

Protection des données bancaires par un conducteur

La protection du téléphone portable contre le piratage est devenue essentielle. On étudie la mise en place d'une protection simple en insérant une feuille d'aluminium dans la pochette du téléphone. En effet, les puces à distances (NFC-RFID) possèdent une antenne et un convertisseur de signal. L'antenne perçoit le signal de fréquence d'environ 14 MHz, émis à distance par le terminal et le convertisseur transforme ce signal en signal « horloge » qui sert à synchroniser les échanges de la puce et du terminale. À quelques mètres, on peut donc solliciter une puce NFC-RFID et recueillir ses données relativement aisément. Pour se prémunir d'un piratage, il suffit de protéger son téléphone à l'aide d'une feuille constituée par exemple d'aluminium.

On considère l'aluminium comme un conducteur ohmique, homogène, isotrope et non magnétique. En son sein, les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse d'ensemble $\vec{v}(t)$ soumis à l'action d'un champ électrique variable $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. Les électrons libres, de masse m et de charge $-e$, sont soumis en outre selon le modèle de Drude, à une force $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t)$ où τ est une constante physique traduisant les interactions avec l'ensemble du réseau cristallin, sa valeur est d'environ $1,0 \times 10^{-14}$ s. Le poids de ces charges est négligé. Le conducteur est immobile dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.

1 — Loi d'Ohm locale

1. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ des électrons.
2. Déterminer, en régime forcé, une expression de la vitesse sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp(i\omega t)$ où $\vec{v}_0$ est l'amplitude vectorielle complexe de la vitesse que l'on exprimera en fonction des données du problème.
3. On note n^* la densité volumique, supposée constante, d'électrons libres. Déterminer l'expression, en notation complexe, du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$.
4. Montrer alors que l'on peut établir une loi d'Ohm locale complexe en considérant que la conductivité électrique du milieu $\underline{\gamma}$ peut s'écrire, en notation complexe, sous la forme $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + ig(\omega)}$ où γ_0 correspond à la conductivité électrique « statique » et $g(\omega)$ à une fonction de la pulsation. On exprimera ces deux grandeurs en fonction des données de l'énoncé.
5. Déterminer la valeur de la fréquence limite f_{lim} en dessous de laquelle on peut considérer que la loi d'Ohm en notation réelle peut s'écrire sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.
6. Peut-on écrire la loi d'Ohm sous la forme $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ pour les communications NFC-RFID?
7. Pour les communications NFC-RFID, estimer numériquement le rapport entre la norme du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ et celle du vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ présent dans l'équation de Maxwell-Ampère que l'on rappellera.
8. En déduire une simplification de la formulation de l'équation de Maxwell-Ampère. Comment appelle-t-on cette approximation?

2 — Propagation d'une onde électromagnétique

On considère désormais une onde électromagnétique plane progressive et harmonique (OPPH) $\vec{E}_c(z, t)$ de pulsation ω se propageant dans le conducteur précédemment considéré qui occupe le demi-espace $z \geq 0$. En notation complexe, cette onde s'écrit

$$\underline{\vec{E}}_c(z, t) = E_{0,c} \exp(i(\omega t - \underline{k}_t z)) \vec{e}_x.$$

L'amplitude $E_{0,c}$ est supposée constante et le vecteur d'onde $\vec{k}_t = \underline{k}_t \vec{e}_z$ est complexe de telle sorte que $\underline{k}_t = \alpha + i\beta$ avec α et β réels.

9. On suppose que la loi d'Ohm s'écrit sous la forme $\vec{J} = \gamma_0 \vec{E}$. Montrer que dans le conducteur la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ peut être considérée comme nulle au bout d'un temps τ' que l'on exprimera en fonction des données du problème. On pourra notamment utiliser l'équation de conservation de la charge, que l'on ne cherchera pas à démontrer, et établir l'équation vérifiée par $\rho(M, t)$.

10. Justifier que l'on peut supposer que le milieu est électriquement neutre. Écrire dans ces conditions l'équation de Maxwell-Gauss dans un conducteur ohmique.

11. En supposant que les valeurs des fréquences utilisées permettent d'utiliser les versions simplifiées des équations de Maxwell identifiées dans les questions 8 et 10, établir l'équation suivante pour le champ électrique $\vec{E}_c$ au sein du conducteur

$$\Delta \vec{E}_c(z, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial \vec{E}_c(z, t)}{\partial t} = \vec{0}.$$

Exprimer D en fonction des grandeurs du problème et préciser son unité.

12. Montrer alors que la relation de dispersion, pour le milieu considéré, s'écrit

$$\underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\gamma_0.$$

13. Déterminer l'expression des grandeurs α et β en choisissant $\alpha > 0$, c'est-à-dire en considérant une propagation vers les z croissants.

14. Montrer alors que le champ électrique, en notation réelle, dans le conducteur peut se mettre sous la forme

$$\vec{E}_c(z, t) = E_{0,c} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x.$$

Exprimer δ en fonction des données de l'énoncé.

15. Proposer une représentation soignée de la composante suivant x , soit $E_{c,x}$, de $\vec{E}_c(z, t)$ à t fixé, en fonction de z pour le demi-espace $z \geq 0$. On fera apparaître la grandeur δ sur le schéma.

16. Comment appelle-t-on δ ? Quelle est sa signification physique? Donner la valeur de δ pour les ondes électromagnétiques de communication NFC-RFID.

3 — Réflexion sur un conducteur ohmique

L'onde $\vec{E}_c(z, t)$ présente dans le conducteur précédent est due à la présence d'une OPPH incidente se propageant dans le vide, supposée occuper le demi-espace $z < 0$, vers les z croissants de même pulsation ω de la forme, en notation complexe, $\vec{E}_i(z, t) = \underline{E}_{0,i} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$, avec $k = \frac{\omega}{c} > 0$.

L'onde incidente atteint le conducteur en $z = 0$.

17. Proposer une expression du champ électrique d'amplitude complexe $\underline{E}_{0,r}$.

18. En exploitant les relations de continuité du champ électrique à la surface d'un dioptré, déterminer une relation reliant les coefficients complexes de transmission $\underline{t} = \frac{\underline{E}_{0,c}}{\underline{E}_{0,i}}$ et de réflexion $\underline{r} = \frac{\underline{E}_{0,r}}{\underline{E}_{0,i}}$ en amplitude de l'onde électromagnétique.

19. Déterminer l'expression des champs magnétiques incidents $\vec{B}_i(z, t)$, réfléchi $\vec{B}_r(z, t)$ et transmis $\vec{B}_c(z, t)$.

20. En exploitant les relations de continuité du champ magnétique à la surface d'un dioptré et en considérant les courants surfaciques nuls, déterminer une nouvelle relation entre $\underline{t}$ et $\underline{r}$.

21. En combinant les deux expressions précédentes de $\underline{t}$ et $\underline{r}$, montrer que

$$\underline{r} = \frac{k\delta - 1 + i}{k\delta + 1 - i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2k\delta}{k\delta + 1 - i}.$$

22. Que deviennent les expressions de $\underline{t}$ et $\underline{r}$ dans le cas où l'aluminium est considéré comme un conducteur parfait? Que dire de l'efficacité de la protection de données avec un conducteur parfait?

23. En réalité, l'aluminium n'est pas un conducteur parfait. Déterminer la valeur du coefficient de transmission en énergie $T = 1 - |\underline{r}|^2$ pour des ondes électromagnétiques de communication NFC-RFID. Conclure sachant qu'une feuille d'aluminium standard de cuisine a une épaisseur $a = 0,020$ mm.

Données

Données générales

Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Données sur l'aluminium métallique

Conductivité en régime permanent	$\gamma_0 = 38 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique relative	$\epsilon_r = 1$
Perméabilité magnétique relative	$\mu_r = 1$

Formulaire

Les grandeurs complexes sont soulignées d'un trait et on note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
Le symbole $\times$ désigne l'opération produit vectoriel. L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Analyse vectorielle

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) &= (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \Delta \vec{A} &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Relation de continuité des champs électromagnétiques

En présence de charges surfaciques σ , la composante normale du champ électrique est discontinue au niveau d'un dioptre séparent deux milieux 1 et 2 ; sa composante tangentielle est toujours continue :

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{2,t} - \vec{E}_{1,t} = \vec{0}.$$

En présence de courants surfaciques $\vec{j}_s$, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue au niveau d'un dioptre séparant deux milieux 1 et 2 ; sa composante normale est toujours continue :

$$\vec{B}_{2,t} - \vec{B}_{1,t} = \mu_0 \times \vec{j}_s \quad \text{et} \quad \vec{B}_{2,n} - \vec{B}_{1,n} = \vec{0}.$$