

Ondes électromagnétique dans un câble coaxial

On considère la transmission d'un signal fourni par un microphone *via* un câble coaxial. Celui-ci est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux infinis, de rayons respectifs a et b ($a < b$) (figure 1). L'espace entre les deux conducteurs est assimilé à du vide.

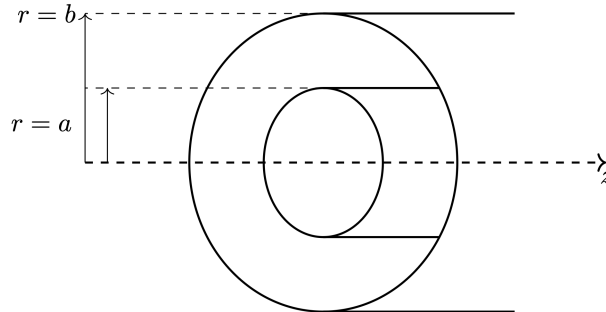


FIGURE 1 – Câble coaxial

On étudie le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le câble en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) co-linéaire à l'axe du câble. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant électrique $i(z, t) = i_0 \cos(\omega t - kz)$, tandis que le conducteur extérieur est parcouru par $-i(z, t)$.

1. Rappeler les équations de Maxwell. Que deviennent-elles dans le vide?
2. Établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.
3. Montrer que des ondes planes de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t - jkz)$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp(j\omega t - jkz)$ peuvent se propager dans le vide. En déduire l'expression du vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{e}_z$. Caractériser la structure des ondes planes.
4. On cherche, maintenant, des solutions compatibles avec les conditions aux limites imposées par le câble. On suppose que les conducteurs sont parfaits. Justifier que le courant $i(z, t)$ est surfacique.
5. On suppose qu'en un point M de coordonnées (r, θ, z) , le champ électromagnétique est de la forme

$$G_X = \begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_0(r) \exp(j\omega t - jkz) \vec{e}_r \\ \vec{B}(M, t) = B_0(r) \exp(j\omega t - jkz) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Cette forme est appelée mode transverse électrique et magnétique (mode TEM). En intégrant l'équation de Maxwell-Ampère sur un contour $\mathcal{C}$ judicieusement choisi, montrer que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$$

où $i_{\text{enlacé}}$ sont les courants enlacés par le contour $\mathcal{C}$.

6. En déduire l'expression de $B(r)$ pour $r < a$, $a < r < b$ puis $r > b$.
7. Montrer que, pour $a < r < b$, $E_0(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{k}{\omega} i_0 \cos(\omega t - kx)$.
8. Le mode TEM décrit-il une onde plane? Montrer que la relation de structure s'écrit $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.
9. Calculer la vitesse de phase v_ϕ . Y a-t-il dispersion?
10. Calculer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie instantanée dans la partie $a < r < b$. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie.
11. Calculer la puissance moyenne se propageant le long du câble
12. En pratique, la conductivité n'est pas infinie et le champ électromagnétique pénètre dans les conducteurs. La conductivité du cuivre vaut $\sigma = 5,9 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Discuter la pertinence de l'utilisation du modèle du conducteur parfait.