

Les sondages ionosphériques

On se propose d'étudier le principe du sondage ionosphérique utilisé pour mesurer les fluctuations locales des propriétés de la haute atmosphère.

Dans la mesure du possible, les grandeurs complexes seront soulignées, sauf i tel que $i^2 = -1$.

Dans tout le problème, « exprimer » signifie *donner une expression littérale*, « calculer » signifie *donner une expression littérale puis une valeur numérique*; on se contentera alors de deux chiffres significatifs, sauf pour les ordres de grandeurs pour lesquels il suffit de se limiter à la puissance de 10 la plus proche. Les vecteurs sont généralement surmontés d'une flèche ($\vec{v}$) sauf s'ils sont unitaires et sont alors affublés d'un chapeau ($\hat{e}_x$). Enfin, quelques résultats classiques d'analyse vectorielle sont rappelés en fin d'énoncé. Dans tout le problème, $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ désigne une base orthonormée de $\mathcal{R}^3$.

L'ionosphère est la couche supérieure de l'atmosphère terrestre; elle s'étend au-dessus de 50 à 80 km d'altitude; les électrons et ions libres y jouent un rôle prépondérant. À l'altitude où la densité électronique est la plus élevée, environ une particule d'air sur 1000 est ionisée par les rayons UV, X et gamma solaires. Cette ionisation permet d'analyser les fluctuations des propriétés de la haute atmosphère par la méthode des sondages ionosphériques : une onde électromagnétique de haute fréquence, envoyée depuis le sol en direction de l'atmosphère, se réfléchit sur une zone ionisée à une faible altitude variable.

1 — Densité électronique et fréquence de plasma

L'atmosphère sera, dans un premier temps, assimilée à un gaz parfait en équilibre isotherme de température $T_0 = 270$ K dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\hat{e}_z$. On notera R la constante molaire des gaz parfaits, $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ la constante d'Avogadro et $k_B = R/N_A = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann. La pression au sol sera prise égale à $P_0 = 1$ bar.

1. Calculer la densité particulaire atmosphérique n^* (nombre de molécules par unité de volume) au niveau du sol.
2. Montrer que la pression $P(z)$ évolue en fonction de l'altitude sous la forme $P(z) = P_0 \exp(-z/H)$ et exprimer la hauteur caractéristique H en fonction de k_B , T_0 , g et de la masse moyenne m_0 des molécules de l'air. Proposer un ordre de grandeur pour H .
3. Là où la densité particulaire des ions est maximale, on considérera que $\exp(-z/H) \approx 10^{-10}$. En déduire une estimation de la densité particulaire $n_{\max}$ des ions (N_2^+ et O_2^+) à cette altitude.

Dans toute la suite on pourra considérer que la densité volumique n_0 commune des ions et des électrons dans la haute atmosphère vérifie en tout point $n_0 \leq 10^{12} \text{ m}^{-3}$.

On s'intéresse aux évolutions spontanées d'un système comportant des électrons (charge $-e$, masse m_e) en densité particulaire uniforme n_0 au sein d'un milieu ionisé comportant aussi n_0 ions positifs de charge $+e$, immobiles. Le mouvement des électrons est caractérisé par la vitesse exprimée, en notation complexe, sous la forme $\vec{v} = \underline{v}_0 e^{i\omega t} \hat{e}_x$ en présence du champ électrique $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i\omega t} \hat{e}_x$.

4. Montrer que le champ magnétique est nécessairement statique. On négligera ce champ dans toute la suite de cette partie I.
5. Expliciter la seconde loi de Newton pour un des électrons mobiles.
En déduire que la densité volumique de courant $\vec{j}$ vérifie la relation $\vec{j} = \underline{\gamma}(\omega) \vec{E}$ et exprimer la conductivité électronique $\underline{\gamma}(\omega)$ en fonction de ω , n_0 , e et m_e .
6. Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère; on notera ϵ_0 la permittivité électronique du vide et μ_0 sa perméabilité magnétique.

En déduire que les électrons et le champ électrique oscillent spontanément à la pulsation ω_p que l'on exprimera en fonction de n_0 et de constantes fondamentales.

7. Dans la suite, on adoptera la formulation numérique $\omega_p = \alpha \sqrt{n_0}$ où $\alpha = 56$ SI. Quel est le domaine de fréquence maximal de ces *oscillations de plasma* dans la haute atmosphère terrestre?

2 — Propagation d'ondes électromagnétiques dans l'atmosphère

Dans cette partie II, on étudie la propagation des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère caractérisée, à la pulsation ω , par une densité volumique de charge nulle et la densité volumique de courants $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$ avec une vitesse des électrons donnée par l'équation diélectrique(1) écrite en notation complexe :

$$im_e \omega \vec{v} = -e \vec{E} - m_e \frac{\omega_0^2}{i\omega} \vec{v} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} \quad (1)$$

où ω_0 et τ sont des constantes positives. Les champs électriques et magnétiques de l'onde ont pour expression complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$.

8. Décrire en quelques mots l'origine de chacun des termes de l'équation (1). Pourquoi n'y a-t-il aucun terme lié au champ magnétique $\vec{B}$? Quelle est la signification physique de la constante τ ? Quelle est la particularité du modèle si $\tau \rightarrow \infty$? On se placera dans ce cas dans toute la suite.

9. Montrer que les ondes électromagnétiques dans un tel milieu sont transverses puis établir leur équation de dispersion exprimant k^2 en fonction de la célérité c de la lumière dans le vide, ω , ω_0 et de la constante ω_p définie dans la partie I.

Dans la *basse* atmosphère, on étudie la propagation d'ondes électromagnétiques dans le domaine lumineux; on admet que dans ces conditions ces ondes vérifient la condition $\omega_p \ll \omega \ll \omega_0$. On définit dans ce cas l'indice optique N par l'expression $v_\varphi = c/N$ de la vitesse de phase.

10. Exprimer N en fonction de ω , ω_0 et ω_p au premier ordre non nul en ω du développement limité.? Commenter le résultat obtenu.

Dans la *haute* atmosphère (l'ionosphère), on admet que la propagation d'ondes électromagnétiques du domaine radio HF est caractérisée par $\omega_0 = 0$.

11. Que devient ici l'équation de dispersion? Dans domaine de fréquence le milieu est-il transparent? La propagation est-elle dispersive?

3 — Écho ionosphérique

Le dispositif étudié ici est basé sur un émetteur au sol situé en $z < 0$. Cet émetteur envoie dans la basse atmosphère (assimilée au vide) et en direction de l'ionosphère, une onde électromagnétique incidente de champ électrique $\vec{E}_i = E_0 \exp[i\omega(t - z/c)] \hat{e}_x$.

La réflexion sur la surface $z = 0$ séparant le vide de l'ionosphère crée une onde réfléchie de champ électrique $\vec{E}_r = \rho E_0 \exp[i\omega(t + z/c)] \hat{e}_x$. La réflexion crée aussi une onde transmise dans l'ionosphère de champ électrique $\vec{E}_t = \beta E_0 \exp[i\omega(t - z/c)] \hat{e}_x$

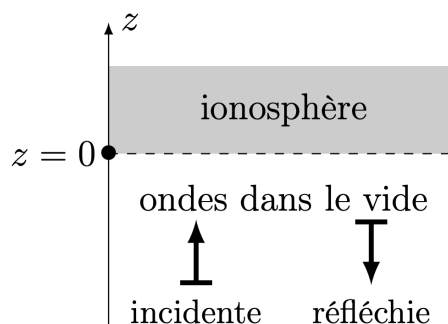


FIGURE 1 – Modèle pour l'étude des échos ionosphériques

L'ionosphère sera décrite comme un milieu équivalent au vide dans lequel la relation de dispersion est de la forme $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ où $\omega_p > 0$ est la pulsation définie à la partie III.

Enfin, on admet, en l'absence de toute discontinuité surface sur le plan $z = 0$, la continuité de toutes les composantes du champ électromagnétique de part et d'autre de ce plan.

12. Exprimer les champs magnétiques $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$ associés respectivement à chacune des ondes incidente, réfléchie et transmise en fonction, suivant les cas, de E_0 , c , ω , t , z , k , ρ ou β .

En déduire l'expression de ρ en fonction de ω , c et k , puis en fonction de ω et ω_p .

13. Quelle est la signification de la grandeur $R = |\rho|^2$?

Sans étudier la fonction, tracer l'allure qualitative de la courbe $\omega \mapsto R(\omega)$, en distinguant les deux cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$.

Dans quel cas observe-t-on un écho ionosphérique ?

On rappelle ici que la grandeur ω_p dépend de la densité électronique n_0 de l'ionosphère ; cette densité électronique croît en général du sol (où on prendra $n_0 = 0$) vers les hautes altitudes. Le signal émis, de pulsation ω variable, est constitué d'impulsions brèves de durée Δt .

14. Comment choisir Δt pour que la mesure de la durée séparant l'émission du signal et la réception de l'écho permette de mesurer l'altitude h de la surface de réflexion ?

Le décalage en fréquence (effet Doppler) de l'onde réfléchie renseigne sur les déplacements de l'air au sein de l'atmosphère. Avec trois récepteurs au minimum il est possible de mesurer par triangulation la direction et la vitesse des perturbations.

Formulaire d'analyse vectorielle

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{W}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{W}) - \Delta \vec{W}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{W}) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}.$$

En coordonnées cartésiennes, en notant $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \operatorname{div} \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{W} = \vec{\nabla} \wedge \vec{W} = \left[\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \right] \hat{e}_x + \left[\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \right] \hat{e}_y + \left[\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right] \hat{e}_z$$