soit

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = \pi a^2 \left(\frac{V_c - nb}{V_c + \pi a^2 X(t) - nb} \right)^q P_c.$$

□ 14 — L'équation précédente s'écrit

$$\frac{dp}{dt} = \pi a^2 \left(\frac{V_c - nb}{V_c + \pi a^2 X - nb} \right)^q P_c.$$

Multiplions par $p(t) = M \frac{dX}{dt}$:

$$p \frac{dp}{dt} = M \frac{dX}{dt} \pi a^2 \left(\frac{V_c - nb}{V_c + \pi a^2 X - nb} \right)^q P_c$$

soit

$$p dp = M \pi a^2 P_c \left(\frac{V_c - nb}{V_c + \pi a^2 X - nb} \right)^q dX.$$

En remarquant que $p dp = \frac{1}{2} d(p^2)$, on obtient

$$d(p^2) = 2MP_c \left(\frac{V_c - nb}{V_c + \pi a^2 X - nb} \right)^q \pi a^2 dX.$$

Pour $X = 0$, on a $p = 0$. On remarque que $q > 1$.

Intégrons quand X varie de 0 à ℓ :

$$\begin{aligned} p_s^2 &= 2MP_c(V_c - nb)^q \int_0^\ell (V_c - nb + \pi a^2 X)^{-q} dX \\ &= \frac{2MP_c(V_c - nb)^q}{1 - q} \left[(V_c - nb + \pi a^2 X)^{-q+1} \right]_0^\ell \\ &= \frac{2MP_c(V_c - nb)^q}{1 - q} \left[(V_c - nb + \pi a^2 \ell)^{1-q} - (V_c - nb)^{1-q} \right] \\ &= \frac{2MP_c(V_c - nb)}{q - 1} \left[1 - \left(\frac{V_c - nb}{V_c - nb + \pi a^2 \ell} \right)^{q-1} \right] \\ &= \frac{2MP_c(V_c - nb)}{q - 1} \left[1 - \left(\frac{\frac{V_c - nb}{\pi a^2}}{\frac{V_c - nb}{\pi a^2} + \ell} \right)^{q-1} \right]. \end{aligned}$$

Avec l'équation d'état $P_c(V_c - nb) = nRT_i$ on peut écrire

$$p_s^2 = \frac{2MnRT_i}{q - 1} \left[1 - \left(\frac{\frac{V_c - nb}{\pi a^2}}{\frac{V_c - nb}{\pi a^2} + \ell} \right)^{q-1} \right]$$

On peut donc écrire

$$p_s = p_\infty \sqrt{1 - \left(\frac{X_0}{\ell + X_0} \right)^{q-1}}$$

avec

$$p_\infty = \sqrt{\frac{2MnRT_i}{q - 1}} \quad \text{et} \quad X_0 = \frac{V_c - nb}{\pi a^2}.$$

On remarque que $p_\infty = \lim_{\ell \rightarrow \infty} p_s$: c'est l'impulsion limite atteinte par le projectile quand la longueur du tube est maximale. Elle correspond au cas où toute l'énergie interne du gaz a été communiquée au projectile. Cette énergie ne dépendant que de la température, on constate que p_∞ croît avec $\sqrt{T_i}$.

En considérant le cas du gaz parfait, on a $q = \gamma$. On peut écrire

$$\frac{p_\infty^2}{2M} = \frac{nRT_i}{\gamma - 1}.$$

Tout l'énergie interne du gaz présent initialement a été convertie en énergie cinétique du projectile.

II Canon électromagnétique

II.A — Ordres de grandeur

□ 15 — Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant; le champ magnétique lui est normal, soit

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta.$$

La distribution étant invariante par translation selon Oz et par rotation autour de l'axe Oz , la composante de $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de z , ni de θ :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta.$$

Appliquons le théorème d'Ampère en prenant comme contour Γ le cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté selon \vec{e}_θ :

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

d'où

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

□ 16 — L'accélération selon Ox étant constante, on peut écrire comme $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a; \quad \frac{dx}{dt} = at \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{at^2}{2}.$$

On atteint l'extrémité du canon au bout de la durée Δt telle que

$$\ell = \frac{a}{2} (\Delta t)^2$$

d'où

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}}.$$

L'impulsion en sortie de canon est

$$p_s = m\dot{x}(\Delta t) = ma\Delta t = ma\sqrt{\frac{2\ell}{a}} = m\sqrt{2\ell a}$$

d'où

$$a = \frac{p_s^2}{2m^2\ell}.$$

On calcule $a = 800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On constate que $a \gg g$: il est légitime de négliger l'effet de la pesanteur dans le cas d'un tir en direction non horizontale.

□ 17 — Étant donné un élément de conducteur de longueur $d\ell$, parcouru par un courant d'intensité I , et placé dans un champ magnétique \vec{B} , il est soumis à la force de Laplace

$$d\vec{F}_L = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

où $d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}$, \vec{u} étant le vecteur tangent au conducteur, orienté dans le sens d'orientation du courant.

En considérant le champ magnétique uniforme, la force de Laplace s'exerçant sur le conducteur de longueur d a pour intensité $F = IdB_0$. Le PFD donnant $F = ma$, on a

$$B_0 = \frac{ma}{Id}.$$

□ 18 — En utilisant le résultat de la question 15, on a

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi d} = \frac{ma}{Id}$$

d'où

$$I = \sqrt{\frac{\pi ma}{\mu_0}}.$$

On calcule $I = \sqrt{\frac{\pi \times 50 \times 10^{-3} \times 800}{4\pi 10^{-7}}} = \sqrt{10^8}$ soit

$$I = 10^4 \text{ A}.$$

La valeur de l'intensité doit être très élevée.

□ 19 — La puissance électrique dissipée par effet Joule est $P_j = RI^2$. L'énergie électrique totale nécessaire est donc

$$E_j = RI^2 \Delta t.$$

L'énergie cinétique emportée par le projectile est

$$E_c = \frac{p_s^2}{2m}.$$

Le rendement de propulsion est donc

$$\eta = \frac{E_c}{E_j} = \frac{p_s^2}{2mRI^2 \Delta t}.$$

Notons $\eta = R_u/R$, avec $R = \frac{p_s^2}{2mI^2 \Delta t}$. Comme $I^2 = \frac{\pi m a}{\mu_0}$, on a

$$R = \frac{p_s^2 \mu_0}{2\pi m^2 a \Delta t}.$$

On a $p_s = mv(\Delta t) = ma\Delta t$, d'où

$$\eta = \frac{R_u}{R} \quad \text{avec} \quad R_u = \frac{\mu_0 p_s}{2\pi m}.$$

Comme R_u est très faible, le rendement de propulsion restera faible, même avec un projectile de faible résistance. L'intensité étant très élevée, les pertes par effet Joule sont importantes.

II.B — Modélisation

□ 20 — La loi de Faraday donne la f.é.m. induite apparaissant dans le circuit :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où $\Phi(t)$ est le flux du champ magnétique à travers le circuit.

Dans le cas du dispositif étudié, nous avons un circuit mobile dans un champ magnétique variable (car l'intensité $I(t)$ est variable). La distinction entre l'induction de Neumann et l'induction de Lorentz est inopérante ici.

□ 21 — La loi d'additivité des tensions s'écrit

$$E_0 = R(X)I(t) - e(t) \quad \text{avec} \quad e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Le flux propre est donné par $\Phi = L(X)I(t)$, d'où

$$E_0 = R(X)I(t) + \frac{d[L(X)I(t)]}{dt}.$$

Le circuit se déformant au cours du temps, l'inductance propre varie dans le temps — c'est une fonction composée $L[X(t)]$ — et on peut écrire

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dX} \frac{dX}{dt}$$

d'où en développant

$$E_0 = R(X)I(t) + L(X) \frac{dI}{dt} + I(t) \frac{dL}{dX} \frac{dX}{dt}.$$

□ 22 — Multiplions l'expression précédente par $I(t)$:

$$E_0 I(t) = R(X)I^2(t) + L(X)I(t) \frac{dI(t)}{dt} + I^2(t) \frac{dL}{dX} \frac{dX}{dt},$$

soit en notant $V(t) = \frac{dX}{dt}$ la vitesse du projectile

$$E_0 I(t) = R(X)I^2(t) + \frac{L(X)}{2} \frac{dI^2(t)}{dt} + I^2(t) \frac{dL}{dX} V(t).$$

Le premier terme apparaît comme la puissance électrique fournie par le générateur. Cette puissance se répartit sous trois formes :

- la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance (2^e terme) ;
- la puissance magnétique reçue par le circuit (3^e terme) ;
- la puissance mécanique \mathcal{P}_m reçue par le projectile (4^e terme).

Cette puissance mécanique peut s'écrire à partir de la force propulsive :

$$\mathcal{P}_m = FV(t) = I^2(t) \frac{dL}{dX} V(t).$$

On en déduit

$$F = I^2(t) \frac{dL(X)}{dX}.$$

Le PFD appliqué au projectile s'écrit, en projection selon Ox :

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = I^2(t) \frac{dL(X)}{dX}.$$

□ 23 — La longueur des rails d'alimentation est certes indépendante de la position du projectile, mais seule la longueur X est parcourue par le courant $I(t)$. Il faut donc prendre en compte cette longueur pour calculer la résistance traversée par $I(t)$: elle dépend de X .

La résistance d'un conducteur de longueur ℓ et de section S est $R = \frac{\ell}{\gamma S}$. Ici la longueur est X , et la section $S = eh$. On a donc

$$R(X) = \rho X \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{\gamma eh}.$$

□ 24 — Le plan (Oxy) est un plan de symétrie des courants; le champ magnétique lui est donc normal, soit $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

En négligeant les effets de bord selon Oz (soit $h \ll d$), on peut s'inspirer du modèle du solénoïde infini et admettre que le champ magnétique est nul à l'extérieur, soit pour $y > d/2$ et $y < -d/2$.

Prenons comme contour Γ un rectangle dans le plan Myz , de hauteur $a < h$ selon Oz , traversé par le rail situé en $y = d/2$. Le bord entre les rails est orienté selon Oz .

On a donc

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = aB_0.$$

Le courant enlacé est

$$I_{\text{enlacé}} = jae \quad \text{avec} \quad j = \frac{I}{he}.$$

Le théorème d'Ampère s'écrit alors

$$aB_0 = \mu_0 \frac{I}{he} ae = \mu_0 \frac{I}{h} a$$

d'où

$$B_0 = \mu_0 \frac{I}{h}.$$

Le flux propre vaut alors

$$\Phi = B_0 X d = \mu_0 \frac{I}{h} X d = L(x) I$$

d'où

$$L(X) = \frac{\mu_0 d}{h} X.$$

On a donc

$$\frac{dL}{dX} = \frac{\mu_0 d}{h}.$$

□ 25 — Le principe de la dynamique écrit à la question 22 s'écrit alors

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = I^2(t) \frac{\mu_0 d}{h}$$

soit

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \alpha I^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu_0 d}{mh}.$$

L'équation électrique établie à la question 21 s'écrit

$$R(X)I(t) + I(t) \frac{dL}{dX} \frac{dX}{dt} + L(X) \frac{dI}{dt} = E_0$$

soit

$$\frac{X(t)}{\gamma eh} I(t) + \frac{\mu_0 d}{h} I(t) \frac{dX}{dt} + \frac{\mu_0 d}{h} X(t) \frac{dI}{dt} = E_0$$

soit

$$X(t)I(t) + \mu_0 \gamma ed I(t) \frac{dX}{dt} + \mu_0 \gamma ed I(t) X(t) \frac{dI}{dt} = \gamma eh E_0.$$

On a donc

$$X(t)I(t) + \tau \left[I \frac{dX}{dt} + X \frac{dI}{dt} \right] = \beta$$

avec

$$\beta = \gamma eh E_0 \quad \text{et} \quad \tau = \mu_0 \gamma ed.$$

Les termes $X(t)I(t)$ et $\tau I \frac{dX}{dt}$ ayant même dimension, on en déduit que τ a la dimension d'un temps. C'est le temps caractéristique du régime transitoire : si on considère le projectile maintenu immobile ($X = \text{cte}$), l'équation se ramène à $I(t) + \tau \frac{dI}{dt} = \beta$ et τ est le temps caractéristique de l'établissement du courant en régime établi.

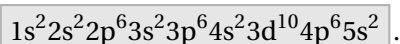
Partie chimie

Les calculatrices sont interdites

Autour du strontium

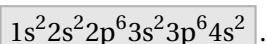
I Structure électronique

□ 1 — La configuration électronique de l'atome de strontium à l'état fondamental est



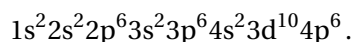
- On obtient cette configuration sachant que l'on peut mettre au maximum 2 électrons sur une sous-couche s, 6 électrons sur une sous-couche p et 10 électrons sur une sous-couche d. On classe les sous-couches par énergie croissante en appliquant la règle de Klechkowski.
- L'énoncé indique que le strontium se situe dans la classification périodique à la 5^e ligne (donc la dernière couche correspond à $n = 5$) et dans la 2^e colonne, d'où la dernière orbitale « s^2 ».

L'élément situé juste au-dessus du strontium dans la classification périodique se situe à la 4^e ligne et à la 2^e colonne, d'où la configuration



Un décompte indique que son numéro atomique est $Z = 20$. D'après les données, il s'agit donc du **calcium**. Le strontium et le calcium étant situés dans la même colonne de la classification périodique, ils ont la même structure électronique externe et donc des propriétés chimiques analogues. Le strontium peut donc naturellement se substituer au calcium.

□ 2 — L'élément de la dernière colonne le plus proche du strontium, ayant sa couche de valence complète, a pour structure atomique



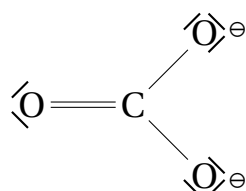
Le strontium doit perdre deux électrons pour acquérir cette structure électronique très stable, formant ainsi un ion Sr^{2+} .

□ 3 — L'ion carbonate a pour formule CO_3^{2-} .

Le carbone a une valence de 4.

L'oxygène possède deux doublets non liant et deux électrons de valence.

On en déduit le schéma de Lewis de l'ion carbonate :



II Cristallographie

□ 4 — Compte tenu de la stœchiométrie SrF_2 de la formule, une maille doit contenir deux fois plus d'ions fluorure que d'ions strontium.

Dans le réseau CFC, la population d'ions Sr^{2+} est

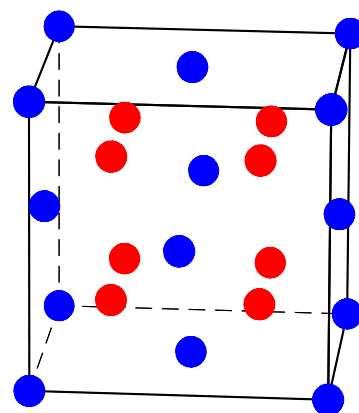
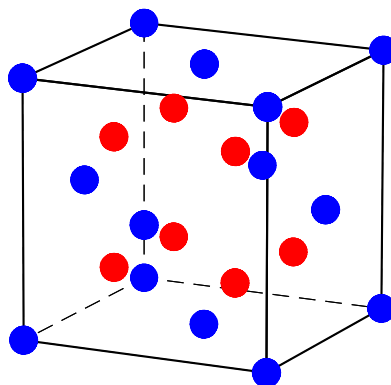
$$8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4.$$

La maille comprenant 8 sites tétraédriques, ils doivent donc être tous occupés par des anions fluorure F^- .

□ 5 — Maille cubique face centrée en perspective sous deux angles différents.

Les cations Sr^{2+} sont en bleu.

Les anions F^- sont en rouge.



La coordination d'un ion F^- est 4 ions Sr^{2+} (site tétraédrique, au centre d'un carré de côté $a/2$ dont la moitié des sommets sont occupés par des ions Sr^{2+}).

La coordination d'un ion Sr^{2+} est de 8 ions F^- .

□ 6 — Le contact anion-cation se fait suivant la demi-diagonale du petit cube de côté $a/2$.

La longueur de la diagonale de ce cube est $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. La somme des deux rayons étant égale à la demi-diagonale, on a

$$R + r = a\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

On en déduit $r = a\frac{\sqrt{3}}{4} - R$. On calcule

$$r = \frac{576}{4} \times \frac{7}{4} - 132 = 252 - 132$$

soit $r = 120 \text{ pm}$.

III Cinétique

□ 7 — En 2016 il s'est écoulé 30 ans depuis l'accident, c'est-à-dire la durée de demi-vie du strontium 90.

Le nombre d'atomes radioactifs a donc été divisé par 2 pendant cette période, et l'activité du strontium est alors de 4000 TBq .

□ 8 — Soit dN la variation du nombre d'atomes de strontium pendant le temps dt (on a $dN < 0$ du fait de leur désintégration).

L'activité est le nombre de désintégration par unité de temps, soit

$$A(t) = -\frac{dN}{dt}.$$

La cinétique étant d'ordre 1, on a

$$-\frac{dN}{dt} = kN.$$

On a donc

$$N(t) = N(0)e^{-kt}.$$

La durée de demi-vie est donnée par

$$N(t_{1/2}) = \frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-kt_{1/2}},$$

d'où $k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$.

L'activité est donc donnée par $A(t) = kN(t)$.

On cherche la date t_1 telle que

$$\frac{A(t_1)}{A(0)} = \frac{N(t_1)}{N(0)} = \frac{8000}{8000 \times 10^{12}} = 10^{-12},$$

d'où $e^{-kt_1} = 10^{-12}$, soit $e^{kt_1} = 10^{12}$. On a donc

$$kt_1 = \ln 10^{12} = 12 \ln 10 = 12 \times 2,3.$$

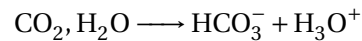
On a donc

$$t_1 = \frac{12 \times 2,3}{k} = t_{1/2} \times \frac{12 \times 2,3}{\ln 2} = 30 \times \frac{12 \times 2,3}{0,7}$$

soit $t_1 = 1,1 \times 10^3 \text{ an}$.

IV Thermodynamique du carbonate de strontium

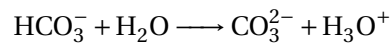
□ 9 — Première acidité :



avec

$$\text{pH} = \text{p}K_{a1} + \log \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]}.$$

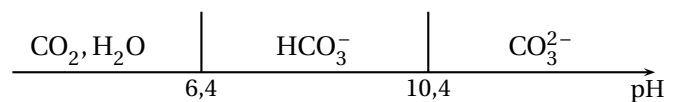
Deuxième acidité :



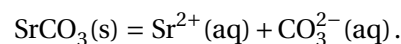
avec

$$\text{pH} = \text{p}K_{a2} + \log \frac{[\text{CO}_3^{2-}]}{[\text{HCO}_3^-]}.$$

On en déduit le diagramme de prédominance des espèces du carbone :



□ 10 — Équation bilan :



On calcule

$$\Delta_r H^\circ = -546 - 677 + 1219 = -4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et

$$\Delta_r S^\circ = -33 - 57 - 98 = -187 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

On en déduit

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ = -4 \times 10^3 + 298 \times 187 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

On a $\Delta_r G^\circ + RT \ln K_s = 0$, d'où

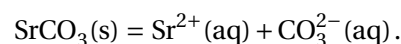
$$\ln K_s = -\frac{\Delta_r G^\circ}{RT} = \frac{4000}{8,3 \times 298} - \frac{187}{8,3}.$$

On calcule $\ln K_s = -21$.

D'après l'annexe, on a $K_s = e^{-21} \approx 7,6 \times 10^{-10}$.

On retrouve la valeur proposée.

□ 11 — La réaction de dissolution du carbonate de strontium dans l'eau pure est



La solubilité s est la quantité maximale de SrCO_3 que l'on peut dissoudre dans l'eau pure.

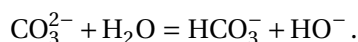
Quand on met s moles de $\text{SrCO}_3(\text{s})$ en solution, on obtient donc s moles de Sr^{2+} et s moles de CO_3^{2-} ; comme on est à la limite de l'équilibre on peut écrire

$$K_s = \frac{[\text{Sr}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}]}{(c^\circ)^2} = \frac{s^2}{(c^\circ)^2}.$$

Cette réaction ne met pas en jeu HO^- et H_3O^+ , donc le pH n'est pas modifié lors de cette dissolution.

Dans l'eau pure, on est alors à $\text{pH} = 7$, ce qui nous place dans le domaine de prédominance de HCO_3^- .

On ne peut donc considérer que la seule réaction de dissolution, il faut aussi prendre en compte la réaction



En supposant que l'état final est dans le domaine de prédominance de HCO_3^- , on peut considérer cette réaction comme quantitative.

La mise en solution de $\text{SrCO}_3(\text{s})$ conduit donc à la formation de s moles de Sr^{2+} et de s moles de CO_3^{2-} qui elles-mêmes vont donner s moles de HCO_3^- et s moles de HO^- .

On a donc

$$K_s = \frac{[\text{Sr}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}]}{(c^\circ)^2} = \frac{[\text{Sr}^{2+}]K_{a2}[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_3\text{O}^+]c^\circ} = \frac{[\text{Sr}^{2+}][\text{HCO}_3^-][\text{HO}^-]K_{a2}}{K_e(c^\circ)^3},$$

soit

$$K_s = \frac{s^3}{(c^\circ)^3} \frac{K_{a2}}{K_e}.$$

On a donc numériquement

$$s = \sqrt[3]{\frac{K_s K_e}{K_{a2}}}.$$

Le calcul donne $s = 6 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ mais les données en annexes ne permettent pas un calcul approché.

On a de plus $[\text{HO}^-] = 6 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ce qui correspond à $\text{pH} = 9,8$: on est trop proche de la frontière entre HCO_3^- et CO_3^{2-} pour considérer que l'on est dans le domaine de prédominance de HCO_3^- ...

□ 12 — La relation de Van't Hoff s'écrit

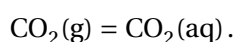
$$\frac{d \ln K_s}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} < 0$$

comme $\Delta_r H^\circ < 0$.

La constante d'équilibre diminue lorsque T augmente, donc **la solubilité diminue si on augmente la température.**

► La valeur de ΔH° est faible par rapport aux valeurs usuelles : la réaction est en fait quasi-athermique, et l'influence de la température est faible.

□ 13 — L'équilibre suivant est réalisé :



On a donc

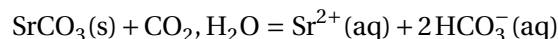
$$K = \frac{[\text{CO}_2(\text{aq})]P^\circ}{c^\circ P(\text{CO}_2(\text{g}))}$$

Avec $P(\text{CO}_2(\text{g})) = 1 \text{ bar}$, on en déduit

$$[\text{CO}_2] = c^\circ K$$

soit $[\text{CO}_2] = 0,024 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

□ 14 — La constante de l'équilibre



s'exprime

$$K' = \frac{[\text{Sr}^{2+}][\text{HCO}_3^-]^2}{[\text{CO}_2](c^\circ)^2}.$$

On a

$$K_s = \frac{[\text{Sr}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}]}{(c^\circ)^2}$$

ainsi que

$$K_{a1} = \frac{[\text{HCO}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CO}_2]c^\circ} \quad \text{et} \quad K_{a2} = \frac{[\text{CO}_3^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HCO}_3^-]c^\circ}.$$

On peut donc former

$$K' = K_s \frac{K_{a1}}{K_{a2}}.$$

Si on dissout complètement s' moles de carbonate de strontium, la stœchiométrie de la réaction de dissolution donne

$$[\text{Sr}^{2+}] = s' \quad \text{et} \quad [\text{HCO}_3^-] = 2s'.$$

La concentration de $\text{CO}_2(\text{aq})$ étant fixée, on en déduit

$$K' = \frac{4s'^3}{[\text{CO}_2](c^\circ)^2}.$$

□ 15 — On calcule dans un premier temps

$$K' = K_s \frac{K_{a1}}{K_{a2}} = 7,6 \times 10^{-10} \frac{10^{-6,4}}{10^{-10,4}} = 7,6 \times 10^{-6}.$$

On a alors

$$s'^3 = \frac{K'[\text{CO}_2]}{4} = \frac{0,024 \times 7,6 \times 10^{-6}}{4} = 7,6 \times 6 \times 10^{-9} \approx 5 \times 10^{-8},$$

d'où

$$s' = (50 \times 10^{-9})^{1/3} = \sqrt[3]{50} \times 10^{-3}$$

soit $s' = 3,7 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

La solubilité du carbonate de strontium est plus élevée si on tient compte de la réaction des ions CO_3^{2-} formés avec CO_2 : la consommation des CO_3^{2-} formés permet de dissoudre plus de carbonate de calcium.