

Sujet d'entraînement

Solution

Moteur endoréversible

I Moteur thermique : cycle de Carnot

1. Un cycle moteur est parcouru **dans le sens horaire**, soit ici $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$.

Justification :

Le travail reçu sur une étape $A \rightarrow B$ est donné par

$$W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV.$$

Il est donc donné par l'aire algébrique sous la courbe $P(V)$.

Un cycle moteur correspond à un travail reçu négatif sur tout le cycle :

$$\oint_{\Gamma} P dV < 0.$$

Dans le sens horaire, on a

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_{A,ABC}}^{V_C} P dV - \int_{V_C, CDA}^{V_A} P dV \\ &= - \int_{V_{A,ABC}}^{V_C} P dV + \int_{V_{A,ADC}}^{V_C} P dV = -\mathcal{A}_{\text{sup}} + \mathcal{A}_{\text{inf}}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_{\text{sup}}$ est l'aire sous la courbe supérieure ABC et $\mathcal{A}_{\text{inf}}$ l'aire sous la courbe inférieure ADC . Comme $\mathcal{A}_{\text{sup}} > \mathcal{A}_{\text{inf}}$, le sens horaire correspond bien à $W < 0$.

2. Dans le diagramme (T, S) , les isothermes sont des segments verticaux et les adiabatiques réversibles, qui sont des isentropiques, sont des segments horizontaux.

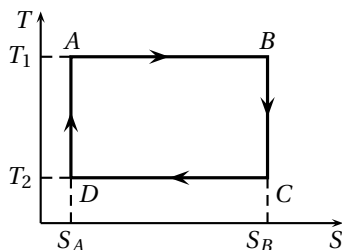
► Adiabatique : $S_{\text{reçu}} = 0$; réversible : $S_{\text{créé}} = 0$. Donc $\Delta S = S_{\text{reçu}} + S_{\text{créé}} = 0$: isentropique.

Les évolutions étant réversibles, le bilan d'entropie pour chaque étape s'écrit $\Delta S = S_{\text{reçu}}$. En particulier pour les évolutions monospermes (i.e. en contact avec une source de chaleur), on a $\Delta S = \frac{Q}{T}$.

Le fluide est au contact avec la source chaude dans l'étape AB , donc $Q_{AB} > 0$. On a donc

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T} > 0$$

soit $S_B > S_A$. Le cycle est donc parcouru dans le sens horaire.



3. *Méthode :* on demande de calculer ΔU , W et Q . Selon la nature de la transformation, deux de ces grandeurs sont

simples à calculer, la troisième s'en déduit par $\Delta U = W + Q$. L'ordre dans lequel il faut calculer ces trois grandeurs dépend donc de la nature de la transformation.

Étape $A \rightarrow B$

Isotherme pour un gaz parfait¹, donc $\Delta U_{AB} = 0$.

On calcule le travail reçu en utilisant l'équation d'état $PV = RT_1$ (une mole) :

$$W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = -RT_1 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

$$\text{soit } W_{AB} = -RT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

Du premier principe $\Delta U = W + Q$ on déduit $Q_{AB} = -W_{AB}$, soit

$$Q_{AB} = RT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

Pour une évolution monotherme réversible, $\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_1}$,

$$\text{soit } \Delta S_{AB} = R \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

Étape $B \rightarrow C$

Adiabatique, donc $Q_{BC} = 0$.

Pour le gaz parfait, $\Delta U_{BC} = C_v(T_2 - T_1)$.

Du premier principe $\Delta U = W + Q$ on déduit $W_{BC} = C_v(T_2 - T_1)$.

Adiabatique réversible, donc $\Delta S_{BC} = 0$.

Étape $C \rightarrow D$

Isotherme, les calculs sont similaires à l'étape $A \rightarrow B$:

$$\Delta U_{CD} = 0; \quad W_{CD} = -RT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right); \quad Q_{CD} = RT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \quad \text{et}$$

$$\Delta S_{CD} = R \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right).$$

Étape $D \rightarrow A$

Adiabatique réversible, les calculs sont similaires à l'étape $B \rightarrow C$:

$$Q_{DA} = 0; \quad \Delta U_{DA} = C_v(T_1 - T_2); \quad W_{DA} = C_v(T_1 - T_2) \quad \text{et}$$

$$\Delta S_{DA} = 0.$$

4. Les étapes $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$ étant adiabatiques, on a

$$Q_{BC} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{DA} = 0$$

Ces étapes étant réversibles, on a

$$\Delta S_{BC} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{DA} = 0.$$

L'étape AB étant réversible monotherme, le bilan d'entropie s'écrit

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_1}.$$

On a donc $Q_{AB} = T_1 \Delta S_{AB}$.

1. Qui suit donc la 1^{re} loi de Joule : son énergie interne ne dépend que de la température.

L'entropie étant une fonction d'état, on a pour un cycle

$$\Delta S = 0 = \Delta S_{AB} + \Delta S_{DA}$$

comme $\Delta S_{BC} = 0$ et $\Delta S_{DA} = 0$.

On a donc $\Delta S_{DA} = -\Delta S_{AB}$.

L'étape $D \rightarrow A$ étant monotherme réversible, on a

$$\Delta S_{DA} = \frac{Q_{DA}}{T_2},$$

d'où $Q_{DA} = T_2 \Delta S_{DA}$, soit $Q_{DA} = -T_2 \Delta S_{AB}$.

5. L'énergie coûteuse sur un cycle est Q_{AB} , transfert thermique fourni par la source chaude.

L'énergie utile sur un cycle est $-W > 0$, travail reçu par l'extérieur.

Le rendement est donc donné par

$$\eta = \frac{-W}{Q_{AB}}.$$

Comme pour un cycle

$$\Delta U = 0 = W + Q_{AB} + Q_{CD}$$

on peut écrire

$$\eta = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}}.$$

En notant $Q_1 = Q_{AB}$ et $Q_2 = Q_{CD}$, on obtient

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}.$$

6. Avec les expressions des transferts thermiques établies précédemment, on en déduit

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

► On retrouve l'expression générale du rendement du cycle de Carnot (cycle réversible constitué de deux adiabatiques et de deux isothermes), indépendamment de la nature du fluide.

II Étude des transferts thermiques avec les thermostats en fonction du temps en régime stationnaire

7. Bilan d'énergie sur la tranche comprise entre x et $x + dx$ en régime stationnaire :

$$0 = \phi(x) dt - \phi(x + dx) dt = -\frac{d\phi}{dx} dx dt$$

On en déduit que $\phi(x)$ est uniforme (il ne dépend pas de x). Comme $\phi(x) = j_Q(x)\Sigma$, le vecteur densité volumique de courant est donc uniforme : $\vec{j}_Q = j_Q \vec{u}_x$.

D'après la loi de Fourier

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_b - T_a}{L}$$

car une dérivée constante est égale au taux de variation. On a donc

$$\vec{j}_Q = \frac{\lambda}{L} (T_a - T_b) \vec{u}_x.$$

En intégrant la loi de Fourier avec $T(0) = T_a$ et $T(L) = T_b$:

$$T(x) = T_a + (T_b - T_a) \frac{x}{L}.$$

8. La résistance thermique est définie en régime stationnaire par

$$T_a - T_b = R_{th} \phi.$$

Avec $\Phi = \frac{\lambda \Sigma}{L} (T_a - T_b)$ on en déduit $R_{th} = \frac{L}{\lambda \Sigma}$.

La conductance thermique est donc donnée par

$$\sigma = \frac{\lambda \Sigma}{L}.$$

9. Le transfert thermique traversant la paroi pendant Δt est donné par

$$Q = \phi \Delta t.$$

On en déduit

$$\Delta t = \frac{Q}{\phi}$$

soit

$$\Delta t = \frac{QL}{\lambda \Sigma (T_a - T_b)}.$$

En utilisant la conductance thermique de la paroi, on peut écrire

$$\Delta t = \frac{Q}{\sigma (T_a - T_b)}.$$

On constate que

$$\lim_{T_a \rightarrow T_b} \Delta t = +\infty.$$

Quand la température entre les deux extrémités de la paroi deviennent très proches, il faut un temps très long pour transférer une énergie donnée par conduction thermique à travers cette paroi.

10. Le transfert thermique s'effectue spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid (le signe du ϕ est le même que celui de $T_a - T_b$ dans l'étude précédente).

Dans le fonctionnement du moteur ditherme, on a $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$.

Il faut donc

$$T_c > T_1 \quad \text{et} \quad T_f < T_2.$$

11. On utilise le résultat de la question 5.c, sachant que $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$, et que $T_c - T_1 > 0$ et $T_2 - T_f > 0$. On obtient alors

$$t_1 = \frac{Q_1}{\sigma_1 (T_c - T_1)} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-Q_2}{\sigma_2 (T_2 - T_f)}.$$

12. Comme établi à la question 4.b, on a

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Le transfert thermique reçu par le fluide de la part de la source chaude l'est à travers la paroi. L'entropie reçue lors de cette étape s'exprime en fonction de la température à la frontière du système, c'est-à-dire ici la température de la paroi en contact avec le fluide, soit T_1 (et non la température

de la source T_c qui est de l'autre côté de la paroi). On a donc pour les deux transferts thermiques

$$S_{\text{reçu},1} = \frac{Q_1}{T_1} \quad \text{et} \quad S_{\text{reçu},2} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Le système est le fluide; son évolution étant réversible, on a

$$S_{\text{créé},1} = 0 \quad \text{et} \quad S_{\text{créé},2} = 0.$$

Les deux autres étapes étant isentropiques (adiabatiques réversibles), le bilan d'entropie pour le cycle s'écrit alors

$$\Delta S = S_1 + S_2 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}.$$

On retrouve l'égalité de Clausius, avec les températures du fluide (et non des sources). On en déduit

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

13. Le rendement étant défini par $\eta = -\frac{W}{Q_1}$, avec $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, on en déduit

$$Q_1 = -\frac{T_1 W}{T_1 - T_2}.$$

D'après l'égalité de Clausius $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ on peut écrire

$$Q_2 = \frac{T_2 W}{T_1 - T_2}.$$

D'après la question 5.b, on en déduit les expressions des durées des transferts thermiques :

$$t_1 = -\frac{W}{\sigma_1} \frac{1}{T_c - T_1} \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad \text{et} \quad t_2 = -\frac{W}{\sigma_2} \frac{1}{T_2 - T_f} \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

III Conditions pour obtenir une puissance maximum

14. Le moteur fournit l'énergie $-W > 0$ pendant la durée $t_1 + t_2$. La puissance moyenne du moteur est donc donnée par

$$\mathcal{P} = -\frac{W}{t_1 + t_2}.$$

Son inverse s'écrit donc

$$Z = -\frac{t_1}{W} - \frac{t_2}{W}.$$

Avec les expressions de t_1 et t_2 établies précédemment, on obtient

$$Z = \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{T_c - T_1} \frac{T_1}{T_1 - T_2} + \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{T_2 - T_f} \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

15. En posant $x = \frac{T_1}{T_2}$ et $y = T_1 - T_2$, on a $T_1 = xT_2$ d'où

$$T_2 = \frac{y}{x-1} \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{xy}{x-1}.$$

2. Si $x < 1$ on a $\sqrt{x} < 1$ et $\sqrt{x}\sqrt{x} < \sqrt{x}$.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{T_c - \frac{xy}{x-1}} \frac{\frac{xy}{x-1}}{\frac{xy}{x-1} - \frac{y}{x-1}} + \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{\frac{y}{x-1} - T_f} \frac{\frac{y}{x-1}}{\frac{xy}{x-1} - \frac{y}{x-1}} \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{T_c - \frac{xy}{x-1}} \frac{xy}{xy - y} + \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{\frac{y}{x-1} - T_f} \frac{y}{xy - y} \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{T_c - \frac{xy}{x-1}} \frac{x}{x-1} + \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{\frac{y}{x-1} - T_f} \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \frac{x}{T_c(x-1) - xy} + \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{y - (x-1)T_f} \end{aligned}$$

soit

$$Z = \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{T_c(1 - \frac{1}{x}) - y} + \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{y - (x-1)T_f}.$$

16. La puissance sera extrémale pour $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$.

Il faut donc d'une part

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{1}{\sigma_1} \frac{\frac{T_c}{x^2}}{[T_c(1 - \frac{1}{x}) - y]^2} + \frac{1}{\sigma_2} \frac{T_f}{[y - (x-1)T_f]^2} = 0,$$

soit

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{[T_c(1 - \frac{1}{x}) - y]^2} \frac{T_c}{x^2} = \frac{1}{\sigma_2} \frac{T_f}{[y - (x-1)T_f]^2}. \quad (1)$$

Il faut d'autre part

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{[T_c(1 - \frac{1}{x}) - y]^2} - \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{[y - (x-1)T_f]^2}$$

soit

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{[T_c(1 - \frac{1}{x}) - y]^2} = \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{[y - (x-1)T_f]^2}. \quad (2)$$

En faisant le rapport des équations (1) et (2) on obtient

$$\frac{T_c}{x^2} = T_f$$

soit

$$\frac{T_c}{T_f} = x^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2.$$

La puissance délivrée est donc maximum pour

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{T_c}{T_f}}.$$

17. Le rendement $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ vaut alors

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_f}{T_c}}.$$

Le rendement du cycle idéal de Carnot fonctionnant entre les mêmes sources est donné par

$$\eta_{\text{id}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

Comme $\frac{T_f}{T_c} < 1$, on a²

$$\frac{T_f}{T_c} < \sqrt{\frac{T_f}{T_c}}$$

d'où

$$\eta < \eta_{id}.$$

Le cycle de Carnot est le cycle qui a le meilleur rendement.

18. Calcul des rendements :

Centrale	η	η_{id}
Centrale charbon	$\eta = 0,40$	$\eta_{id} = 0,64$
Centrale nucléaire	$\eta = 0,27$	$\eta_{id} = 0,47$
Centrale géothermique	$\eta = 0,18$	$\eta_{id} = 0,33$

Le rendement correspond à la puissance maximale établi dans le cadre du modèle étudié ici est très proche du rendement expérimental, tandis que ce rendement du cycle de Carnot est bien au-dessus.

IV Moteur réversible, moteur endoréversible

12. Le fluide subit une évolution réversible. Les sources d'irréversibilité sont à chercher du côté des échanges thermiques entre le fluide et les sources de chaleur ; le transfert thermique dans les parois en est la cause.

13. Le système est la paroi de largeur L . Les transferts thermiques reçus pendant la durée Δt sont donnés par :

- $Q(x=0) = +j_Q \Sigma \Delta t$ à travers sa paroi à la température T_a en $x=0$;
- $Q(x=L) = -j_Q \Sigma \Delta t$ à travers sa paroi à la température T_b en $x=L$.

L'entropie reçue s'écrit donc

$$S_{reçu} = \frac{Q(x=0)}{T_a} + \frac{Q(x=L)}{T_b} = j_Q \Sigma \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b} \right) \Delta t.$$

En régime stationnaire, la variation d'entropie pendant Δt est donnée par le bilan

$$\Delta S = 0 = S_{créé} + S_{reçu},$$

d'où

$$S_{créé} = j_Q \Sigma \left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_a} \right) \Delta t$$

soit

$$S_{créé} = j_Q \Sigma \frac{T_a - T_b}{T_a T_b} \Delta t.$$

Le taux d'entropie créée par unité de temps dans la paroi est donc donné par

$$\dot{S}_{créé} = j_Q \Sigma \frac{T_a - T_b}{T_a T_b}.$$

Avec $j_Q = \frac{\lambda(T_a - T_b)}{L}$ et $\sigma = \frac{\lambda \Sigma}{L}$, on en déduit

$$\dot{S}_{créé} = \sigma \frac{(T_a - T_b)^2}{T_a T_b}.$$

14. On remarque que $\dot{S}_{créé} > 0$: les irréversibilités sont localisées dans la paroi séparant le fluide des sources de chaleur.

Le cas limite de la réversibilité correspond à $T_a = T_b$: les températures de part et d'autre de la paroi sont égales. Dans le cadre du moteur, cela correspond au cas limite où $T_c = T_1$ et $T_f = T_2$: il s'agit du moteur de Carnot, donc le fonctionnement global est réversible. L'inconvénient de ce moteur est que la puissance qu'il délivre est nulle : si $T_a = T_b$, on a $j_Q = 0$: le transfert thermique à travers la paroi est nul.