

Errare humanum est... perseverare diabolicum!

Le hasard a régulièrement joué un rôle dans les découvertes scientifiques : la sérendipité a fait le bonheur de physiciens, tel Rutherford lors de sa découverte de la radioactivité. Cependant, le hasard fait parfois mal les choses, et certaines découvertes fortuites se sont avérées n'être que le résultat de manipulations pas toujours soignées... Nous allons nous intéresser à une découverte... qui finalement n'en fut pas une!

La chasse au péritio

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

En astronomie, les sursauts radio rapides (*fast radio burst*) sont de brèves émissions radio intenses, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radio-télescopes, comme celui de Parkes, en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (*perytions*), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

Après s'être intéressé au fonctionnement du miroir d'un radio-télescope, on détaillera les péritios, pour en arriver à l'explication de leur cause, donnée en 2015.

1 — Un miroir pour les ondes électromagnétiques

1. Énoncer les équations de Maxwell.

Que deviennent-elles dans une région vide de charges et de courants? On se placera dans cette situation pour les questions de la partie I.

2. En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. Comment s'appelle-t-elle?

On considère une onde électromagnétique dans le demi-espace $x < 0$, dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}_1(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y. \quad (1)$$

3. Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation.

Établir la relation, dite relation de dispersion, entre k et ω .

Cette onde rencontre une plaque métallique plane, constituée d'un conducteur parfait, dont la surface est située en $x = 0$ (figure 1).

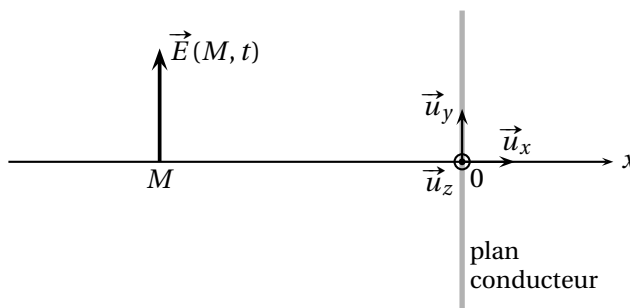


FIGURE 1 – Onde électromagnétique rencontrant un conducteur parfait

On rappelle les relations de passage entre un milieu (1) et un milieu (2) :

$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (2)$$

$$\vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (3)$$

où M est un point de l'interface, $\vec{E}_i(M, t)$ (ou $\vec{B}_i(M, t)$) la limite du champ dans le milieu (i) en un point $M_i \rightarrow M$, $\sigma(M, t)$ la densité surfacique de charge en M , $\vec{j}_s(M, t)$ la densité de courant surfacique à l'interface et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire normal à l'interface en M , dirigé du milieu (1) vers le milieu (2).

4. Rappeler la définition d'un conducteur parfait. Que peut-on alors dire du champ $\vec{E}(M, t)$ dans un tel milieu?

5. Le champ électrique de l'onde décrite par l'équation (1) vérifie-t-elle la relation de passage (2)?

Dans le demi-espace $x < 0$ règne aussi une onde de la forme $\vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_{0r} \cos(\omega' t + k' x)$. En utilisant les relations de passage, déterminer $\vec{E}_{0r}$, ω' et k' . Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde, ainsi que son état de polarisation.

6. Dans le milieu $x < 0$, établir l'expression des champs électrique $\vec{E}(M, t)$ et magnétique $\vec{B}(M, t)$ y régnant. Comment qualifier l'onde correspondante?

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite figure 2, où E est un émetteur d'ondes centimétriques, P une plaque métallique, A une antenne reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle \vec{E}^2 \rangle$ du champ électromagnétique au niveau de l'antenne A.

On place la plaque P à la distance D d'environ 46 cm de l'émetteur et on relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la distance d entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en figure 3

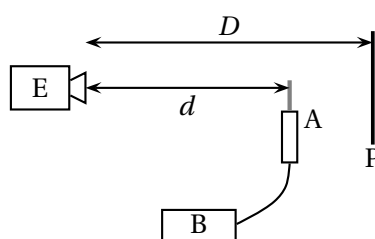


FIGURE 2 – Dispositif expérimental à ondes centimétriques

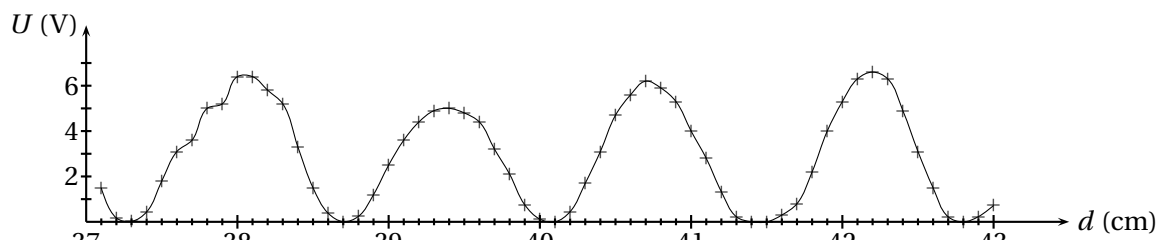


FIGURE 3 – Tension U en fonction de la distance d entre l'antenne et l'émetteur

7. Dédurre de l'enregistrement de la figure 3 la fréquence f des ondes utilisées.

Le constructeur annonce une fréquence $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1,1$ GHz, soit une incertitude $u_{\text{cons}} = \frac{1,1}{\sqrt{3}} = 0,6$ GHz.

8. Estimer l'incertitude-type sur la fréquence déterminée expérimentalement et discuter de l'acceptabilité de la mesure par rapport aux données constructeur par un calcul d'écart normalisé.

9. Déterminer la densité de courant surfacique $\vec{j}_s(M, t)$ sur le conducteur dans le cas représenté figure 1. Quelle est la source physique du champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$?

On utilise un émetteur d'ondes centimétriques, générant un champ $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$.

On remplace le plan métallique de la figure 1 par une grille métallique, constituée de barreaux parallèles séparés d'une distance très inférieure à la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique émise par le générateur. On admet que, dans ce cas, la grille se comporte comme un plan conducteur dans lequel les seuls courants électriques qui peuvent s'établir ont même direction que les barreaux.

On considère trois situations différents par l'orientation de la grille par rapport au champ $\vec{E}$ (figure 4).

10. Dans chacun de ces trois cas, décrire la plus précisément possible le champ électrique observé en $x > 0$.

11. À quel dispositif rencontré en travaux pratiques cette grille fait-elle penser?

Pour étudier les ondes électromagnétiques d'origine spatiale, on utilise un radiotélescope, basé sur le même principe qu'un télescope optique : un miroir parabolique réfléchit les ondes vers des capteurs situés à son foyer.

12. Proposer une réalisation pratique du miroir d'un radiotélescope fonctionnant dans le domaine des ondes centimétriques.

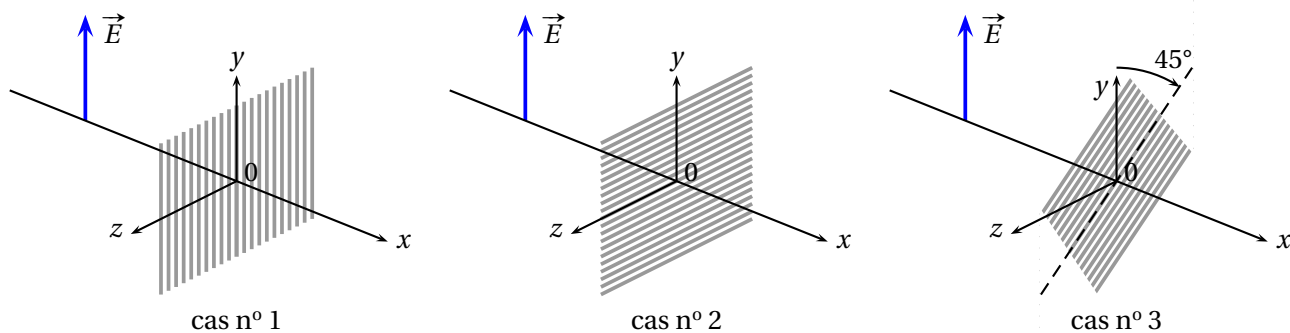


FIGURE 4 – Onde électromagnétique incidente sur une grille métallique

2 — L'énigme des péritios

L'observation de Parkes, en Australie, dispose d'un radiotélescope de 64 m de diamètre, utilisé entre autres pour l'étude des pulsars. En 2007, il a permis de découvrir des sursauts radio rapides, observés dès 2001, dont on a établi l'origine extra galactique. Ils seraient émis par des étoiles à neutrons particulières.

En analysant d'anciens enregistrements, on a trouvé qu'en 1998 le télescope de Parkes a détecté des signaux similaires aux sursauts rapides, appelés « péritios ». Leur origine fut une énigme, résolue seulement en 2015.

Les péritios sont des signaux radio d'une durée de quelques centaines de millisecondes, présentant une variation de fréquence similaire à la dispersion des impulsions émises par les pulsars s'étant propagées à travers un plasma froid dilué.

La figure 5 représente la structure temporelle et fréquentielle d'un péritio qui est un signal quasiment sinusoïdal dont la fréquence varie lentement avec le temps.

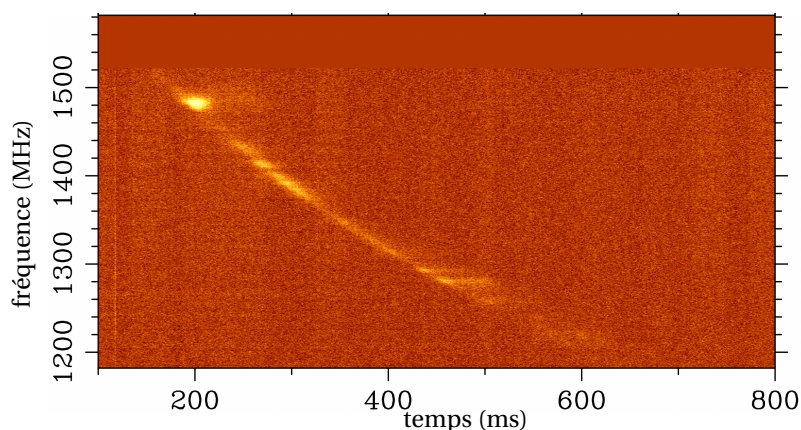


FIGURE 5 – Structure temporelle et fréquentielle d'un péritio

Afin de caractériser la variation temporelle de fréquence caractéristique lors de la réception d'une impulsion radio, détaillons la modélisation d'un plasma froid dilué.

Il est constitué :

- de cations de masse M , de charge $+e$ à la densité volumique n_c ;
- d'électrons de masse m , de charge $-e$ à la densité volumique n_e .

On fait les hypothèses suivantes :

- on néglige les interactions entre les particules (plasma peu dense) ; elles ne sont alors soumises qu'au champ électromagnétique de l'onde présente dans le plasma ;
- comme $M \gg m$, les ions, du fait de leur inertie, sont considérés comme immobiles ; c'est le modèle du « plasma froid » où l'on néglige l'énergie d'agitation thermique des ions, considérés comme « froids » ;
- en l'absence d'onde, le plasma est localement neutre : les cations et les électrons ont la même densité volumique n ;
- le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane pseudo-progressive harmonique **transverse** :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}x)},$$

avec $\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_x = 0$ pour une onde transverse se propageant selon $\vec{k} = k \vec{u}_x$.

13. Montrer que le plasma reste localement neutre en présence de l'onde. Que peut-on alors dire de la densité volumique n_e d'électrons dans le plasma?

14. En considérant que les électrons ne sont soumis qu'à la seule force électrique (on néglige l'effet du champ magnétique), montrer que la densité volumique de courant dans le plasma est reliée au champ électrique par une relation de la forme

$$\underline{j} = \underline{\theta_B} \underline{E}$$

où l'on exprimera la conductivité complexe $\underline{\theta_B}$ en fonction des données.

15. À partir des équations de Maxwell, établir la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2},$$

où l'on exprimera la pulsation plasma ω_p en fonction de n , m , e et ϵ_0 .

16. À quelle condition sur ω l'onde peut-elle se propager dans le plasma?

17. Établir alors l'expression de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω , ω_p et c .

On considère une onde électromagnétique émise par un astre à une distance L de la Terre.

Le temps de parcours de la composante de l'onde à la pulsation ω est

$$t(\omega) = \int_0^L \frac{d\ell}{v_g(\omega)}.$$

18. Pourquoi ne peut-on pas écrire *a priori* $t(\omega) = \frac{L}{v_g}$?

19. Établir l'expression de $t(\infty)$. Quelle est son interprétation physique?

20. Quel est le signe de $\tau(\omega) = t(\omega) - t(\infty)$ et quel sens donner à cette grandeur?

On définit la mesure de dispersion DM (pour *dispersion measure*) par

$$DM = \int_0^L n_e d\ell.$$

Pour un plasma interstellaire, on a typiquement $n_e \approx 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$.

21. Montrer que pour des ondes d'une fréquence f de l'ordre du gigahertz, on peut écrire

$$\tau(f) = A \frac{DM}{f^2}$$

où l'on exprimera A en fonction de e , ϵ_0 et m .

22. Calculer la valeur de A .

23. Cette relation est-elle qualitativement en accord avec l'enregistrement de la figure 5?

Dans la définition $DM = \int_0^L n_e d\ell$, on exprime usuellement la densité électronique n_e en cm^{-3} et la distance L en parsec, unité de distance astronomique; la mesure de dispersion est alors donnée en $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$.

24. À partir de la figure 5, estimer la mesure de dispersion DM, en exprimant le résultat d'abord en unités du système international puis en $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$.

25. Les mesures de dispersion mesurées pour des objets extragalactiques sont usuellement de quelques centaines de $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$. Peut-on exclure une origine extragalactique aux périitos?

Différents indices ont fait pencher la balance vers une origine terrestre des périitos : détections dans des directions en-dessous de la ligne d'horizon, ou sur un large champ de visée. Et surtout, ces phénomènes se produisent pendant les heures de bureau, en semaine...

En 2014, l'observatoire de Parkes s'est doté d'un enregistreur plus performant, pouvant couvrir une bande de fréquence allant de 402 MHz à 3 GHz, l'équipement utilisé jusqu'alors ne permettant d'explorer qu'une bande de 400 MHz de large, centrée sur 1382 MHz.

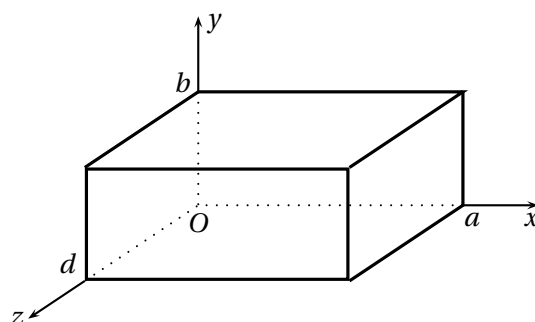
Des chercheurs ont alors découvert que plusieurs périitos sont associés à une émission d'onde électromagnétique dans le domaine de fréquence de 2,3 à 2,5 GHz, inaccessible avec l'ancien matériel. Il est apparu que les périitos

sont toujours accompagné d'une émission à 2,4 GHz, mais que l'on observe de nombreuses émissions à 2,4 GHz non accompagnées de péritio. L'analyse des enregistrements sur deux mois montrent qu'ils sont répartis pendant la journée, entre 9h et 17h. Ces observations ont permis aux chercheurs de trouver le coupable : un four à micro-ondes utilisé par le personnel de l'observatoire.

La suite du problème étudie le four à micro-ondes afin de déterminer si l'ouverture de la porte du four avant la fin de son fonctionnement permet d'expliquer les péritios observés.

3 — Le four à micro-ondes

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence $f = 2,45$ GHz, acheminée par un guide d'onde vers la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$.



On considère dans un premier temps les parois parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide.

On cherche le champ électrique sous la forme

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

26. Montrer que seuls des valeurs discrètes de k_x , k_y et k_z sont possibles, repérées respectivement par des entiers m , n et ℓ .

Le triplet (m, n, ℓ) caractérise un mode propre.

27. En déduire l'expression de fréquences $f_{mn\ell}$ des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit une cavité ayant pour dimensions $a = 36,0$ cm, $b = 24,0$ cm et $d = 26,5$ cm, alimentée par un klystron de fréquence $f = 2,45$ GHz.

Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexa-hydrate de chlorure de cobalt ($\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. La figure 6 présente les résultats obtenus en fonction de la position dans le four de la feuille de papier.

28. Déterminer la valeur du triplet (m, n, ℓ) .

La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron?

Justifier précisément l'aspect de la figure ?? en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois $y = 0$ et $z = 0$.

L'ouverture de la porte déclenche l'arrêt du klystron générant l'onde. Cependant, des ondes électromagnétiques ont été détectées lorsque l'on ouvre la porte d'un four en cours de fonctionnement. Nous allons déterminer au bout de quelle durée l'onde présente dans le four s'atténue.

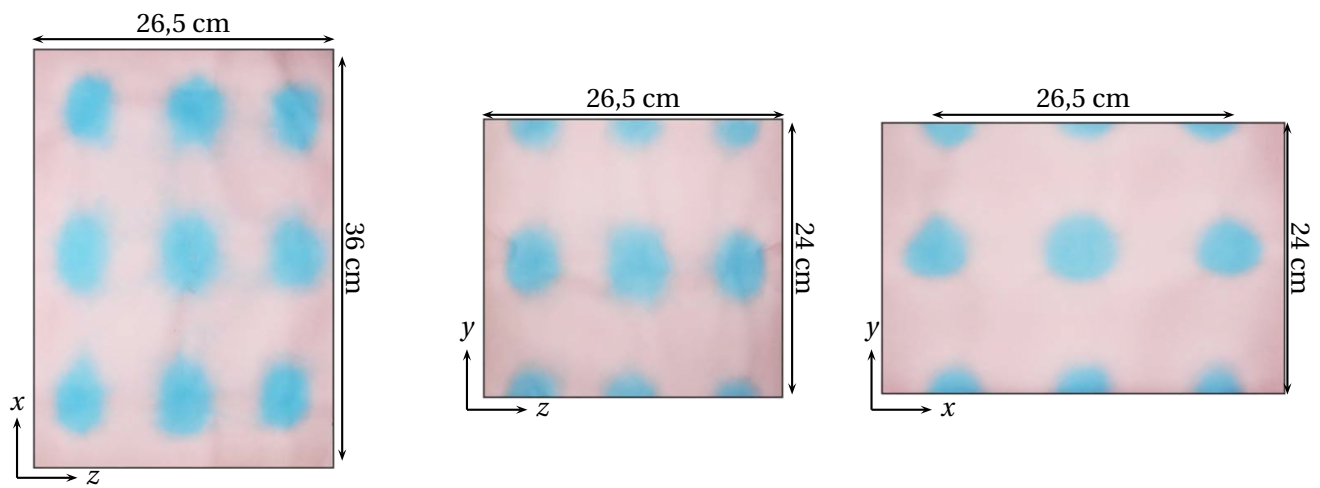
On considère une cavité simplifiée à une dimension entre deux plaques conductrices de surface S , située en $x = 0$ et $x = a$.

Le champ électrique régnant dans cette cavité, en négligeant les effets de bord, est de la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_y,$$

où n est un entier positif.

On considère toujours que les parois sont parfaitement conductrices.



(a) Feuille dans le plan xz , à $y = 12$ cm (b) Feuille dans le plan yz , à $x = 18$ cm (c) Feuille dans le plan xy , à $z = 13,25$ cm

FIGURE 6 – Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four

29. Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ dans la cavité. On notera B_0 son amplitude maximale, que l'on exprimera en fonction de E_0 .

30. Établir l'expression W de l'énergie électromagnétique totale contenu dans la cavité, en fonction de B_0 , des caractéristiques de la cavité et de μ_0 . Que constate-t-on ?

Pour rendre compte de la décroissance du champ électromagnétique en l'absence de source d'onde, il faut tenir compte de la conductivité électrique finie σ des parois métalliques. Les parois d'un four à micro-ondes sont en acier inoxydable, de conductivité électrique $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Nous allons étudier l'interaction d'une onde électro-magnétique avec un conducteur métallique.

On considère un milieu métallique, conducteur ohmique de conductivité σ , occupant le demi-espace $x > 0$.

31. Comment se simplifie l'équation de Maxwell-Ampère si $\varepsilon_0 f \ll \sigma$? Cette condition est-elle vérifiée dans le cadre du four à micro-ondes ?

32. Établir alors l'équation vérifiée par $\vec{B}(M, t)$ dans le conducteur. Qu'est-ce qui permet de dire qu'elle traduit un phénomène irréversible ? Citer un phénomène décrit par une équation analogue dans un autre domaine de la physique que l'électromagnétisme.

On cherche une solution de cette équation dans le domaine $x > 0$ sous la forme

$$\vec{B}(x, t) = \underline{f}(x) e^{i\omega t} \vec{u}_z.$$

33. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{f}(x)$, sachant que l'on impose en $x = 0$ le champ $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$. On posera une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de μ_0 , σ et ω .

34. Commenter l'expression du champ $\vec{B}(x, t)$ dans le conducteur. Donner l'interprétation de δ .

35. Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par un champ électromagnétique à un conducteur ohmique.

36. Établir l'expression de la puissance moyenne (temporelle) dissipée dans les deux parois de la cavité de section S , en fonction de B_0 , ω , δ , S et μ_0 .

On définit le facteur de qualité de la cavité comme suit :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée dans la cavité}}{\text{énergie dissipée par période}}.$$

37. En justifiant que l'on peut prendre en première approximation l'expression de l'énergie totale établie en considérant les conducteurs des parois comme parfaits, établir l'expression du facteur de qualité de la cavité en fonction de a et δ .

38. Calculer la valeur de Q pour un four à micro-ondes, avec $a = 36$ cm.

39. Montrer que l'énergie totale $W(t)$ décroît avec un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de ω et Q .

40. Calculer numériquement τ . Peut-on expliquer les pèritios par le champ émis lors de l'ouverture d'un four à micro-ondes ?

Données

célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$
charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
masse d'un électron	$m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$
parsec	$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$
constante des gaz parfait	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Double produit vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$.

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel s'exprimant en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{u}_x + A_y(x, y, z) \vec{u}_y + A_z(x, y, z) \vec{u}_z.$$

On donne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}; \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z. \end{aligned}$$