

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide	c	$3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$
Permittivité du vide	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	m_e	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

On note j le nombre complexe de partie imaginaire positive vérifiant $j^2 = -1$. En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , on convient d'associer à toute grandeur sinusoïdale $a(t) = A \cos(\omega t + \varphi_a)$ deux grandeurs complexes :

- la première, notée $\underline{A} = A e^{j\varphi_a}$, appelée amplitude complexe associée à a ;
- la seconde, notée $\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi_a)} = \underline{A} e^{j\omega t}$, appelée grandeur sinusoïdale complexe associée à a .

Dans le cas où la grandeur sinusoïdale est un champ $a(M, t) = A \cos[\omega t + f(M) + \varphi_a]$, dépendant de la date t et de la position $\vec{OM}$ d'un point M via une fonction f nulle lorsque M est confondu avec M , on note $\underline{a}(M, t) = \underline{A} e^{j[\omega t + f(M)]}$ la grandeur sinusoïdale complexe associée à a . À l'exception de j , les grandeurs complexes sont soulignées.

Les différentes parties de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres. Néanmoins, des notions et notations utiles sont introduites au fil du sujet. Aussi est-il conseillé de lire et de résoudre les parties du problème dans l'ordre de présentation.

1 — Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide

On se place dans le vide, milieu supposé n'avoir ni charge ni courant. On introduit un repère cartésien orthonormé direct $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un point M quelconque est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

1. Citer les quatre équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans ce milieu.

On rappelle $\text{rot}(\text{rot } \vec{\sigma}) = \text{grad}(\text{div } \vec{\sigma}) - \Delta \vec{\sigma}$, où $\vec{\sigma}$ est un champ vectoriel et Δ est l'opérateur laplacien vectoriel.

2. Obtenir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$. En déduire la relation entre c , ϵ_0 et μ_0 .

On considère une onde électromagnétique solution de l'équation de d'Alembert de type plane progressive monochromatique, de vecteur d'onde k et de pulsation temporelle ω . On suppose qu'elle se propage dans la direction et le sens de $\vec{e}_z$.

3. Montrer que les champs électrique et magnétique de l'onde sont transverses à l'aide de la notation complexe.

On suppose le champ électrique $\vec{E}$ de l'onde polarisé rectilignement selon $\vec{e}_x$. On note E_0 son amplitude et φ sa phase à l'origine du temps et de l'espace.

4. Donner l'expression du champ électrique réel de l'onde en un point M à l'instant de date t , noté $\vec{E}(M, t)$. On fera notamment apparaître E_0 , ω et k .

5. Établir la relation entre k et ω , appelée relation de dispersion.

6. Obtenir l'expression du champ magnétique réel de l'onde en un point M à l'instant de date t , noté $\vec{B}(M, t)$.

7. Exprimer le vecteur de Poynting de l'onde en un point M à l'instant de date t , noté $\vec{\Pi}(M, t)$.

8. Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point M à l'instant de date t , notée $w(M, t)$, en fonction de E_0 , ω , k , ϵ_0 , t et de z .

9. On note T la période temporelle de l'onde plane progressive monochromatique. Montrer que les valeurs moyennes temporelles de $\vec{\Pi}$ et de w vérifient $\langle \vec{\Pi} \rangle_T = c \langle w \rangle_T \vec{e}_z = \frac{c \epsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_z$.

2 — Pression de radiation

On considère la situation de la figure 1 où le demi-espace $z < 0$ est le vide et le demi-espace $z > 0$ est un conducteur parfait. Une onde incidente, identique à celle décrite dans les questions 4 à 6, est réfléchiée sur la surface du conducteur. On notera respectivement $\vec{k}_i$, $\vec{E}_i(M, t)$ et $\vec{B}_i(M, t)$ le vecteur d'onde, le champ électrique et le champ magnétique de cette onde incidente en un point M à l'instant de date t .

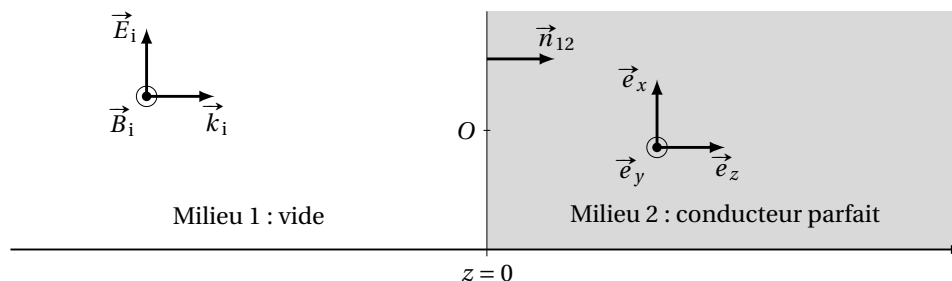


FIGURE 1 – Onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur parfait.

On donne les relations de passage utiles pour le problème. Entre deux milieux 1 et 2, on a :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{J}_s$$

où $\vec{n}_{12}$ est un vecteur unitaire orthogonal à l'interface, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, où les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{B}_1$ (resp. $\vec{E}_2$ et $\vec{B}_2$) sont les champs totaux dans le milieu 1 (resp. dans le milieu 2) au voisinage de l'interface, et où $\vec{J}_s$ est le vecteur densité de courant de surface. On rappelle que les champs électrique et magnétique sont nuls dans un conducteur parfait.

10. Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$ en un point M à l'instant de date t . On supposera que l'onde électrique réfléchie conserve la même polarisation que l'onde incidente.

11. Déterminer l'expression du champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r(M, t)$ en un point M à l'instant de date t .

12. Que vaut le champ magnétique total en $z = 0^-$ (dans le vide au voisinage du conducteur) ? En déduire l'expression du vecteur densité de courant de surface $\vec{J}_s(t)$ sur la surface du conducteur, à la date t .

On admet que $\vec{B}(z = 0, t) = \frac{1}{2} [\vec{B}(z = 0^-, t) + \vec{B}(z = 0^+, t)]$. En outre, en présence de courants surfaciques et d'un champ magnétique, la densité surfacique de la force de Laplace s'écrit $\vec{f}_s = \vec{J}_s \wedge \vec{B}$.

13. Exprimer la force de Laplace totale $\vec{F}_L$ s'exerçant sur l'aire S de la surface du conducteur en fonction de ε_0 , E_0 , S , ω et de t .

14. Calculer la valeur moyenne de cette force sur une période temporelle T de l'onde. En déduire que l'on peut lui associer une pression p , dite pression de radiation, dont l'expression est $p = \varepsilon_0 E_0^2$.

On appelle intensité I du champ électromagnétique la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting. On rappelle qu'en vertu de la relation démontrée dans la question 9, on a $I = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}$.

15. Calculer numériquement la pression de radiation pour la lumière venant du Soleil ($I_1 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$) et pour celle d'un laser de haute intensité ($I_2 = 1 \text{ GW} \cdot \text{m}^{-2}$).

On veut désormais retrouver l'expression de la pression de radiation en décrivant la lumière de manière corpusculaire, en la modélisant par un ensemble de photons se déplaçant dans un faisceau cylindrique d'axe $\vec{e}_z$ et de section S . On prendra une longueur d'onde λ de 600 nm et on appelle E_γ l'énergie d'un seul photon.

16. On note n_γ^* la densité volumique de photons dans le faisceau (on se place dans le cadre d'un modèle simple où cette densité est uniforme). Exprimer n_γ^* en fonction de E_γ , c et de I puis calculer sa valeur numérique dans le cas du laser d'intensité I_2 .

17. Exprimer la quantité de mouvement $\vec{p}_\gamma$ d'un photon en fonction de son énergie E_γ .

18. Déterminer l'expression vectorielle de la variation $\Delta \vec{p}_\gamma$ de la quantité de mouvement d'un photon lors d'un rebond sur la surface métallique en fonction de E_γ et de c . On fait l'hypothèse d'un rebond élastique, c'est-à-dire sans perte d'énergie cinétique.

19. Exprimer la variation de quantité de mouvement $\Delta \vec{p}_{dt}$ de l'ensemble des photons qui rebondissent sur la surface métallique d'aire S pendant une durée infinitésimale dt en fonction de I , S , dt et de c .

20. En déduire la force exercée par les photons sur l'aire S pendant une durée dt et retrouver l'expression de la pression de radiation.